

用平面弹性理论的复变函数解法 精确确定直齿轮轮齿的挠度*

程乃士 刘 温

(东北工学院, 1984年8月31日收到)

摘 要

本论文吸取并发展了目前受到国内外普遍注意的由会田俊夫、寺内喜男和永村和照所开创的用平面弹性理论的复变函数解法求直齿轮轮齿的应力和变形的办法, 把它们的应力函数的近似解发展为精确解; 提高了映射齿形的精度, 提出了用五项分式项表达的、映射误差小于1%的映射函数; 提出了求直接影响齿轮啮合质量的啮合点相对于相邻轮齿中线位移的原则; 编制了计算程序, 并对计算结果进行了分析。

一、前 言

以往的齿轮轮齿的强度计算及变形计算公式, 几乎都假设齿为悬臂梁, 用材料力学的方法来计算, 把加载点的位移分解成由于弯曲、剪切、压缩、基础挠角、基础剪切和接触所引起的变形分别计算, 然后相加。由于齿的厚度和高度相仿, 与材料力学中关于悬臂梁的“细而长”, “平面变形”的假设不符, 因而误差较大。再者, 为了运用材料力学的公式, 对齿形也做了很粗糙的简化: 有矩形、单梯形和双梯形等等。Weber-Baraschek以积分形式给出了弯曲和剪切的挠度计算公式, 但仍无法考虑齿根圆角的影响。有限元法能比较精确地显示齿形和齿根过渡曲线, 避免了材料力学中关于悬臂梁“平面变形”的假设的误差, 但由于分割单元的不同、对边界条件的假设不同、再加上计算机容量的限制, 对计算结果都有较大的影响, 以致计算结果有较大的差异。

本计算中假设轮齿为半平面上有一齿状凸起, 邻齿对其应力和变形没有影响, 这从已有的光弹试验结果来看是符合实际的。齿不太长时视为平面应力问题, 齿较长时视为平面应变问题。

二、基 本 公 式

复变函数方法解平面弹性力学问题时, Airy 应力函数表示为

$$U = \operatorname{Re}[\bar{z}\varphi_1(z) + \theta_1(z)] \quad (2.1)$$

式中 $\varphi_1(z)$ 和 $\theta_1(z)$ 是 $z(z=x+iy)$, $\bar{z}=x-iy$ 的两个解析函数。

* 杨桂通推荐。

位移的复变函数表示为

$$u + iv = \frac{3-\mu}{E} \varphi_1(z) - \frac{1+\mu}{E} [z\overline{\varphi_1'(z)} + \overline{\psi_1(z)}] \quad (2.2)$$

式中 $\psi_1(z) = \theta_1'(z)$; E 为弹性模量; μ 为泊松比. 对于平面应变问题, 式中 E 用 $E/(1-\mu^2)$ 代替, μ 用 $\mu/(1-\mu)$ 代替.

因此, 问题集中于求应力函数的两个解析函数 $\varphi_1(z)$ 和 $\psi_1(z)$, 使其满足边界条件.

(a) 集中力作用于半平面域的边界上, 当作用点为原点时 [见图 1(a)]

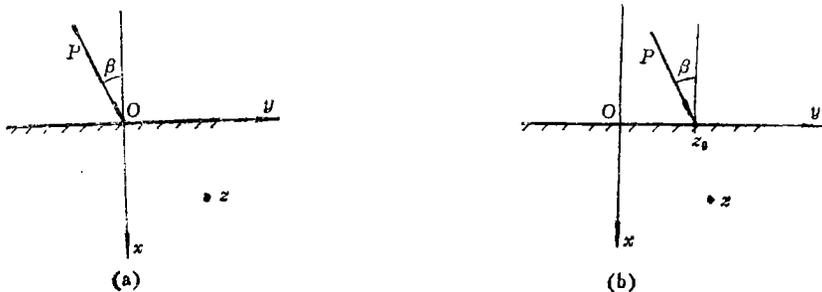


图 1

$$\varphi_1(z) = -\frac{X+iY}{2\pi} \ln z, \quad \psi_1(z) = \frac{X-iY}{2\pi} \ln z \quad (2.3)$$

$$X = P \cos \beta, \quad Y = P \sin \beta \quad (2.4)$$

(b) 当集中力作用于边界上任意点 z_0 时, 由坐标平移得

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(z) &= -\frac{X+iY}{2\pi} \ln(z-z_0) \\ \psi_1(z) &= \frac{X-iY}{2\pi} \ln(z-z_0) + \frac{X+iY}{2\pi} \cdot \frac{\bar{z}}{z-z_0} \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

(c) 保角映射

见图 2, 为把 z 平面齿形边界围成的域 D 映射为 ξ 平面的下半平面域 Δ , 即 $\xi > 0$, 把齿形边界 c 映射为虚轴 Γ , 采用下面型式的映射函数

$$z = \omega(\xi) = m_0 \xi - \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\xi + a_j} \quad (2.6)$$

所映射的域 D 比实际齿形在齿顶多了一小块面积, 由于其位置在不承受载荷的地方, 因而略去这部分的影响.

适当地选择 m_0 , m_j 和 a_j 就能得到近似程度很高的齿形, 项数越多可越精确. 这里 $\omega'(\xi) \neq 0$, $\lim_{\xi \rightarrow \infty} |\omega(\xi) - m_0 \xi| = 0$

(d) φ 与 ψ 的映射关系

$$\varphi(\xi) = \varphi_1(z) = \varphi_1[\omega(\xi)], \quad \psi(\xi) = \psi_1(z) = \psi_1[\omega(\xi)]$$

因此得

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\xi) &= -\frac{X+iY}{2\pi} \ln[\omega(\xi) - \omega(\tau)] \\ \psi(\xi) &= \frac{X-iY}{2\pi} \ln[\omega(\xi) - \omega(\tau)] + \frac{X+iY}{2\pi} \cdot \frac{\overline{\omega(\xi)}}{\omega(\xi) - \omega(\tau)} \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

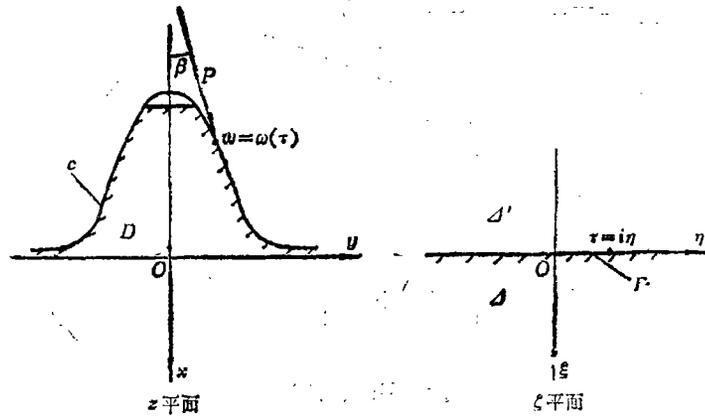


图 2

由 φ 和 ψ 的表达式中可见在 $z=z_0$,即在 $\omega(\xi)=\omega(\tau)$ 时, φ 和 ψ 不解析,这是由于对作用于边界上的力假设为集中力所致.工程上是没有理论上的集中力的,都是某种分布力.根据圣文南原理,在研究离开力作用区域较远的点的应力和位移时,可以用这个分布力的等效力系来研究,但在力作用区域及附近就不能这样来研究.为把这一部分单独分离出来分析和研究,我们把 φ 和 ψ 分成非解析部分 φ_0 和 ψ_0 及解析部分 φ^* 和 ψ^* 两部分,且当 $\xi \rightarrow \infty$ 时 $\varphi^*(\xi) \rightarrow 0$, $\psi^*(\xi) \rightarrow 0$.即

$$\varphi(\xi) = \psi_0(\xi) + \varphi^*(\xi) \quad (2.8)$$

$$\psi(\xi) = \psi_0(\xi) + \psi^*(\xi) \quad (2.9)$$

当 $\xi \rightarrow \tau$ 时,可以写

$$\omega(\xi) - \omega(\tau) = \omega'(\tau)(\xi - \tau)$$

$$\ln[\omega(\xi) - \omega(\tau)] = \ln[\omega'(\tau)(\xi - \tau)] = \ln[\omega'(\tau)] + \ln(\xi - \tau)$$

略去常数部分得

$$\varphi_0(\xi) = -\frac{X+iY}{2\pi} \ln(\xi - \tau) \quad (2.10)$$

同样可得

$$\psi_0(\xi) = -\frac{X-iY}{2\pi} \ln(\xi - \tau) + \frac{X+iY}{2\pi} \cdot \frac{\bar{\omega}(-\tau)}{\omega'(\tau)(\xi - \tau)} \quad (2.11)$$

由于 τ 在 Γ 上, $\bar{\tau} = -\tau$.

由于 $z = \omega(\xi)$, $dz = \omega'(\xi)d\xi$ 故

$$\varphi'_1(z) = \frac{\varphi'(\xi)}{\omega'(\xi)}$$

设 σ 在 Γ 上,由边界条件得

$$\left[\varphi(\sigma) + \omega(\sigma) \frac{\overline{\varphi'(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \left[\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} \right]_{-\infty}^{+\infty} = -i(X+iY) \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \text{而} \quad & \left[\varphi_0(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi'_0(\sigma)} + \overline{\psi_0(\sigma)} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \left[-\frac{X+iY}{2\pi} \ln(\sigma - \tau) \right. \\ & \left. + \frac{X+iY}{2\pi} \ln(\sigma - \tau) \right]_{-\infty}^{+\infty} + \left[\frac{X-iY}{2\pi} \frac{\bar{\omega}(\tau)}{\omega'(\tau)(\sigma - \tau)} \right]_{-\infty}^{+\infty} \end{aligned}$$

$$-\left. \frac{X-iY}{2\pi} \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)(\sigma-\tau)} \right]_{-i\infty}^{+i\infty} \quad (2.13)$$

式 (2.13) 右边第一项可写成

$$\lim_{\substack{A \rightarrow +i\infty \\ B \rightarrow -i\infty}} \left[-\frac{X+iY}{2\pi} \ln(\sigma-\tau) + \frac{X+iY}{2\pi} \ln(\overline{\sigma-\tau}) \right]_B^A$$

设 A 和 B 到 τ 的距离为 r_A 和 r_B , 则

$$\lim_{\substack{A \rightarrow +i\infty \\ B \rightarrow -i\infty}} \left[-\frac{X+iY}{2\pi} \left(\ln \left| \frac{ir_A}{ir_B} \right| + i\pi \right) + \frac{X+iY}{2\pi} \left(\ln \left| \frac{ir_A}{ir_B} \right| - i\pi \right) \right]_B^A = -i(X+iY)$$

式 (2.12) 减式 (2.13) 并将 (2.8) 和 (2.9) 代入得

$$\begin{aligned} & \left[\varphi^*(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\bar{\omega}'(-\sigma)} \bar{\varphi}^*(-\sigma) + \bar{\psi}^*(-\sigma) \right]_{-i\infty}^{+i\infty} \\ & + \frac{X-iY}{2\pi} \left[\frac{\omega(\tau)}{\bar{\omega}'(-\tau)(\sigma-\tau)} - \frac{\omega(\sigma)}{\bar{\omega}'(-\sigma)(\sigma-\tau)} \right]_{-i\infty}^{+i\infty} = 0 \end{aligned}$$

下方程的解满足上方程

$$\begin{aligned} & \varphi^*(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\bar{\omega}'(-\sigma)} \bar{\varphi}^*(-\sigma) + \bar{\psi}^*(-\sigma) \\ & + \frac{X-iY}{2\pi} \left[\frac{\omega(\tau)}{\bar{\omega}'(-\tau)(\sigma-\tau)} - \frac{\omega(\sigma)}{\bar{\omega}'(-\sigma)(\sigma-\tau)} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

对上式取 Cauchy 积分

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi^*(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma-\xi} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega(\sigma)}{\bar{\omega}'(-\sigma)} \bar{\varphi}^*(-\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma-\xi} \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \bar{\psi}^*(-\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma-\xi} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{X-iY}{2\pi} \cdot \frac{\omega(\tau)}{\bar{\omega}'(-\tau)(\tau-\sigma)} \frac{d\sigma}{\sigma-\xi} \\ & - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{X-iY}{2\pi} \cdot \frac{\omega(\sigma)}{\bar{\omega}'(-\sigma)(\tau-\sigma)} \frac{d\sigma}{\sigma-\xi} = 0 \end{aligned}$$

第一项由于 $\varphi^*(\sigma)$ 为在下半平面解析, 在无穷远为零的函数 $\varphi^*(\xi)$ 的边界值, 且沿 Γ 的正方向积分时域在右方, 故

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi^*(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma-\xi} = -\varphi^*(\xi)$$

第三项由于 $\bar{\psi}^*(-\sigma)$ 为在上半平面解析在无穷远为零的函数 $\psi^*(-\xi)$ 的边界值, 故

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \bar{\psi}^*(-\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma-\xi} = 0$$

第四项由于 $\frac{\omega(\tau)}{\bar{\omega}'(-\tau)}$ 有界, $\frac{1}{\tau-\sigma}$ 为在上半平面解析, 在无穷远为零的函数 $\frac{1}{\tau-\xi}$ 的边界值, 故

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{X-iY}{2\pi} \frac{\omega(\tau)}{\bar{\omega}'(-\tau)} \cdot \frac{1}{\tau-\sigma} \frac{d\sigma}{\sigma-\xi} = 0$$

因此有

$$\varphi^*(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega(\sigma)}{\bar{\omega}'(-\sigma)} \bar{\varphi}'(-\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma-\xi} \quad (2.15)$$

对式 (2.14) 取共轭

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}^*(-\sigma) + \frac{\bar{\omega}(-\sigma)}{\omega'(\sigma)} \varphi^{*'}(\sigma) + \psi^*(\sigma) \\ + \frac{X+iY}{2\pi} \left[\frac{\bar{\omega}(-\tau)}{\omega'(\tau)(\sigma-\tau)} - \frac{\bar{\omega}(-\sigma)}{\omega'(\sigma)(\sigma-\tau)} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

对式 (2.16) 取 Cauchy 积分, 整理后同样可得

$$\psi^*(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\bar{\omega}(-\sigma)}{\omega'(\sigma)} \varphi'(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma-\xi} - \frac{X+iY}{2\pi} \frac{\bar{\omega}(-\tau)}{\omega'(\tau)} \frac{1}{\xi-\tau} \quad (2.17)$$

将式 (2.10)、(2.15) 代入 (2.8) 得

$$\varphi(\xi) = -\frac{X+iY}{2\pi} \ln(\xi-\tau) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega(\sigma)}{\bar{\omega}'(-\sigma)} \bar{\varphi}'(-\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma-\xi} \quad (2.18)$$

将式 (2.11)、(2.17) 代入 (2.9) 得

$$\psi(\xi) = \frac{X-iY}{2\pi} \ln(\xi-\tau) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\bar{\omega}(-\sigma)}{\omega'(\sigma)} \varphi'(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma-\xi} \quad (2.19)$$

并重记

$$\psi_0(\xi) = \frac{X-iY}{2\pi} \ln(\xi-\tau) \quad (2.11)'$$

$$\psi^*(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\bar{\omega}(-\sigma)}{\omega'(\sigma)} \varphi'(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma-\xi} \quad (2.17)'$$

(e) 位移表达式

$$u + iv = \frac{3-\mu}{E} \varphi(\xi) - \frac{1+\mu}{E} \left[\frac{\omega(\xi)}{\omega'(\xi)} \bar{\varphi}'(\xi) + \bar{\psi}(\xi) \right] \quad (2.20)$$

式中 u 为 x 方向的位移, v 为 y 方向的位移。

三、计算方法

本文计算以 GB 1357-78 基准齿形为刀具齿形的齿条型刀具所切得的齿轮轮齿上载荷与变形的关系。其他制度的齿形用同样方法可以计算。

(a) 求映射函数 $z = \omega(\xi)$

在本计算中为提高曲线拟合的精度, 对模数 $m = 2.5\text{mm}$ 的齿形绘制放大 100 倍的图形

(1) 齿形的渐开线部分

如图 3 所示, 渐开线齿形上任意点坐标

$$\left. \begin{aligned} x &= r_x \sin \left[\frac{\pi + 4\xi \operatorname{tg} \alpha_0}{2z} + \operatorname{inv} \alpha_0 - \operatorname{inv} \alpha_x \right] \\ y &= r_a - r_x \cos \left[\frac{\pi + 4\xi \operatorname{tg} \alpha_0}{2z} + \operatorname{inv} \alpha_0 - \operatorname{inv} \alpha_x \right] \\ \alpha_x &= \cos^{-1} \left(\frac{r_0}{r_x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

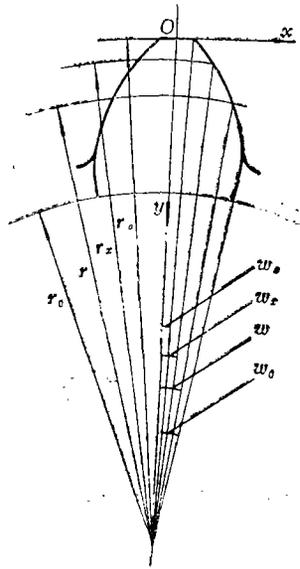


图 3

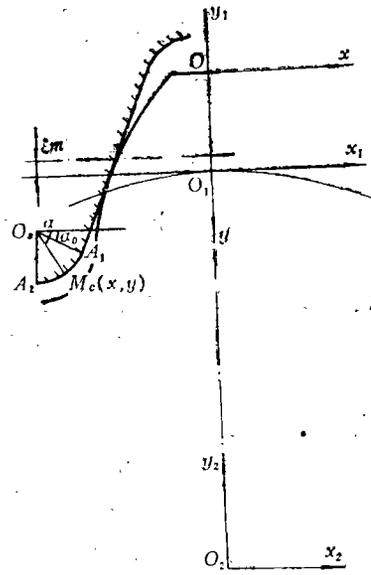


图 4

式中 r_0 为基圆半径; r_x 为齿形上任意点半径; r_a 为齿顶圆半径; α_0 为齿形角; α_x 为齿形上任意点的压力角; Z 为齿数; ξ 为变位系数; $\text{inv}\alpha_x$ 为角 α_x 的渐开线函数。

(2) 齿根过渡曲线部分

刀具参数: 齿顶高 h_a ; 齿形角 α_0 ; 齿顶圆角半径 ρ 。

见图 4, 刀具齿顶圆角圆弧中心 O_s 点在 $x_1O_1y_1$ 坐标系中的坐标。

$$x_{o_s} = -\frac{\pi m}{4} - [h_a - \rho(1 - \sin \alpha_0)] \text{tg} \alpha_0 - \rho \cos \alpha_0, \quad y_{o_s} = -(h_a + \xi m) + \rho \quad (3.2)$$

在 $x_1O_1y_1$ 坐标系中, 刀具齿顶圆弧方程为

$$x_1 = x_{o_s} + \rho \cos \alpha, \quad y_1 = y_{o_s} - \rho \sin \alpha \quad (3.3)$$

在 $x_2O_2y_2$ 坐标系中, 齿轮齿形过渡曲线的方程为

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x_1 \cos \varphi_2 + y_1 \sin \varphi_2 + \frac{mZ}{2} (\sin \varphi_2 - \varphi_2 \cos \varphi_2) \\ y_2 &= -x_1 \sin \varphi_2 + y_1 \cos \varphi_2 + \frac{mZ}{2} (\cos \varphi_2 + \varphi_2 \sin \varphi_2) \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

$$\text{式中} \quad \varphi_2 = \frac{2(x_1 + y_1 \text{ctg} \alpha)}{mZ} \quad (3.5)$$

转到 xOy 坐标系中, 过渡曲线的方程为

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 \cos \varphi_2 + y_1 \sin \varphi_2 + \frac{mZ}{2} (\sin \varphi_2 - \varphi_2 \cos \varphi_2) \\ y &= (1 + \xi)m + x_1 \sin \varphi_2 - y_1 \cos \varphi_2 + \frac{mZ}{2} (1 - \cos \varphi_2 - \varphi_2 \sin \varphi_2) \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

(3) 求 $\omega(\xi)$

在本计算中分式项取 5 项为如下形式

$$z = \omega(\zeta) = m_0 \zeta - \sum_{j=1}^6 \frac{m_j}{\zeta + a_j} \quad (3.7)$$

调整 m_0, m_j, a_j 等 11 个系数, 使映射曲线与齿形曲线尽可能重合, 使误差最小来确定映射函数的各系数。

(b) 求 $\varphi_0(\zeta)$ 和 $\psi_0(\zeta)$

根据弹性流体动力润滑理论, 被油膜分开的两齿面间的压力分布仍基本服从 Hertz 分布, 因此, 我们仍按 Hertz 分布求解。

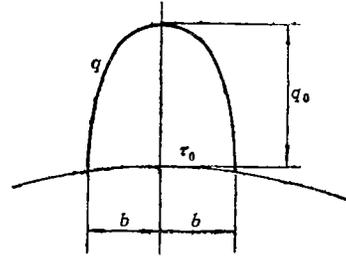


图 5

$$b = 1.52 \sqrt{\frac{PR_1R_2}{E(R_1+R_2)}} \quad (3.8)$$

$$q_0 = 0.418 \sqrt{\frac{PE(R_1+R_2)}{R_1R_2}} \quad (3.9)$$

$$q = \frac{q_0}{b} \sqrt{b^2 - (\tau - \tau_0)^2} \quad (3.10)$$

式中 P 为单位齿宽的载荷; R_1, R_2 分别为两齿面在接触点处的曲率半径; E 为拉伸弹性模量; τ_0 为压力分布中心。设 $\tau - \tau_0 = \gamma$, $k = k(\zeta) = \zeta - \tau_0$, 由于 b 很小, 在下面计算时将这段齿形看作直线。又由式 (2.4) 得

$$X + iY = Pe^{i\beta} \quad (3.11)$$

$$X - iY = Pe^{-i\beta} \quad (3.12)$$

因而有

$$\varphi_0(\zeta) = -\frac{Pe^{i\beta}}{2\pi} \ln(\zeta - \tau) \quad (3.13)$$

$$\psi_0(\zeta) = \frac{Pe^{-i\beta}}{2\pi} \ln(\zeta - \tau) \quad (3.14)$$

$$\psi_0(\zeta) = -\varphi_0(\zeta) \cdot e^{-2i\beta} \quad (3.15)$$

由式 (3.13) (3.10) 可得

$$d\varphi_0(\zeta) = -\frac{q_0 e^{i\beta}}{2\pi b} \sqrt{b^2 - \gamma^2} \ln(k - i\gamma) d\gamma$$

$$\varphi_0(\zeta) = -\frac{q_0 e^{i\beta}}{2\pi b} \int_{-b}^b \sqrt{b^2 - \gamma^2} \ln(k - i\gamma) d\gamma \quad (3.16)$$

当 $\zeta = \tau_0$ 时, 即 $k=0$ 时, 上式积分结果为

$$\varphi_0(\tau_0) = -\frac{q_0 b e^{i\beta}}{2\pi} \left[\frac{\pi}{2} \left(\ln b - \frac{1}{2} \right) - \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)(2n+1)^2} \right) \right] \quad (3.17)$$

当 $\zeta \neq \tau_0$ 时, 根据圣文南原理, 在离力的作用区域较远的地方, 可以将分布力用其等效力系来代替, 这里我们可以用作用于 τ_0 的集中力来代替, 因此我们仍可用式 (3.13) 来计算。

(c) 求 $\varphi^*(\zeta)$ 和 $\psi^*(\zeta)$

由式 (2.15) 及式 (3.7) 可得

$$\varphi^*(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_r \frac{\bar{\varphi}'(-\sigma)}{\bar{\omega}'(-\sigma)} \cdot \frac{m_0\sigma - \sum_{j=1}^5 \frac{m_j}{\sigma+a_j}}{\sigma-\xi} d\sigma$$

在上半平面, 被积函数有奇点 $\sigma = -a_j$, 根据留数定理

$$\varphi^*(\xi) = \sum_{j=1}^5 \frac{m_j}{\xi+a_j} \cdot \frac{\bar{\varphi}'(a_j)}{\bar{\omega}'(a_j)} \quad (3.18)$$

同样可得

$$\varphi^*(\xi) = \sum_{j=1}^5 \left[-\frac{m_j}{(a_j-\xi)} \cdot \frac{\varphi'(a_j)}{\omega'(a_j)} \right] - \frac{\varphi'(\xi)}{\omega'(\xi)} \bar{\omega}(-\xi) \quad (3.19)$$

$$\omega'(\xi) = m_0 + \sum_{j=1}^5 \frac{m_j}{(\xi+a_j)^2} \quad (3.20)$$

$$\bar{\omega}'(\xi) = m_0 + \sum_{j=1}^5 \frac{m_j}{(\xi+a_j)^2} \quad (3.21)$$

$$\omega'(a_i) = \bar{\omega}'(a_i) = m_0 + \sum_{j=1}^5 \frac{m_j}{(a_i+a_j)^2} \quad (i=1, 2, \dots, 5) \quad (3.22)$$

$$\varphi'(\xi) = \varphi_0'(\xi) - \sum_{j=1}^5 \frac{m_j}{(\xi+a_j)^2} \cdot \frac{\bar{\varphi}'(a_j)}{\bar{\omega}'(a_j)} \quad (3.23)$$

$$\bar{\varphi}'(\xi) = \bar{\varphi}_0'(\xi) - \sum_{j=1}^5 \frac{m_j}{(\xi+a_j)^2} \cdot \frac{\varphi'(a_j)}{\omega'(a_j)} \quad (3.24)$$

$$\varphi'(a_i) = \varphi_0'(a_i) - \sum_{j=1}^5 \frac{m_j}{(a_i+a_j)^2} \cdot \frac{\bar{\varphi}'(a_j)}{\bar{\omega}'(a_j)} \quad (i=1, 2, \dots, 5) \quad (3.25)$$

$$\operatorname{Re}[\varphi'(a_i)] = \operatorname{Re}[\bar{\varphi}'(a_i)] \quad (3.26)$$

$$\operatorname{Im}[\varphi'(a_i)] = -\operatorname{Im}[\bar{\varphi}'(a_i)] \quad (3.27)$$

将式 (3.25) 分成实部和虚部可得五个实部方程和五个虚部方程, 分别联立求解可得 $\varphi'(a_i)$ 的实部和虚部。

式中 $\varphi_0'(a_i)$ 可由式 (3.13) 求导得到, 当 $\xi = \tau_0$ 时, $\varphi_0'(\tau_0) = 0$ (证明从略)。

至此我们已求得了位移表达式中的每一项因子, 代入式 (2.20) 中即可求得位移 u 和 v 。

四、计算结果

求映射函数式 (3.7) 的11个系数是件细致的工作, 所求得的映射函数直接影响计算结果。本计算将 $m=2.5\text{mm}$ 的齿形放大100倍作图, 所求得的映射函数的系数列于表1内, 其映射齿形误差小于1% m 。

按前述方法进行计算,可以得到齿形边界上及域内任意点的位移,但这个位移是相对于无穷远点的位移。因此,对数据应作如下处理。

对齿轮弹性啮合过程的研究表明,影响齿轮啮合质量的一个重要因素是加载点相对于下一个进入啮合的齿的位移,也就是主动齿轮受压边和被动齿轮受拉边法向基节的变化,这是决定齿廓修形量的依据。

表 1 映射函数系数表

模数	变位系数	齿数	m_0	a_1	m_1	a_2	m_2	a_3	m_3	a_4	m_4	a_5	m_5
2.5	0	17	0.095	9.50	14.25	2.5	3.75	1.26	1.89	0.295	0.3068	0.11	0.088
		25	0.115	8.50	12.75	2.85	4.275	1.20	1.80	0.29	0.3016	0.10	0.09
		34	0.132	7.60	11.40	3.05	4.575	1.10	1.65	0.30	0.3120	0.08	0.08
		50	0.157	6.70	10.05	2.95	4.425	1.00	1.50	0.27	0.278	0.08	0.08
		75	0.165	6.66	9.99	3.10	4.65	1.00	1.50	0.27	0.278	0.08	0.084
		100	0.170	6.66	9.99	3.15	4.725	0.98	1.47	0.27	0.278	0.078	0.084
	0.5	17	0.167	4.65	6.975	2.95	4.425	1.00	1.35	0.35	0.280	0.086	0.0817
		25	0.183	4.65	6.975	2.95	4.425	0.94	1.269	0.32	0.272	0.083	0.083
		34	0.197	4.65	6.975	2.95	4.425	0.86	1.161	0.32	0.2816	0.08	0.084
		50	0.207	4.75	7.125	2.95	4.425	0.83	1.1205	0.32	0.2848	0.077	0.08701
		75	0.207	5.00	7.50	2.95	4.425	0.86	1.161	0.32	0.288	0.08	0.096
		100	0.207	5.15	7.725	3.00	4.50	0.86	1.161	0.33	0.297	0.08	0.0976
	-0.5	34	0.089	12.00	18.00	3.20	4.80	1.12	1.68	0.31	0.3255	0.085	0.0969
		50	0.111	10.00	15.00	3.30	4.95	1.12	1.68	0.30	0.315	0.085	0.0969
		75	0.132	8.60	12.90	3.20	4.80	1.085	1.6275	0.29	0.3016	0.08	0.0936
100		0.139	8.60	12.90	3.37	5.055	1.10	1.65	0.29	0.3016	0.082	0.09594	
4	0	25	0.184	8.50	20.40	2.85	6.84	1.20	2.88	0.29	0.48256	0.10	0.144
5	0	25	0.230	8.50	25.50	2.85	8.55	1.20	3.60	0.29	0.6032	0.10	0.18
6	0	25	0.176	8.50	30.60	2.85	10.26	1.20	4.32	0.29	0.72384	0.10	0.216
8	0	25	0.368	8.50	40.80	2.85	13.68	1.20	5.76	0.29	0.96512	0.10	0.288

为此,我们假定齿轮体的角位移沿圆周是线性分布的,求加载点相对于邻齿对称中线的位移。部分结果附于文后,加载点相对于受拉边和受压边的法向位移分别用 N_L 和 N_Y 表示,并分平面应力和平面应变问题分别列出。

由这些计算结果可以得出以下几点结论

(1) 轮齿的挠度即所求啮合点的位移与啮合点的位置关系最大,随着啮合点向齿顶移动而变大。这说明轮齿的“弯曲变形”是主要的。见图 6。

(2) 轮齿啮合点的位移与相啮合的齿轮齿数有关,这说明了施力者的曲率半径对轮齿的变形是有影响的,最大可达总变形的 10% 以上,因此也是不可忽视的。见图 6 及图 7。

(3) 齿轮啮合点的位移与本身的齿数、变位系数有关。这是由于形状不同了,整个轮齿的刚性也不同。随着齿数和变位系数的增加,位移减少。见图 8。但当对面齿数确定以后,和本齿轮特定点相啮合的对面齿轮啮合点的位置不同,施力者的曲率半径不同。当本齿轮齿数增加时,对面齿轮啮合点向齿根移动,啮合点处曲率半径变小,当“弯曲变形”变化不大时,“接触变形”的影响显现出来了,使位移略有增加。

(4) 当高度系数相同时,轮齿啮合点的位移随模数的增加略有减少。见图 9。这说明以往的“刚度系数与模数无关”的结论是可行的。

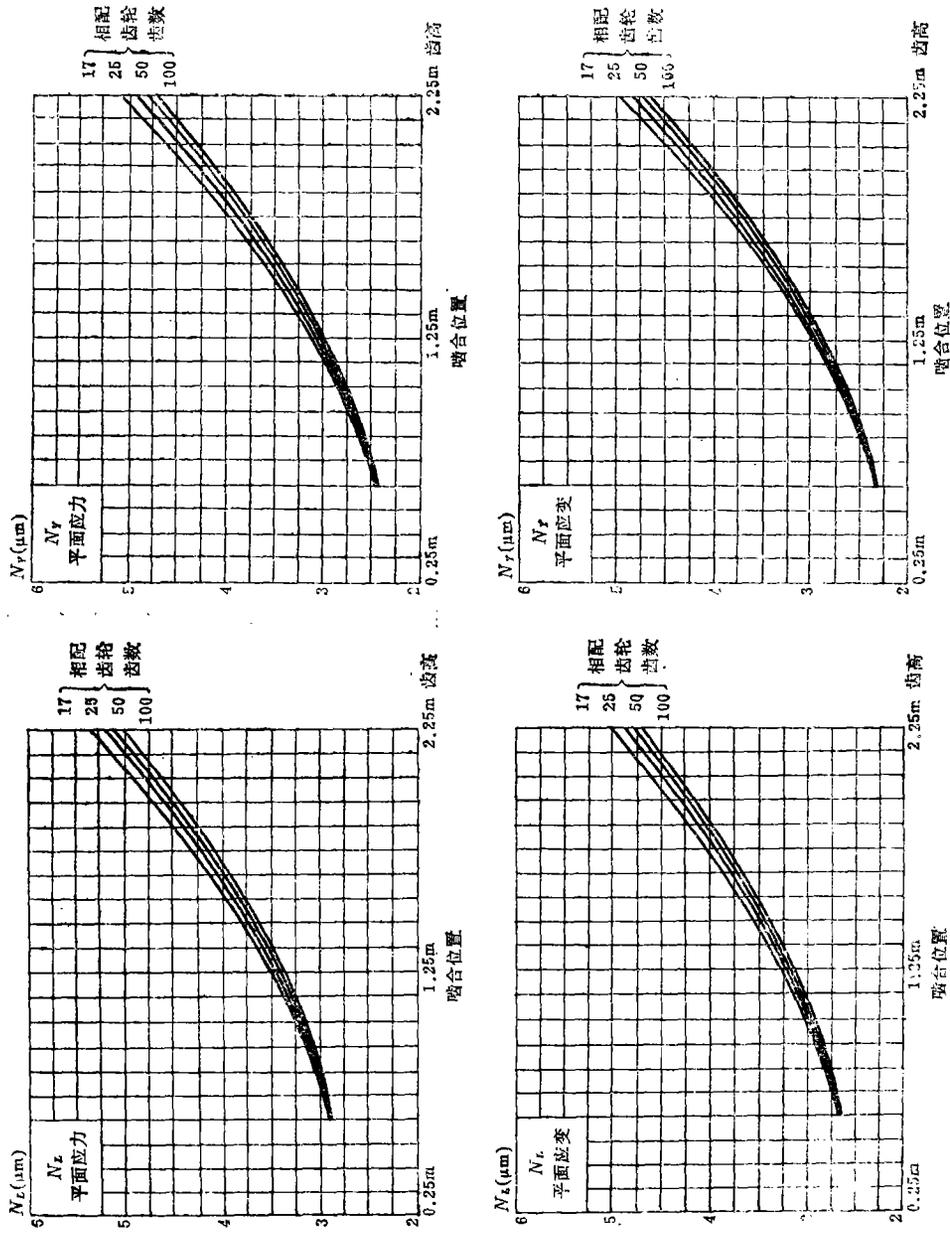


图 6 $Z=25, m=2.5, \xi=0, P=10\text{kg/mm}$, 法向位移和啮合位置的关系

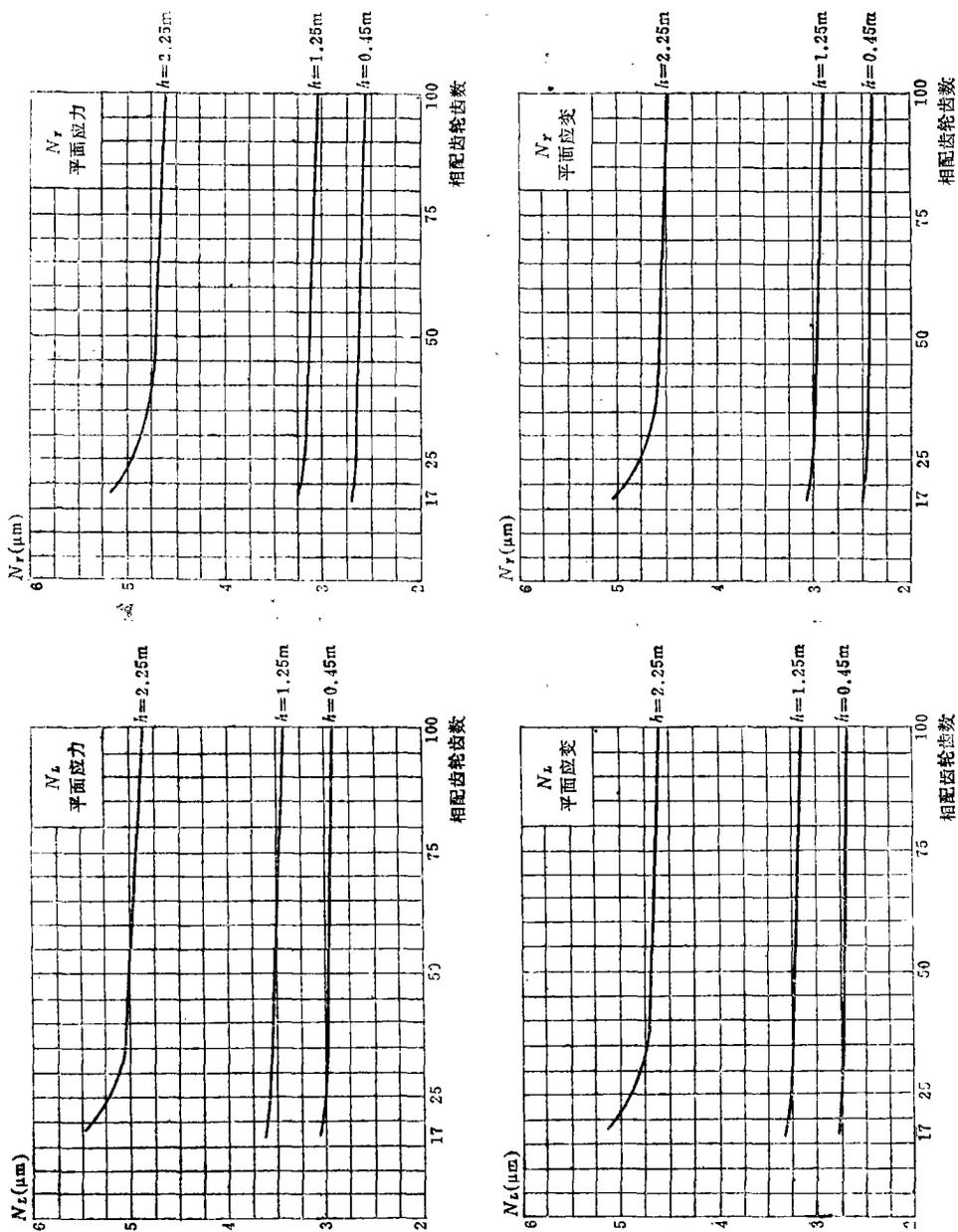


图7 $Z=100, m=2.5, \xi=0, P=10\text{kg/mm}$, 法向位移和相配齿数齿数的关系

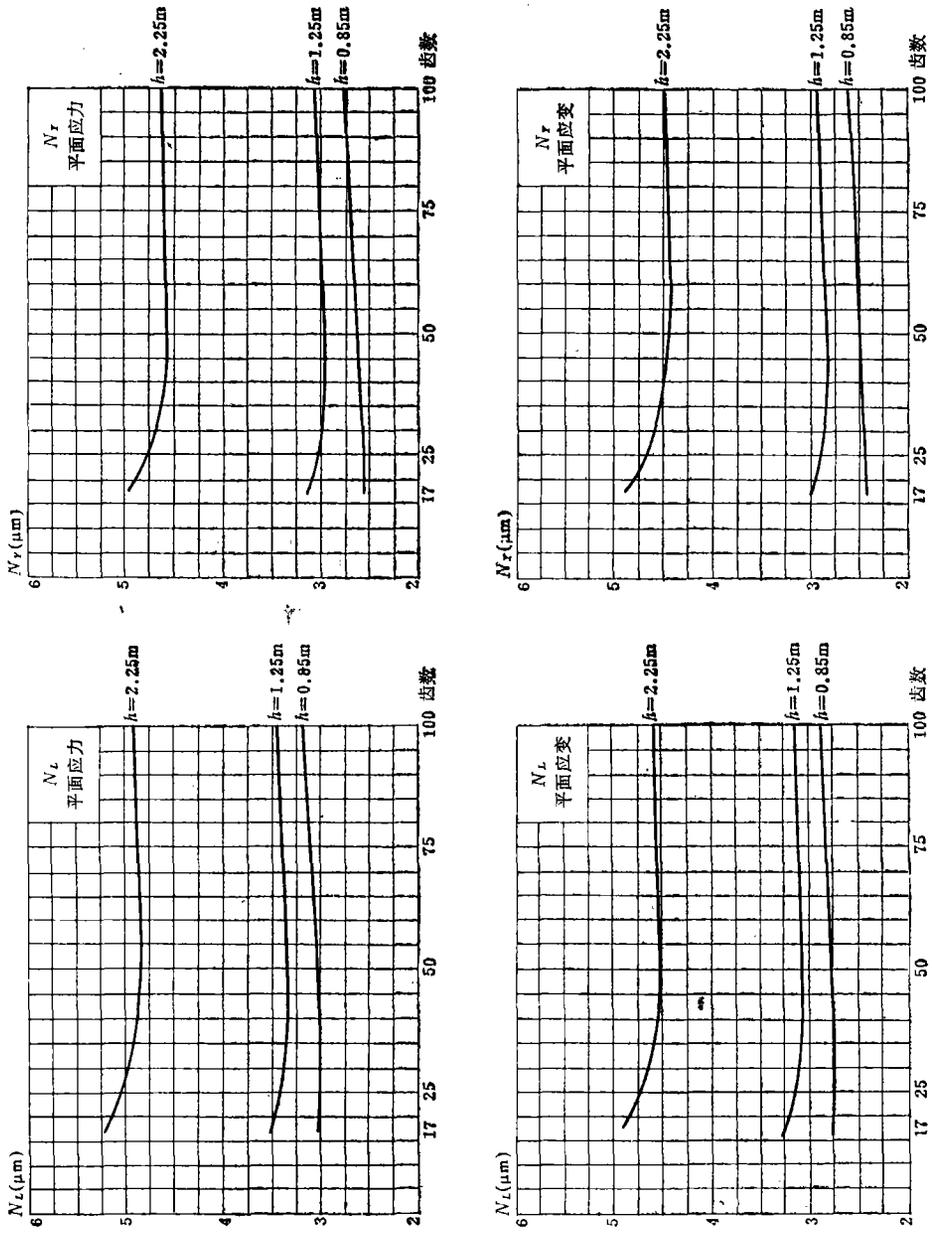


图 8 $m=2.5$, $\xi=0$, $P=10\text{kg/mm}$, 相配齿数为 100, 法向位移与齿数的关系

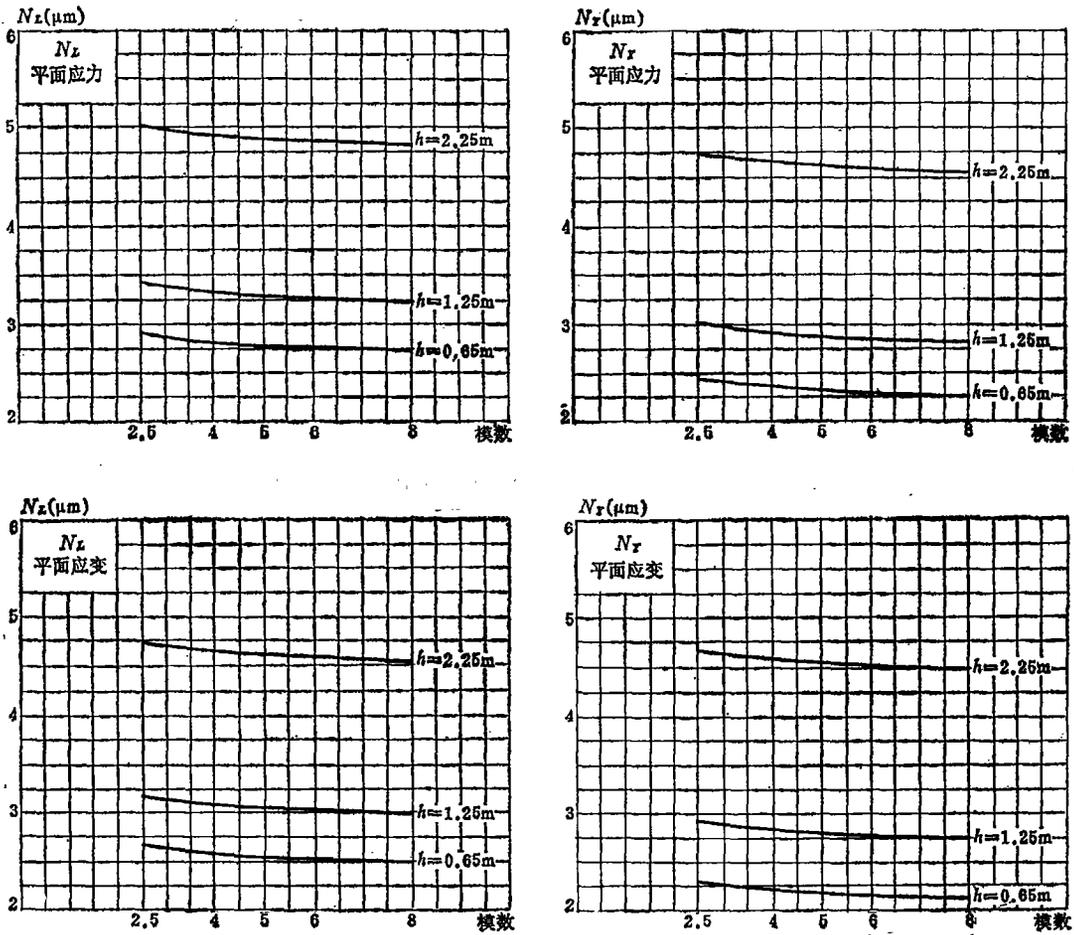


图9 $Z=25$, $\xi=0$, $P=10\text{kg/mm}$, 相配齿数为100, 法向位移和模数的关系

参 考 文 献

- [1] Мускелишвили Н. И., 《数学弹性力学的几个基本问题》, 科学出版社(1958).
- [2] 钱伟长、叶开沅, 《弹性力学》, 科学出版社(1956).
- [3] 徐芝伦, 《弹性力学》, 人民教育出版社(1979).
- [4] 会田俊夫、寺内喜男, 《日本機械学会论文集》, 27—187 (昭36-6), 853.
- [5] 寺内喜男、永村和照, 《日本機械学会论文集》, 46—402(昭55-2), 160及46-406(昭55-6), 649.
- [6] 平野富士英, 《日本機械学会论文集》, 17-61 (昭26), 12.

**Pinpoint Calculation of Tooth Deflection on Spur Gear by
Means of the Method of Complex Variables
in Plane Elasticity**

Cheng Nai-shi Liu Wen

(Northeast Institute of Technology, Shenyang)

Abstract

This paper has incorporated and developed the method founded by AIDA, TERAUCHI, and NAGAMUYA, to which a high value is set presently at home and abroad, in which the stress and deflection of tooth on spur gears are calculated by means of the method of complex variables in plane elasticity. In this paper, their approximate solution was developed to become exact solution. The accuracy of the mapping shape of tooth was increased. It mentioned that the mapping function was expressed by five fractional terms, with the mapping error being less than 1‰. A calculating principle was proposed to find out the displacement of contact point in relation to central line of the adjacent tooth affecting the quality of mesh of gears directly. The computer program was made, and according to the computed results, the figures were given so that the displacement of the contact point in the normal direction can be calculated conveniently for engineering calculation.