应用数学和力学，第4卷第4期（1983年7月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

流体层流运动稳定性中的Ляпунов方法

周 恒　李 骊

（天津大学，1982年7月25日收到）

摘　要

本文是[1]的继续、在本文中，利用[1]的结果我们证明了，对于流体的层流运动稳定性而言，在线性化问题中，按特征值定义与按扰动能量定义二者是完全等价的．从外，借助于Ляпунов方法，我们又证明了，如果线性化问题是渐近稳定的，当考虑非线性影响时，只要扰动能量足够小，则仍然是渐近稳定的．

在文[1]中，周恒研究了Ляпунов关于线性常系数微分方程组解的稳定性理论中的一些定理的推广，提出了用扰动的二次泛函作为Ляпунов泛函以判断稳定性，并且研究了此一Ляпунов泛函的存在问题．在[2]中周恒和李骊进一步研究了Orr-Sommerfeld方程的特征值问题，并得到了展开定理的新的结果．利用上述这些结果，我们将在本文中证明，在线性化的问题中，按特征值定义稳定性与按扰动能量定义稳定性是完全等价的．并且又证明，线性化问题如果是渐近稳定的，则当考虑非线性影响时，只要初始扰动能量足够小，则仍然是渐近稳定的，从而按一次近似研究稳定性是完全合理的．

一、问题的概述

为确定起见，我们研究两平行平板间不可压缩流体平面层流的稳定性问题．适当无量纲化后，可设两平板的位置分别在$y=\pm1$处，x轴与未扰动运动方向一致．未扰动运动的速度分布由$\bar{u}(y)$确定，为已知函数．用u，v表示扰动速度分量，ψ为扰动流函数，它们都是x，y，t的函数，且

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=u,\quad \frac{\partial\psi}{\partial x}=-v \tag{1.1}$$

于是ψ满足下列方程

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\psi)+\bar{u}\frac{\partial(\Delta\psi)}{\partial x}-\bar{u}''\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{1}{R}\Delta\Delta\psi+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial(\Delta\psi)}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial(\Delta\psi)}{\partial y}=0 \tag{1.2}$$

其中R是雷诺数，$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$是Laplace算子，$\bar{u}''=\frac{d^2\bar{u}}{dy^2}$．

ψ满足边界条件$\psi(\pm1)=\left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_{y=\pm1}=0$．

方程(1.2)是非线性的．一般可设 ψ 为 x 的周期函数，于是它可展为 Fourier 级数

$$\psi(x,y,t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\psi_k(y,\ t)e^{i\alpha kx} \tag{1.3}$$

其中 α 为基本扰动波数．如果在（1.2）中略去非线性项，将（1.3）代入，则得到 ψ_k 应满足的方程$\left(令\ A_k=-(k\alpha)^2\psi_k+\frac{\partial^2\psi_k}{\partial y^2}\right)$

$$\frac{\partial A_k}{\partial t}+ik\alpha\bar{u}A_k-\bar{u}''ik\alpha\psi_k=-\frac{(k\alpha)^2}{R}A_k+\frac{1}{R}\frac{\partial^2 A_k}{\partial y^2} \tag{1.4}$$

ψ_k 应满足的边界条件为

$$y=\pm1\ 时\qquad \psi_k=\frac{\partial\psi_k}{\partial y}=0 \tag{1.5}$$

如果再设 $\psi_k=\varphi_k(y)e^{-ik\alpha c_k t}$ 则得到 φ_k 所应满足的方程，即所谓的 Orr-Sommerfeld 方程

$$(D^2-k^2\alpha^2)\varphi_k=ik\alpha R[(\bar{u}-c_k)(D^2-k^2\alpha^2)\varphi_k-(D^2\bar{u})\varphi_k] \tag{1.6}$$

其中 $D=\frac{d}{dy}$，c_k 是待定的特征值，φ_k 满足的边界条件是

$$y=\pm1时\qquad \varphi_k=\frac{\partial\varphi_k}{\partial y}=0 \tag{1.7}$$

一般研究稳定性问题有两种方法．其一是研究 Orr-Sommerfeld方程（1.6)在条件(1.7)下的特征值问题，由特征值 c_k 的虚部以判断其稳定性．另一是研究扰动能量

$$T=\frac{1}{2}\iint(u^2+v^2)dxdy=-\frac{1}{2}\iint\psi\Delta\psi dxdy \tag{1.8}$$

随时间的变化率．如果 T 单调下降，就是稳定的；反之，则不能决定稳定与否．(公式(1.8)中 y 自 -1 积分到 $+1$，x 积分区间为周期扰动的基本波长)．这些研究方法存在着几个问题：(1) 方程 (1.6) 是线性化了的方程，由线性化方程判断的稳定性是否能真实地反映实际的运动，即考虑到非线性项时，它是否仍然稳定；(2) 公式(1.8)没有经过线性化，因此其结果也能说明非线性情形的稳定性，但所给的往往是稳定的过分苛刻的充分条件；(3)按特征值定义稳定性与按能量定义稳定性是否等价．我们在本文中利用[1]中提到的 Ляпунов 泛函解决了第（1）个问题，利用[2]中的结果解决了第(3)个问题．对于第（2）个问题则还未能有所改进．

二、线性化情形中运动稳定性的定义

在本节中，为叙述方便起见，我们针对 $k=1$ 的情形来加以说明．由于此时我们对基本扰动波数 α 未加任何限制，所以这样作并不失去一般性．如此，在公式(1.6)中 c_k，φ_k 等所带之附标就都不写了，于是它成为

$$(D^2-k^2\alpha^2)^2\varphi=i\alpha R[(\bar{u}-c)(D^2-\alpha^2)\varphi-(D^2\bar{u})\varphi] \tag{2.1}$$

$$当\ y=\pm1\ 时\qquad \varphi=\frac{d\varphi}{dy}=0 \tag{2.2}$$

用 φ_1，φ_2，……表示(2.1)的特征函数，c_1，c_2，……表示对应的特征值．则任给一满足

边界条件 (2.2) 的四阶可微函数 $F(y)$，都可展为 φ_1，φ_2，…… 的级数

$$F(y)=\sum_{j=1}^{\infty}a_j\varphi_j \tag{2.3}$$

(2.1)的关联 (adjoint) 方程为[4]

$$(D^2-k^2\alpha^2)^2G(y)=-i\alpha R[(D^2-\alpha^2)(\bar{u}-\beta)G(y)-(D^2\bar{u})G(y)] \tag{2.4}$$

其关联的边界条件为

$$y=\pm1\text{时}\qquad G=\frac{dG}{dy}=0 \tag{2.5}$$

这一特征值问题的特征值集合 β_1、β_2，……与 c_1、c_2，……互为共轭复数，即

$$\beta_j=c_j^*$$

若其特征函数为 G_1，G_2，……，则 G_j 与 φ_j 满足双正交条件．即

$$\int_{-1}^{1}G_j^*(\alpha^2\varphi_j-\varphi_j'')dy=\int_{-1}^{1}\varphi_i(\alpha^2G_j^*-G_i^{*\prime\prime})dy=\delta_{ij} \tag{2.6}$$

而且 $F(y)$ 也可展为 G_j 的级数

$$F(y)=\sum_{j=1}^{\infty}b_jG_j \tag{2.7}$$

(2.3)中的 a_j 与(2.7)中的 b_j 都不难利用双正交条件 (2.6) 算出。

在[2]中证明了(2.3)与(2.7)不但是绝对一致收敛、而且其展式的系数还满足关系式

$$\frac{1}{M}\|F\|^2\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|^2\leqslant\frac{1}{m}\|F\|^2 \tag{2.8}$$

$$m\|F\|^2\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}|b_j|^2\leqslant M\|F\|^2$$

其中 m，M 为某两个正数，与 α 有关，而

$$\|F\|^2=\int_{-1}^{1}F^*(\alpha^2F-F'')dy \tag{2.9}$$

现在我们来研究 (1.3) 展式中的一项 $\psi_1(y,t)$，它代表扰动的一个谐分量．它作为(1.6)的解应满足边界条件 (1.7)，并且应为四阶可微．因此，在 $t=0$ 时它可展为 φ_j 的级数

$$\psi_1(y,0)=\sum_{j=1}^{\infty}h_j\varphi_j$$

易见，如果只考虑线性化的情形，则 $\psi_1(y,t)$ 对 φ_j 的展式将为

$$\psi_1(y,t)=\sum_{j=1}^{\infty}h_je^{-i\alpha c_jt}\varphi_j \tag{2.10}$$

且

$$\frac{1}{M}\|\psi_1\|^2\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}|h_je^{-i\alpha c_jt}|^2\leqslant\frac{1}{m}\|\psi_1\|^2 \tag{2.11}$$

现在我们来研究$\|\psi_1\|^2$的意义。由定义

$$\|\psi_1\|^2=\int_{-1}^{1}\psi_1^*(\alpha^2\psi_1-\psi_1'')dy=\int_{-1}^{1}(\alpha^2|\psi_1|^2+|\psi_1'|^2)dy$$

另一方面，对应于这一谐分量的扰动能量等于

$$T_1=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi/\alpha}\int_{-1}^{1}(u_1^2+v_1^2)dxdy$$

又

$$u_1=\frac{\partial}{\partial y}(\psi_1e^{i\alpha x}+\psi_1^*e^{-i\alpha x})=\frac{\partial\psi_1}{\partial y}e^{i\alpha x}+\frac{\partial\psi_1^*}{\partial y}e^{-i\alpha x}$$

$$v_1=-\frac{\partial}{\partial x}(\psi_1e^{i\alpha x}+\psi_1^*e^{-i\alpha x})=-i\alpha(\psi_1e^{i\alpha x}-\psi_1^*e^{-i\alpha x})$$

将它们代入上式，即得

$$T_1=\frac{2\pi}{\alpha}\int_{-1}^{1}(\alpha^2|\psi_1|^2+|\psi_1'|^2)dy=\frac{2\pi}{\alpha}\|\psi_1\|^2 \tag{2.12}$$

由 (2.11) 与 (2.12) 可以见到，如果一切特征值 c_j 的虚部都小于零，则$\sum\limits_{j=1}^{\infty}|h_je^{-i\alpha c_jt}|^2$将单调下降而趋于零，这时必然有$\|\psi_1\|^2\to0$，即$T_1\to0$。反之，若$T_1\to0$，则$\sum\limits_{j=1}^{\infty}|h_je^{-i\alpha c_jt}|^2$必也趋于零，于是 c_j 的虚部一定都小于零。

由此可见，在线性化的情形中，按特征值定义的稳定性，与按扰动能量定义的稳定性是完全等价的。

在非线性的情形中，按特征值定义稳定性已没有意义，但按扰动能量来定义稳定性还是有意义的。

三、平行流稳定性理论中线性化方法的理论根据

下面我们来证明，在按扰动能量来定义运动稳定性时，如果对某一周期性扰动$\psi(x,y,t)$来说，它的各次谐分量的 Orr-Sommerfeld 方程的特征值的虚部都小于零，即按一次近似来说，运动是渐近稳定的，则在初始扰动能量足够小时，考虑了非线性项，运动仍然是渐近稳定的。

为此，我们引用[1]中的结果，即引入扰动的二次泛函。我们可以引入特殊形式的泛函$U(\xi,\eta,p,q)$

$$U=\iiiint\sum_{k=-N}^{N}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-ik\alpha p}e^{ik\alpha q}\frac{G_{kn}^*(\xi)G_{kn}(\eta)}{-ik\alpha(c_{kn}-c_{kn}^*)}\Delta\psi(p,\xi,t)\Delta\psi(q,\eta,t)\,dp\,dq\,d\xi\,d\eta \tag{3.1}$$

其中 G_{kn} 为对应第 k 个谐分量的 Orr-Sommerfeld 特征值问题的关联问题中的第 n 个特征函数，c_{kn} 为对应的特征值，“*”号表示共轭复数。上式中 p，q 的积分限由 0 到$\frac{2\pi}{\alpha}$；ξ，η 的积分限为由 -1 到 $+1$。根据假定，$\operatorname{Im}c_{kn}<0$，故 (3.1) 的分母是负的实数，且有不等于零

的上界。(3.1) 中的 N 值将在下面确定。

由[2]中的结果（那里研究了φ的特征值问题，其结果对于G也是对的），可知当 $n\to\infty$ 时，有

$$G_{kn}=O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{3.2}$$

$$|\mathrm{Im}\,c_{kn}|=O(n^2) \tag{3.3}$$

因此，(3.1)中的核是绝对且一致收敛的。

容易验算，若

$$\psi_k=\sum_{n=1}^{\infty}a_{kn}\varphi_{kn} \tag{3.4}$$

其中 φ_{kn} 是第 k 个谐分量的 Orr-Sommerfeld 特征值问题的特征函数，则

$$U=\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^2\sum_{k=-N}^{N}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_{kn}|^2}{-ik\alpha(c_{kn}-c_{kn}^*)} \tag{3.5}$$

如果仅仅利用线性化的方程，把U 对时间 t 求导数，则易得

$$\frac{dU}{dt}=\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^2\sum_{k=-N}^{N}\sum_{n=1}^{\infty}|a_{kn}|^2 \tag{3.6}$$

这是因为在[1]中已证明了当利用 (1.4) 时，有

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-1}^{1}G_{kn}^*(\xi)A_k(\xi,t)d\xi=-i\alpha c_{kn}\int_{-1}^{1}G_{kn}^*(\xi)A_k(\xi,t)d\xi=i\alpha c_{kn}a_{kn}$$

现在我们考虑非线性项的影响，即利用 (1.2) 式对 U 求导数，这时可得

$$\frac{dU}{dt}=\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^2\sum_{k=-N}^{N}\sum_{n=1}^{\infty}|a_{kn}|^2+H \tag{3.7}$$

其中

$$H=\iiiint\sum_{k=-N}^{N}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-ik\alpha p}e^{-ik\alpha q}\frac{G_{kn}^*(\xi)G_{kn}(\eta)}{-ik\alpha(c_{kn}-c_{kn}^*)}$$

$$\cdot\left\{\Delta\psi(p,\xi,t)\left[\frac{\partial\psi}{\partial q}\frac{\partial(\Delta\psi)}{\partial\eta}-\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial(\Delta\psi)}{\partial q}\right]+\Delta\psi(q,\eta,t)\right.$$

$$\left.\cdot\left[\frac{\partial\psi}{\partial p}\frac{\partial(\Delta\psi)}{\partial\xi}-\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial(\Delta\psi)}{\partial p}\right]\right\}dp\,dq\,d\xi\,d\eta$$

其中第一个方括号中的 $\psi=\psi(q,\eta,t)$，而第二个方括号中的 $\psi=\psi(p,\xi,t)$。

令 H_1 表示 H 中的第一项，即

$$H_1=\iiiint\sum_{k=-N}^{N}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-ik\alpha p}e^{ik\alpha q}\frac{G_{kn}^*(\xi)G_{kn}(\eta)}{-ik\alpha(c_{kn}-c_{kn}^*)}$$

$$\cdot\Delta\psi(p,\xi,t)\left[\frac{\partial\psi}{\partial q}\frac{\partial(\Delta\psi)}{\partial\eta}-\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial(\Delta\psi)}{\partial q}\right]dp\,dq\,d\xi\,d\eta$$

先对 p 和 ξ 积分，利用 (1.3)，(2.6)和(3.4)，可得

$$H_1=\frac{2\pi}{a}\iint\sum_{k=-N}^{N}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{kn}}{-ika(c_{kn}-c_{kn}^*)}G_{kn}(\eta)e^{ikaq}$$

$$\cdot\left[\frac{\partial\psi}{\partial q}\frac{\partial(\Delta\psi)}{\partial\eta}-\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial(\Delta\psi)}{\partial q}\right]dqd\eta$$

利用分部积分，可得

$$H_1=\frac{2\pi}{a}\iint\sum_{k=-N}^{N}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{kn}}{-ika(c_{kn}-c_{kn}^*)}\Big[G'_{kn}(\eta)e^{ikaq}\frac{\partial\psi}{\partial q}\Delta\psi$$

$$-G_{kn}(\eta)e^{ikaq}(ika)\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\Delta\psi\Big]dqd\eta$$

$$=\frac{2\pi}{a}\iint\sum_{k=-N}^{N}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{kn}}{-ika(c_{kn}-c_{kn}^*)}\Big[-\frac{ika}{2}e^{ikaq}G'_{kn}(\eta)\Big(\frac{\partial\psi}{\partial q}\Big)^2$$

$$-G''_{kn}(\eta)e^{ikaq}\frac{\partial\psi}{\partial q}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}+\frac{ika}{2}e^{ikaq}G'_{kn}(\eta)\Big(\frac{\partial\psi}{a\eta}\Big)^2$$

$$+(ika)^2G_{kn}(\eta)e^{ikaq}\frac{\partial\psi}{\partial q}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}-\frac{ika}{2}e^{ikaq}\Big(\frac{\partial\psi}{\partial q}\Big)^2$$

$$+\frac{ika}{2}e^{ikaq}G'_{kn}(\eta)\Big(\frac{\partial\psi}{a\eta}\Big)^2\Big]dqd\eta$$

由于 $ak\leqslant aN$，$\left|\frac{\partial\psi}{\partial q}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right|\leqslant\frac{1}{2}\left(\left|\frac{\partial\psi}{\partial q}\right|^2+\left|\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right|^2\right)$，于是

$$|H_1|\leqslant\frac{2\pi}{a}\iint\sum_{k=-N}^{N}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_{kn}|}{-ika(c_{kn}-c_{kn}^*)}\times3[\max(a^2N^2,\ 1)]$$

$$\cdot\max[|G_{kn}|,\ |G'_{kn}|,\ |G''_{kn}|]\times\Big[\Big(\frac{\partial\psi}{\partial q}\Big)^2+\Big(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\Big)^2\Big]dqd\eta$$

$$\leqslant\frac{2\pi}{a}\times3\times\max[a^2N^2,\ 1]\times\Big[\sum_{k=-N}^{N}\sum_{n=1}^{\infty}|a_{kn}|^2\Big]^{1/2}$$

$$\Big\{\sum_{k=-N}^{N}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\max[|G_{kn}|,\ |G'_{kn}|,\ |G''_{kn}|]^2}{[-ika(c_{kn}-c_{kn}^*)]^2}\Big\}^{1/2}$$

$$\iint\Big[\Big(\frac{\partial\psi}{\partial q}\Big)^2+\Big(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\Big)^2\Big]dqd\eta$$

由[2]可知，当 $n\to\infty$ 时，$G'_{kn}=O(1)$，$G''_{kn}=O(n)$，而 $-ika(c_k-c_{kn}^*)=O(n^2)$，故上式第二个级数收敛，且其值仅与 N 有关，因此最后可得

$$|H_1|\leqslant\frac{m_1}{2}\Big[\sum_{k=-N}^{N}\sum_{n=1}^{\infty}|a_{kn}|^2\Big]^{1/2}T$$

其中 m_1 仅与 N 有关，$T=\frac{1}{2}\iint\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)^2\right]dqd\eta$ 是扰动能量。

对 H 中的第二项也可以得出与上述完全相同的估计。于是最后得

$$|H_1|\leqslant m_1\left[\sum_{k=-N}^{N}\sum_{n=1}^{\infty}|a_{kn}|^2\right]^{1/2}T$$

将上式代入(3.7)，可得

$$\frac{dU}{dt}\geqslant\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2\sum_{k=-N}^{N}\sum_{n=1}^{\infty}|a_{kn}|^2-m_1\left[\sum_{k=-N}^{N}\sum_{n=1}^{\infty}|a_{kn}|^2\right]^{1/2}T \tag{3.8}$$

另一方面，我们有[3]

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\int_0^{2\pi/a}\int_{-1}^{1}\frac{d\bar{u}}{dy}uvdxdy-\frac{1}{R}\int_0^{2\pi/a}\int_{-1}^{1}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2dxdy \tag{3.9}$$

而

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\psi_k'e^{ikax},\quad v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\sum_{k=-\infty}^{\infty}ika\psi_ke^{ikax}$$

于是

$$\int_0^{2\pi/a}\int_{-1}^{1}\frac{d\bar{u}}{dy}uvdxdy=\frac{2\pi}{a}\sum_{k=1}^{\infty}ika\int_{-1}^{1}\frac{du}{dy}(\psi_k'\psi_k^*-\psi_k\psi_k^{*\prime})dy$$

因而

$$\left|\int_0^{2\pi/a}\int_{-1}^{1}\frac{d\bar{u}}{dy}uvdxdy\right|\leqslant\frac{2\pi}{a}\max\left|\frac{d\bar{u}}{dy}\right|\sum_{k=1}^{\infty}ka\int_{-1}^{1}(|\psi_k|^2+|\psi_k'|^2)dy \tag{3.10}$$

此外

$$\int_0^{2\pi/a}\int_{-1}^{1}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2dxdy=\frac{2\pi}{a}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-1}^{1}[(ka)^4|\psi_k|^2+2(ka)^2|\psi_k'|^2$$
$$+|\psi_k''|^2]dy \tag{3.11}$$

注意

$$T=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi/a}\int_{-1}^{1}\psi\Delta\psi dxdy=\frac{\pi}{a}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-1}^{1}[(ka)^2|\psi_k|^2+|\psi_k'|^2]dy$$

令

$$T_k=\frac{\pi}{a}\int_{-1}^{1}[(ka)^2|\psi_k|^2+|\psi_k'|^2]dy\qquad(k=1,\ 2,\ \cdots)$$

则

$$T=T_0+\sum_{k=1}^{\infty}T_k \tag{3.12}$$

其中

$$T_0=\frac{2\pi}{\alpha}\int_{-1}^{1}|\psi_k'|^2dy$$

把(3.10)，(3.11)代入(3.9)，可得

$$\frac{\partial T}{\partial t}\leqslant\frac{2\pi}{\alpha}\max\left|\frac{d\bar{u}}{dy}\right|\sum_{k=1}^{\infty}k\alpha\int_{-1}^{1}[|\psi_k|^2+|\psi_k'|^2]dy-\frac{2}{R}\Big(T_0+\sum_{k=1}^{\infty}(k\alpha)^2T_k$$

$$+\frac{\pi}{\alpha}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-1}^{1}|\psi_k''|dy\Big)$$

选择一整数 $N>0$，使得当 $k>N$ 时有 $k\alpha>\max\Big(2R\max\left|\frac{d\bar{u}}{dy}\right|,\ 2R,\ 1\Big)$，如此，则

$$\frac{2\pi}{\alpha}\max\left|\frac{d\bar{u}}{dy}\right|k\alpha\int_{-1}^{1}[|\psi_k|^2+|\psi_k'|^2]dy<\frac{1}{R}k^2\alpha^2T_k$$

故上式可进一步写成

$$\frac{\partial T}{\partial t}<\frac{2\pi}{\alpha}\max\left|\frac{d\bar{u}}{dy}\right|k\alpha\sum_{k=1}^{N}\int_{-1}^{1}[|\psi_k|^2+|\psi_k'|^2]dy-\frac{1}{R}N^2\alpha^2\sum_{k=N+1}^{\infty}T_k-\frac{2}{R}T_0$$

$$<m_2\sum_{k=1}^{N}T_k-m_3\sum_{k=N+1}^{\infty}T_k-\frac{2}{R}T_0 \tag{3.13}$$

其中

$$m_2=2\max\left|\frac{d\bar{u}}{dy}\right|N\alpha\cdot\max\left[\frac{1}{\alpha^2},\ 1\right],\quad m_3=\frac{1}{R}N^2\alpha^2$$

现在，我们作 Ляпунов 泛函

$$V=-\varkappa U+T$$

其中 $\varkappa>0$，其值在以下定出，于是 V 是定正的，且 $V>T$。但是由 U 的定义和 (2.8)，(2.12)，(3.12)式，又知存在一正数 $m_4>0$（仅与 α，N 有关），使

$$|U|<m_4T$$

因此

$$T<V<(1+\varkappa m_4)T=m_5T,\quad m_5=1+\varkappa m_4 \tag{3.14}$$

由(3.8)与(3.13)，又有

$$\frac{dV}{dt}\leqslant-\varkappa\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^2\sum_{k=-N}^{N}\sum_{n=1}^{\infty}|a_{kn}|^2-m_3\sum_{k=N+1}^{\infty}T_k-\frac{2}{R}T_0$$

$$+\varkappa m_1\left[\sum_{k=-N}^{N}\sum_{n=1}^{\infty}|a_{kn}|^2\right]^{1/2}T+m_2\sum_{k=1}^{N}T_k$$

仍然是根据 (2.8)，知存在正数 m_6，m_7（它们仅与 α，N 有关），使得

$$m_6\sum_{k=1}^{N}T_k\leqslant\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^2\sum_{k=-N}^{N}\sum_{n=1}^{\infty}|a_{kn}|^2\leqslant m_7\sum_{k=1}^{N}T_k$$

故若选择 $\varkappa$ 使 $\varkappa m_6>2m_2$，则

$$\frac{dV}{dt}\leqslant -m_2\sum_{k=1}^{N}T_k-m_3\sum_{k=N+1}^{\infty}T_k-\frac{2}{R}T_0+\varkappa m_1\Big[\sum_{k=-N}^{N}\sum_{n=1}^{\infty}|a_{kn}|^2\Big]^{1/2}T$$

若令 $M_1=\min\left(m_2,\ m_3,\ \frac{1}{R}\right)$，$M_2=\varkappa m_1 m_7$，则

$$\frac{dV}{dt}\leqslant -M_1T+M_2T^{3/2}=-M_1\Big(1-\frac{M_2}{M_1}T^{1/2}\Big)T \tag{3.15}$$

其中的 M_1，M_2 只与 α，N 有关．但 N 又完全取决于 α，故它们仅与 α 有关．

现在我们来证明，只要初始扰动能量足够小，则当时间 $t\to\infty$ 时，它必趋于零，因而运动是渐近稳定的．

事实上，由(3.15)可得

$$V\leqslant V_0-\int_0^t M_1\Big(1-\frac{M_2}{M_1}T^{1/2}\Big)Tdt$$

而由 (3.14) 得 $T^0<m_6V_0$，其中 $T^0=T(0)$，从而

$$V<m_6T^0-\int_0^t M_1\Big(1-\frac{M_2}{M_1}T^{1/2}\Big)Tdt \tag{3.16}$$

另一方面，由 (3.9) 可知

$$\frac{\partial T}{\partial t}<\left|\int_0^{2\pi/\alpha}\int_{-1}^{1}\frac{d\bar u}{dy}uvdxdy\right|$$

因此，利用 $|uv|\leqslant\frac{1}{2}(u^2+v^2)$，易得

$$\frac{\partial T}{\partial t}<\gamma T$$

其中 $\gamma=\frac{1}{2}\max\left|\frac{d\bar u}{dy}\right|$，因此

$$T<T^0e^{\gamma t} \tag{3.17}$$

现选一数 t_0，使得

$$\frac{1}{2}M_1T^0t_0=m_6T^0\quad 即\quad t_0=\frac{2m_6}{M_1}$$

则当初始扰动

$$T^0<\Big(\frac{1}{2}\frac{M_1}{M_2}\Big)^2e^{-\gamma t_0}=\Big(\frac{1}{2}\frac{M_1}{M_2}\Big)^2e^{-\gamma\frac{2m_6}{M_1}} \tag{3.18}$$

运动必然是渐近稳定的．

这是因为，在满足 (3.18) 的条件下，当 $t<t_0$ 时有 $\frac{M_2}{M_1}T^{1/2}<\frac{1}{2}$．因而如果自运动开始 T 就增加，则在上述条件下，有

$$\int_0^{t_0}M_1\Big(1-\frac{M_2}{M_1}T^{1/2}\Big)Tdt>m_6T^0$$

于是将有 $V<0$，但这是不可能的．因此 T 不能一直增加．不但如此，且 $\frac{M_2}{M_1}T^{1/2}<\frac{1}{2}$ 一定永

远成立．因为，T 自 T^0 增加到使这一条件破坏所需之时间显然是大于 t_0 的，而在此过程中 $T>T^0$ 的时间不会小于 t_0，但在这一段时间内，根据 (3.16)，V 已变为负值，这是不可能的．据此，证实了上述的论断．

但在 $\frac{M_2}{M_1}T^{1/2}<\frac{1}{2}$ 的条件下，由(3.16)，有

$$V<m_5T^0-\frac{1}{2}\int_0^t M_1Tdt$$

因此，如果 T 不趋于零，则 V 也将变为小于零，如上所述，这是不可能的，因此，必然有

$$\lim_{t\to\infty} T=0$$

这就是所要证明的．

用同样的方法可以证明，如果 Orr-Sommerfeld 方程的特征值有虚部大于零的，但没有等于零的，则在考虑了非线性项后，它也不能是稳定的．因为这时可以选择 κ，使得 V 不再是定正的，但其导数在扰动能量足够小时却仍然是定负的．这样就可以证明在一定的初始扰动下（使 V 取负值），即使初始扰动很小，但能量至少增至一定之值，即运动不能是稳定的．

参 考 文 献

[1] 周恒，Ляпунов关于运动稳定性的某些定理在连续介质力学中的推广，力学学报，8，1(1956).

[2] 周恒，李骊，Orr-Sommerfeld 方程的特征值问题及展开定理，应用数学和力学，2，3(1981).

[3] Lin, C. C., *Theory of Hydrodynamic Stability*. Cambridge, (1955).

[4] Наймарк, М. А., *Линейные Дифференциальные Операторы*, Гиттл, Москва, (1954).

On Liapounoff's Method in the Theory of Stability of Laminar Fluid Flows

Zhou Heng Li Li

(*Tianjin University, Tianjin*)

Abstract

In [1], Zhou extended some Liapounoff's theorems of the theory of stability in the case of plane laminar fluid flows. In [2], Zhou and Li investigated the eigenvalue problem and expansion theorems associated with Orr-Sommerfeld equation, and obtained some new results. In this paper, based on the results of [1] and [2], we shall prove: (1) For the linearized problem the definition of stability according to the eigenvalues of Orr-Sommerfeld equation and that according to the perturbation energy are equivalent to each other; (2) The method of linearization is admissible for the stability problem of plane laminar fluid flows for sufficiently small initial disturbance.