

非线性振动系统周期解的数值分析*

凌复华

(上海交通大学工程力学系, 1982年7月28日收到)

摘 要

用直接数值积分法求非线性振动系统的周期解, 求解时对初始条件进行迭代, 使它与终点条件相一致. 积分时间区间(即周期)或运动方程中的某些参数, 也可在迭代过程中随同变化, 积分方法是变步长的.

用这种“打靶”法求周期解, 所需计算工作量相对较少. 其中误差主要来源于数值积分, 故不难估计并控制它足够小. 这种方法可处理各种类型的振动问题, 如单自由度和多自由度系统的自由无阻尼振动、强迫振动、自激振动和参数振动等等; 也能求得不稳定解和那些对参数变动十分敏感的解. 解的稳定性根据相关的周期系数微分方程来研究. 求共振曲线或其他振动特性曲线时, 利用插值方法并自动调节步长来定出迭代始值.

为了阐明这种方法的通用性, 计算了若干例子. 非线性的描述可用解析函数或任何其他形式, 例如分段线性函数. 文中还就所得周期解指出了非线性振动的一些值得注意的性质. 部分计算结果与已有的近似解或实验结果作了比较.

一、引 言

通过直接数值积分求解非线性振动系统虽是很自然的途径, 但其实际应用仅在电子计算机广泛地用于科学研究以后才有意义. 因而在六十年代以前的有关非线性振动的文献中, 很少提到数值方法. 近年来, 常用初值问题的直接数值积分来校核各种近似分析方法, 例如见[1—3].

非线性振动系统中周期解的存在性问题是一个很困难的问题, 本文不拟涉足. 好在实际物理系统中往往存在着某种形式的周期解, 因此可以在周期解存在的前提下进行主要包括以下四个部分的数值分析.

- 1) 用打靶法求周期解;
- 2) 对周期解扰动得到变分方程——周期系数线性常微分方程, 作数值研究确定周期解的稳定性;
- 3) 对周期解作 Fourier 分析;
- 4) 求共振曲线或其他振动特性曲线时, 用插值方法并自动调节步长来确定迭代始值.

本文采用的求周期解方案, 源出于Poincaré的后继理论^[4], 即若把周期終了时系统在状态空间中的位置表示为它在周期开始时的位置的一个映射, 则周期解就相当于这个映射的一

* 何友声推荐.

个不动点。这种映射在文献中常被称为点映射，仅对单自由度保守系统和其他一些特殊情况^[6,8]，有可能得到点映射的分析表达式。对于一般情况，往往只能借助于数值方法。Urabe^[7]首先给出了非自治系统周期解的数值求法，它在原则上与本文第二节中所述的相同。但没有详细发展并作实例计算。Urabe^[7-10]也给出了自治系统周期解的数值求法，但他对特定周期 T 的处理方法不甚恰当，因而计算繁复，精度又低。近来，Ruf^[11]用打靶法计算了非自治系统(Duffing方程)的共振曲线。本文根据[12]，把求自治系统和非自治系统的周期解看作常微分方程的边值问题而用打靶法作了统一处理。除了单自由度系统以外，[12]中也计算了有二、三个自由度的系统。

本文研究周期解稳定性的方法源出于Poincaré^[13]和Ляпунов^[14]，又见[15,16]。用数值方法进行这种研究的实例，就作者所知最早为[17]。

以下各节分别介绍上面提到的数值分析的几个方面并给出计算实例及其分析。

二、用打靶法求周期解

求非线性振动系统的周期解可以看作常微分方程两点边值问题：

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(0) - x(T) = 0, \quad x \in R^n, \quad f \in R^n \quad (2.1)$$

其中 T 是振动周期。两点边值问题的求解方法很多，比较有效的是打靶法(例如见[19])，本文采用单点打靶法。

引入参数向量 $s \in R^m$ (一般取 $m=n$ ，但对无阻尼自由振动往往取 $m=n-1$ ，详见后)，以帮助确定适合问题(2.1)的 $x(0)$ ，注意 $x(0)$ 往往不是唯一的。一旦求出足够精确的 $x(0)$ ，就可以通过常微分方程初值问题的直接数值积分求出满足问题(2.1)的周期解。当振动周期 T 已知时(如强迫振动和参数振动)，问题(2.1)的边界固定，这时可简单地选择 $s=x(0)$ 。否则(如自由无阻尼振动和自激振动)，问题(2.1)的边界可变，应选择 T 为参数向量 s 的一个分量。

引入参数向量 s 后，问题(2.1)可以改写成

$$\dot{x} = f(t, x; g(s)), \quad F(s) = x(0; s) - x(T; s) = x_0 - x_T = 0 \quad (2.2)$$

其中向量函数 $g(s)$ (维数任意)描述了微分方程对于参数向量 s 的依赖性。 s 需迭代改进，直到边界条件足够好地满足为止。迭代时采用Newton法：

$$s^{i+1} = s^i - (F'(s^i))^{-1} F(s^i) \quad (2.3)$$

这里上标记迭代次数，而 $F'(s)$ 是向量函数 $F(s)$ 的Jacobi矩阵：

$$F'(s) = [F'_{jk}], \quad F'_{jk} = \frac{\partial F_k}{\partial s_j} \quad (2.4)$$

其中 s_j 是 s 的第 j 个分量， F_k 是 $F(s)$ 的第 k 个分量。当边界固定时有

$$F'(s) = \frac{\partial x_0}{\partial s} - \frac{\partial x_T}{\partial s} \quad (2.5)$$

且显然地，

$$\frac{\partial x_0}{\partial s} = I_n \quad (2.6)$$

其中 I_n 是 n 阶单位矩阵；而 $\partial x_T / \partial s$ 是矩阵微分方程初值问题

$$\left[\frac{\partial x}{\partial s} \right]^* = \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial g}, \quad \frac{\partial x}{\partial s} \Big|_{t=0} = \frac{\partial x_0}{\partial s} \tag{2.7}$$

的解 $\partial x/\partial s$ 当 $t=T$ 时的值.注意 (2.7) 需与初值问题

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(0) = x_0 \tag{2.8}$$

联立求解.对周期 T 待定的可变边界问题,需把 T 看作变量,从而得到

$$F'(s) = \frac{\partial x_0}{\partial s} - \frac{\partial x_T}{\partial s} - \frac{\partial T}{\partial s} \frac{\partial x_T}{\partial T} \tag{2.9}$$

用来代替 (2.5) 式,这里的 $\partial x_T/\partial T$ 显然就是 $(\partial x/\partial t)|_{t=T}$.这时可选择

$$s = [T, x_2(0), x_3(0), \dots]^T \tag{2.10}$$

则代替 (2.6) 式有

$$\frac{\partial x_0}{\partial s} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

在一般情况下,可以通过初值问题的直接数值积分计算 $F(s)$ 和 $F'(s)$.本文采用Runge-Kutta-Fehlberg 变步长单步方法^[19,20](RKF 方法).也还有其他有效的方法,如各种多步长预测-校正方法和外插法等(例如看[18]),其中尤以 Shampine-Gordon 多步长方法^[21]引人注意.

固定边界和自由边界下的迭代过程示如图1.

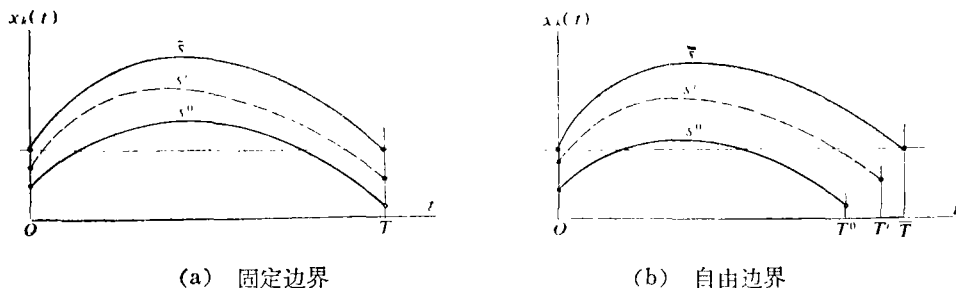


图1 单点打靶法迭代过程

打靶法的收敛性相当好.对初值问题作直接数值积分但不作迭代虽也可求得阻尼系统强迫振动的稳定周期解和自激振动的稳定极限环,但费时要多得多.用打靶法也能求得用其他方法很难求得的无阻尼系统的稳定周期解、各种不稳定周期解以及对参数变动十分敏感的解.仅当迭代初值太差或因周期解极不稳定而使计算值溢出时本法有可能失效,这时可考虑采用多点打靶法(例如看[18]).

几点补充说明:

1. 对自治系统取(2.10)式所示的参数向量 s 时,矩阵微分方程初值问题 (2.7) 的第一行是在零初始条件下求解齐次微分方程,这样得到的当然只有零解.从而可以不经计算写出 Jacobi 矩阵 (2.9) 的第一行为

$$F'_{1j} = -\dot{x}_j(T) \quad (j=1, 2, \dots, n) \tag{2.12}$$

2. 实际计算 s^{i+1} 时, (2.3) 式被改写成以下形式:

$$(F'(s^i))^T (s^{i+1} - s^i) = F(s^i) \tag{2.13}$$

当 s 与 F 的维数相同时, 它是一个线代数方程组. 但对无阻尼自由振动, 有一个初速度为零, 待定的只有 $n-1$ 个未知数. 这时有两种做法, 一是把应为零的初速度作为未知数, 得到的结果可用作校核; 另一是设参数向量 s 有 $n-1$ 个分量, 于是 (2.13) 式成为一个多余方程组, 可用例如最小二乘法解算.

3. Jacobi 矩阵 $F'(s')$ 的形式过于复杂时, 也可用差分矩阵

$$\Delta F(s') = \frac{F(s' + \Delta s') - F(s')}{\Delta s'} \quad (2.14)$$

近似替代它. 这时需适当选择 $\Delta s'$, 因过大的 $\Delta s'$ 会影响精度, 而太小的 $\Delta s'$ 又会造成大数相减而同样降低精度.

最后以 Duffing 方程为例来说明选用不同参数向量时需用的数学公式. Duffing 方程

$$\ddot{x} + 2D\dot{x} + x + \alpha x^3 = P \cos \Omega t \quad \Omega = \frac{T}{2\pi} \quad (2.15)$$

的矩阵形式是

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -2Dx_2 - x_1 - \alpha x_1^3 + P \cos \Omega t \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

求一定激振频率下的周期解的边界条件是

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1(T) \\ x_2(T) \end{bmatrix} = 0 \quad (2.17)$$

取参数向量 $s = [s_1, s_2]^T = [x_1(0), x_2(0)]^T$, 则 $g(s) = 0$, 初值问题 (2.7) 作

$$\left[\frac{\partial x}{\partial s} \right] = \frac{\partial x}{\partial s} \begin{bmatrix} 0 & -(1 + 3\alpha x_1^2) \\ 1 & -2D \end{bmatrix}, \quad \left. \frac{\partial x}{\partial s} \right|_{t=0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

其中

$$-\frac{\partial x}{\partial s} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial s_1} & \frac{\partial x_2}{\partial s_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial s_2} & \frac{\partial x_2}{\partial s_2} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

而 Jacobi 矩阵 (2.5) 是

$$F'(s) = \begin{bmatrix} 1 - \left. \frac{\partial x_1}{\partial s_1} \right|_{t=T} & - \left. \frac{\partial x_2}{\partial s_1} \right|_{t=T} \\ - \left. \frac{\partial x_1}{\partial s_2} \right|_{t=T} & 1 - \left. \frac{\partial x_2}{\partial s_2} \right|_{t=T} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

另一方面, 求振幅为指定值 A 的周期解在什么激振频率下出现的边界条件是

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A \\ x_2(T) \end{bmatrix} = 0 \quad (2.21)$$

这时取参数向量为 $s = [\Omega, x_2(0)]^T$, 则 $g(s) = \Omega$, 从而 $\partial g / \partial s = [1, 0]^T$. 初值问题 (2.7) 则为

$$\left[\frac{\partial x}{\partial s} \right]' = \frac{\partial x}{\partial s} \begin{bmatrix} 0 & -(1+3\alpha x_1^2) \\ 1 & -2D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -Pt\sin\Omega t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial x}{\partial s} \Big|_{t=t_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

而Jacobi矩阵 (2.9) 是

$$F'(s) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial x_1}{\partial s_1} \Big|_{t=T} + \frac{2\pi}{\Omega^2} \dot{x}_1(T) & -\frac{\partial x_2}{\partial s_1} \Big|_{t=T} + \frac{2\pi}{\Omega^2} \dot{x}_2(T) \\ -\frac{\partial x_1}{\partial s_2} \Big|_{t=T} & 1 - \frac{\partial x_2}{\partial s_2} \Big|_{t=T} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

三、周期解稳定性的数值研究

为了考察已求得的周期解 $\bar{x}(t)$ 的稳定性, 研究它的一个邻近解 (一般是非周期解) $\bar{x} + \eta$, η 可被看作扰动. 周期解 \bar{x} 的稳定性就取决于时间增加时 η 的性态.

把 $\bar{x} + \eta$ 代入问题 (2.1) 中的微分方程后对 η 作 Taylor 展开可得到扰动 η 满足的微分方程为

$$\dot{\eta} - \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]^T \eta + O(\eta^2) = 0, \quad \eta \in R^n, \quad f \in R^n \quad (3.1)$$

只保留一次项, 得到

$$\dot{\eta} - \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]^T \eta = 0 \quad (3.2)$$

Poincaré 称 (3.2) 式为对于解 \bar{x} 的变分方程. 容易看出它是一个周期系数线性常微分方程组. 根据 Floquet 定理, 它的解有性质

$$\eta(nT) = \Phi^n(T, 0) \eta(0) \quad (3.3)$$

其中 $\Phi(T, 0)$ 是方程 (3.2) 的基本矩阵当 $t=T$ 时的值, 这里 T 是周期值. 总可以找到一个变换

$$\xi(t) = P\eta(t) \quad (3.4)$$

其中 P 是一个常矩阵, 使得

$$\xi(T) = B\xi(0) \quad (3.5)$$

这里 $B = P\Phi(T, 0)P^{-1}$ 为 Jordan 型矩阵. 由 (3.4) 式和 (3.5) 式容易看出 $\xi(t)$ 及 $\eta(t)$ 当时间增加时的性态. 从而周期解 $\bar{x}(t)$ 的稳定性只取决于 $\Phi(T, 0)$ 的诸特征值的模的最大值 $|\lambda_i|_{\max}$.

显然, 当 $|\lambda_i|_{\max} < 1$ 时, \bar{x} 为渐近稳定的, 当 $|\lambda_i|_{\max} > 1$ 时, \bar{x} 为不稳定的. 这些结论虽然是对线性化的方程 (3.2) 的讨论得到的, 但 Ляпунов 证明了它们当考虑非线性项时仍成立. 仅当 $|\lambda_i|_{\max} = 1$ 时, \bar{x} 的稳定性与高次项有关. 在 Ляпунов 意义下, λ_i 的重数与 $\Phi(T, 0)$ 的亏值相等是 \bar{x} 为临界稳定的必要条件, 但二者不相等时, 解也可能是轨道稳定的^[22]. 又根据 Аядронов/Бумм 定理 (例如看 [15, 16]) 可知, 当 $|\lambda_i|_{\max} = 1$ 且相应的特征值为单重时, 自治系统的周期解是稳定的. [23] 对这条定理作了推广.

应用以上判别法时, 一般只能依据数值解, 这里的关键是求出 $\Phi(T, 0)$, 即初值问题

$$\dot{\Phi}(t, 0) - \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]^T \Phi(t, 0) = 0, \quad \Phi(0, 0) = I. \quad (3.6)$$

的解当 $t=T$ 时的值。这个问题有许多种解法，但没有哪一种特别好^[24]。[25]给出了一种算法，代替通常的 n 次计算（每次算一行微分方程），只作一次计算。但这唯一的一次计算实质上是矩阵运算，因此并不能真正节约计算时间。[25]中也对徐皆苏建议的两种近似解法（用脉冲函数或阶跃函数逼近任意函数）^[26, 27]进行了对比计算。所有这些方法的效果大致相仿。作者的计算实践经验表明，在一般情况下，直接数值积分不失为一个可取的方法。

矩阵特征值的数值解法主要有两类——迭代方法和变换方法。因这里常有多个特征值的模相同（ $=1$ ，对于无阻尼情况），迭代方法不适用而只可用变换方法，其中最有效的是QR方法。

四、周期解的 Fourier 分析

由第二节可知，一旦定出了正确的初始条件，就可以对常微分方程进行数值积分而求得所需的周期解（这里一般不会出现病态情况）。它可以被表示成 Fourier 级数：

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(a_j \cos \frac{2\pi}{T} jt + b_j \sin \frac{2\pi}{T} jt \right) \\ a_j &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos \frac{2\pi}{T} jtdt \\ b_j &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin \frac{2\pi}{T} jtdt \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

诸系数的大小表征了各阶谐波的作用，物理上感兴趣的往往只是起主要作用的头几阶谐波，故一般取 $j=3\sim 5$ 就够了。

计算系数 a_j 和 b_j 时要作数值积分。这里因函数在任意点的数值均可求出，可以采用代数精确度最高的 Gauss 方法。对比计算表明，对本文所研究的周期解，用 Gauss 方法至少可比用 Romberg 方法节约五倍以上的计算时间^[12]。

五、误差估计

众所周知，数值计算的误差估计难以用分析方法作出。本文采用如下的经验误差估计方法：首先确定可能产生误差的环节，然后通过适当安排的数值试验估计出各个环节中最可能出现的误差数值之间的相互关系，最后对各个环节中采用的计算方法作适当控制，而使它们有相互适应的计算精度，并保证一定的总的计算精度。这个方法可以概括如图 2。本文的计算实例中一般取 $\delta=0.001$ 和 $M=60$ 。

为了校验这种误差估计方法，我们与 [28] 中给出的 Галеркин 解及相应的分析形式误差估计公式作了比较。计算实例是受激 Van der Pol 方程

$$\ddot{x} - \epsilon(1-x^2)\dot{x} + x = P \sin \Omega t \quad (5.1)$$

[28] 中给出的误差估计为 2×10^{-7} ，我们的估计为 10^{-9} ，但在用两种方法计算的 32 个直到 15

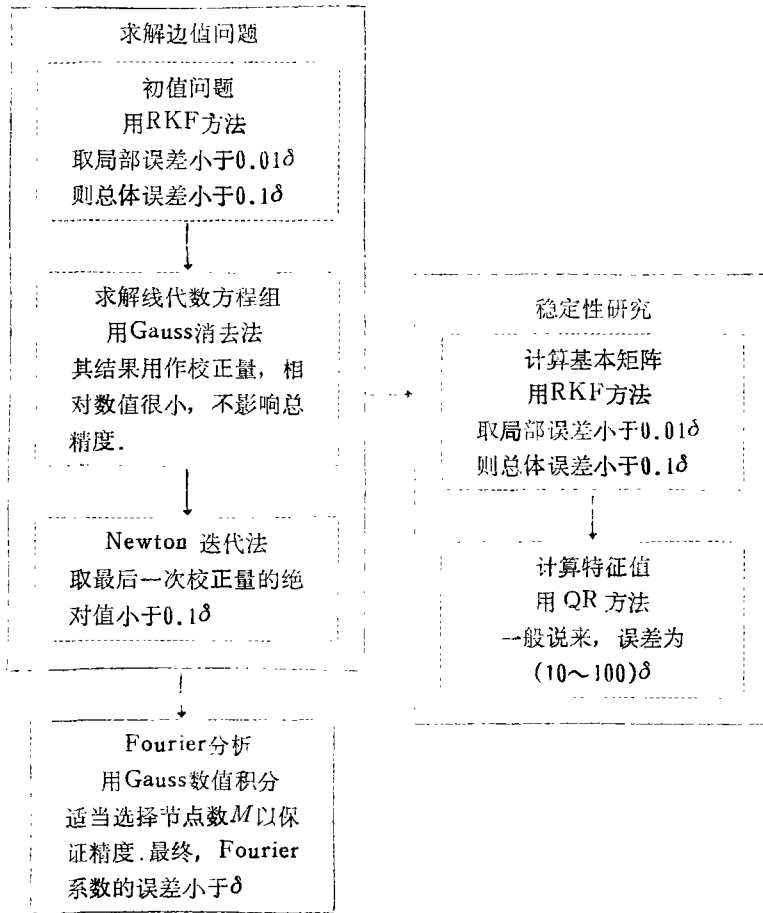


图2 误差分析

阶的Fourier系数中, 仅一个二者相差 5×10^{-9} , 其余都不大于 10^{-9} . 可见两种方法的精度基本相同. 但分析形式的误差估计偏高甚多, 我们的误差估计则颇接近于实际. 顺便指出, Галеркин方法所需的计算时间远比本文所用的数值方法为多, 而其误差估计公式需要的计算时间甚至比求解本身更多, 因而这种方法难以实际应用.

六、一类特殊的常微分方程

许多常见的非线性振动方程有形式:

$$\dot{x} + f(x) = g(t), \quad f(x) = -f(-x), \quad g\left(t + \frac{T}{2}\right) = -g(t) \tag{6.1}$$

显然可知 $g(t)$ 是一个周期为 T 的函数, 也容易证明, 若 $x(t)$ 是方程(6.1)的一个周期为 T 的解, 则

$$x\left(t + \frac{T}{2}\right) = -x(t) \tag{6.2}$$

由(6.2)式立即可以得到

$$x(0) = -x\left(\frac{T}{2}\right) = x(T) \quad (6.3)$$

从而边值问题 (2.1) 可以改写成

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(0) + x\left(\frac{T}{2}\right) = 0 \quad x \in R^n, f \in R^n \quad (6.4)$$

另一方面, 不难证明这时 $\partial f / \partial x$ 是偶函数, 于是

$$\frac{\partial f[x(t+T/2)]}{\partial x} = \frac{\partial f[-x(t)]}{\partial x} = \frac{\partial f[x(t)]}{\partial x} \quad (6.5)$$

即 $\partial f / \partial x$ 的周期是 $T/2$. 这样, 判定稳定性的变分方程 (3.2) 的系数就有周期 $T/2$.

最后, 对具有以上性质的 $x(t)$, Fourier系数的计算公式 (4.1) 可以写成

$$\left. \begin{aligned} a_j &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} x(t) \cos \frac{2\pi}{T} jt \, dt \\ b_j &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} x(t) \sin \frac{2\pi}{T} jt \, dt \\ a_j &= b_j = 0 \quad (j=1, 3, 5, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (j=0, 2, 4, \dots) \quad (6.6)$$

由上可知, 对形如 (6.1) 的方程, 利用 (6.4) ~ (6.6) 式可以大大减少计算工作量.

七、用插值方法确定迭代始值

第二节中叙述如何用打靶法求周期解时, 并未提到怎样选取迭代始值. 事实上, 迭代始值的好坏对收敛速度的影响颇大. 观察典型的共振曲线(图3), 容易想到在 AB 段和 GH 段的迭代始值不难确定, 因为它们与线性解很接近. 而一旦算出了曲线上的几个点, 就可以用插值方法逐步推出对新点的较佳迭代始值.

插值公式以线性的和抛物线性的为宜. 经验表明, 这里用高阶插值公式效果并不好. 另外, 在曲率变化较大的曲线段, 布点要密些, 而在曲率变化较小的曲线段, 布点可疏些, 即计算中要改变步长. 如果分别记 Δ_{\max} 和 Δ_{\min} 为迭代始值与迭代终值之差的允许上下限, 可得到选取迭代始值的方案如下:

对第一点和第二点: 凭经验或参考线性解选取;

对第三点: 线性插值;

对第四点: 线性或抛物线性插值;

从第五点起: 先考察对前一点用哪种插值公式的效果为好, 再确定这次该用的插值公式. 参看图4, 当 $\Delta p > \Delta g$ 时用线性公式, 反之用抛物线性公式

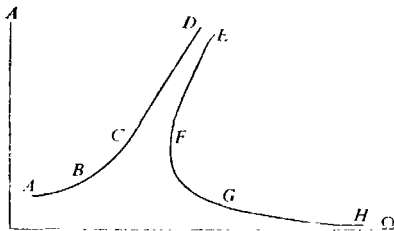


图3 典型共振曲线

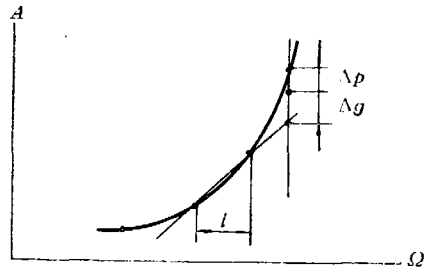


图4 线性和抛物线性插值的误差

然后考察对前一点的插值效果以决定是否变化步长，具体说来：

当 $\Delta_{\min} < \min(\Delta p, \Delta g) < \Delta_{\max}$ 时步长不变；

当 $\min(\Delta p, \Delta g) > \Delta_{\max}$ 时步长减半；

当 $\Delta_{\min} > \min(\Delta p, \Delta g)$ 时步长加倍。

这样选出的步长一般是合适的，但在待求曲线的曲率变化特别大之处，步长可能偏大而导致较差的收敛性，这时宜把步长减半后重新计算。

最后有一个变换自变量的问题。如图3，显然在AB段和GH段取频率 Ω 为自变量，而在CD段和EF段取振幅 A 为自变量比较合理。按图5，当 $k_A \Delta A > k_\Omega \Delta \Omega$ 时应取 A 为自变量，反之应取 Ω 为自变量。这里 k_A 和 k_Ω 是加权常数，按经验选取，一般取 $k_\Omega = 2k_A$ ，计算组合频率共振时常取 $k_\Omega = (10 \sim 30)k_A$ ，以便察觉曲线的突然陡峭升降。变量多于两个时可按同样原则处理，即取在上一步的加权变化率最大的变量为这一步的自变量。

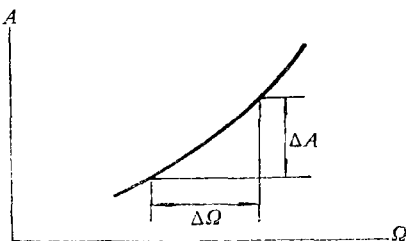


图5 自变量的变换

八、计算实例

在[12]中给出了大量计算实例，涉及强迫、自由保守和自激等振动机制，分析和非分析（分段线性）的非线性，组合频率、高次谐波和同步等现象。限于篇幅，这里只择要介绍其中的三个。

例1. 对称二自由度系统的自由保守振动。

[29]中提出了非线性振动系统模态振动的概念，并用来处理了一个对称二自由度系统(图6)的自由保守振动。它的振动方程显然是：

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -(a_1 x_1 + a_3 x_1^3) - [A_1(x_1 - x_2) + A_3(x_1 - x_2)^3] \\ \ddot{x}_2 &= -(a_1 x_2 + a_3 x_2^3) + [A_1(x_1 - x_2) + A_3(x_1 - x_2)^3] \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

[29]中说明了存在着同相振型 $x_r = x_1 + x_2$ 和反相振型 $x_\theta = x_1 - x_2$ ，它们满足的方程是：

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_r + a_1 x_r + a_3 x_r^3 &= 0 \\ \ddot{x}_\theta + (a_1 + 2A_1) x_\theta + (a_3 + 8A_3) x_\theta^3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

[29]中由这些方程计算了模态振动脊线，并根据相应的变分方程(Mathieu方程)近似地讨论了脊线的稳定性，也用电模拟计算机进行了实验。

这个系统很容易用本文给出的数值方法处理，其计算结果连同[29]的近似解和实验值一起在图7中给出。

由图7可以看出，例1.7, 1.9~1.11的近似解与实验值不甚符合，但数值解与实验值符合得很好。数值解中特有的不稳定段振幅较大，显然已超出了所作实验的范围。只有例1.4

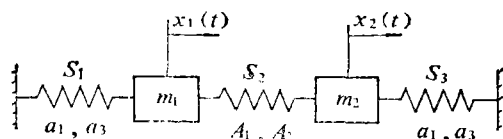


图6 一个对称二自由度系统

是例外，数值解给出实验值和近似解都没有的小振幅不稳定段，故有理由对相应实验值的可靠性表示怀疑。最后应指出，在这种保守系统中，振幅当然不会无限增大，这里所说的不稳定性反映了由于在各个振型之间不断地进行能量交换而引起振幅消长变化。

例2. 二自由度系统的自由保守振动和强迫振动。

图 8 所示系统的振动方程是：

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + h_1 \dot{x}_1^3 + k_2 (x_1 - x_2) + h_2 (x_1 - x_2)^3 &= P_1 \cos \Omega t \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_2 (x_1 - x_2) - h_2 (x_1 - x_2)^3 + k_3 x_2 + h_3 \dot{x}_2^3 &= P_2 \cos \Omega t \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

其中各系数对所计算的四种情况的值见表 2。头两种情况是 Sethna^[30] 给出的，他作了近似计算并进行了实验，他的结果在图 9 中给出。

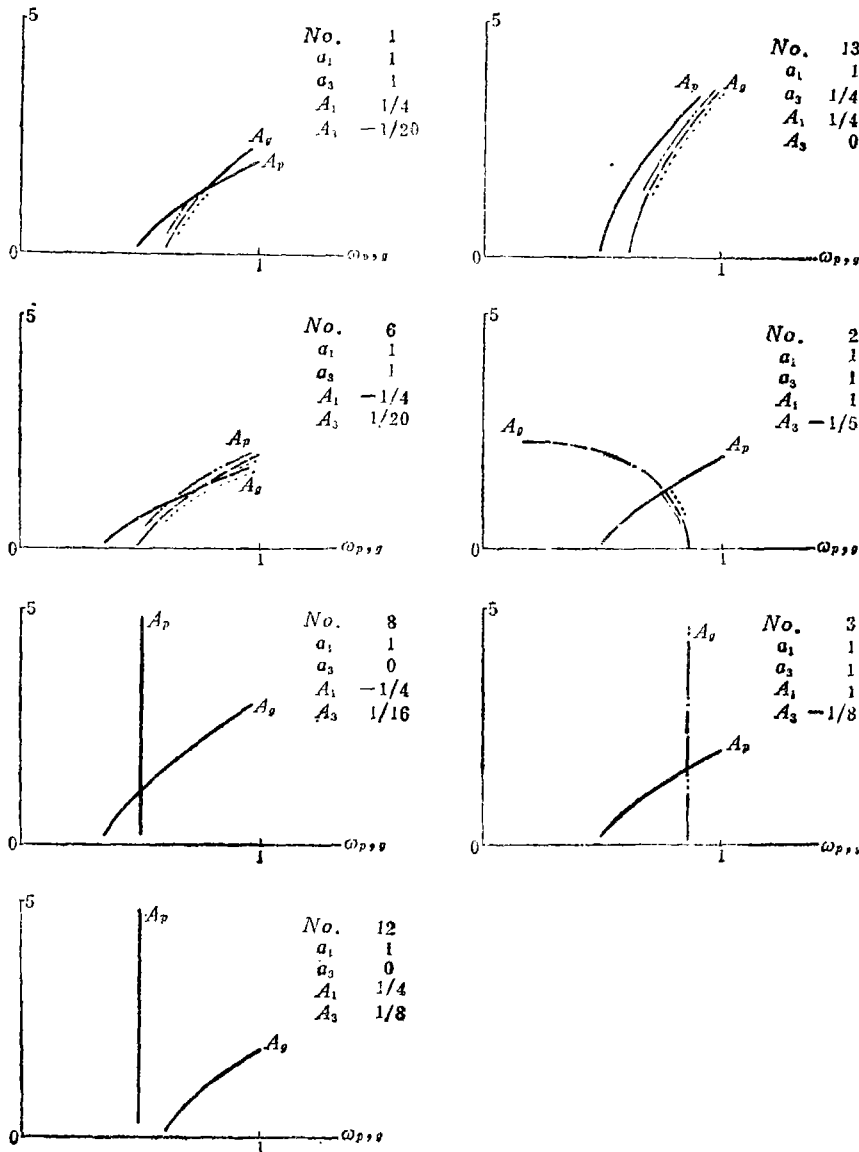


图 7 (a)

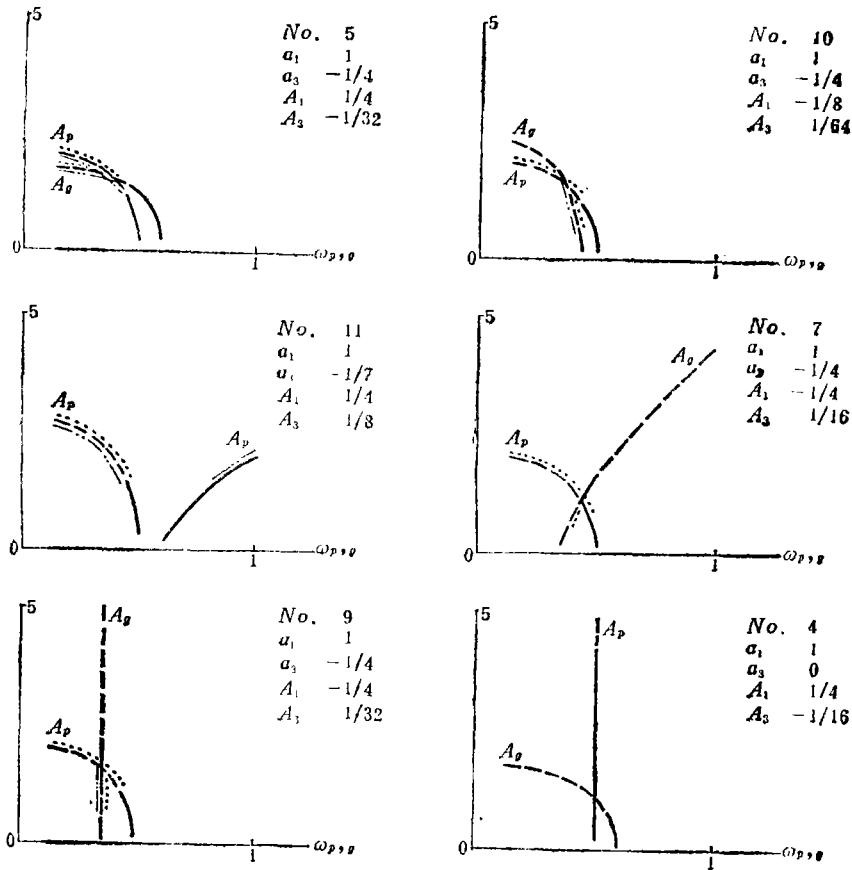


图 7 (b)

数值解: — 稳定 --- 不稳定
 由[29]: 不稳定(实验) - - - 不稳定(近似解)
 图 7 图 6 所示对称二自由度系统的模态振动脊线

$$\begin{cases} \ddot{x}_p + a_1 x_p + a_3 x_p^3 = 0 \\ \ddot{x}_g + (a_1 + 2A_1)x_g + (a_3 + 8A_3)x_g^3 = 0 \end{cases}$$

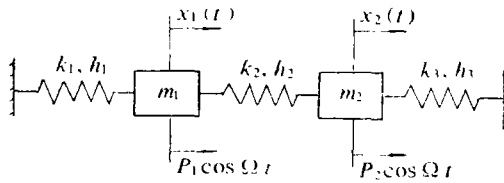


图 8 一个二自由度强迫振动系统

表 1

方程 (8.3) 的系数值

	m_1	m_2	k_1	k_2	k_3	h_1	h_2	h_3	P_1	P_2
例 2.1	1	1	1	1	3	3	-1	-4	0.02	0.04
例 2.2	2	1	2	3.47712*	0	0.2	0	0	0.2	0
例 2.3	2	1	2	2	0	0.2	0	0	0.2	0
例 2.4	2	1	2	5	0	0.2	0	0	0.2	0

* = $36 / (146 - 100\sqrt{1.84})$

例2.1的数值计算结果见图9.可以看出数值解与实验值符合得很好,而近似解只适用于一个很小的范围内.由图9可以清楚地看出,一个简单的非线性振动系统的共振曲线也可能有极复杂的形状.例如在第二个主共振区域,第一个质量的振幅起初比第二个质量的振幅小,而后则大得多.而在第一个主共振区的情况正好相反.在图9中还可以看到一些超共振峰.因相应线性化系统的固有频率分别为1.2和2.05,故在 $\Omega \approx 0.7$ 处出现三次超共振,而在 $\Omega \approx 0.4$ 处出现三次和五次超共振.此外,与单自由度系统不同,共振曲线有垂直切线之处不一定是稳定解与不稳定解的分界点.

例2.2~2.4相互之间的差别只在于系数 k_2 ,从而使线性化系统的固有频率比值分别为

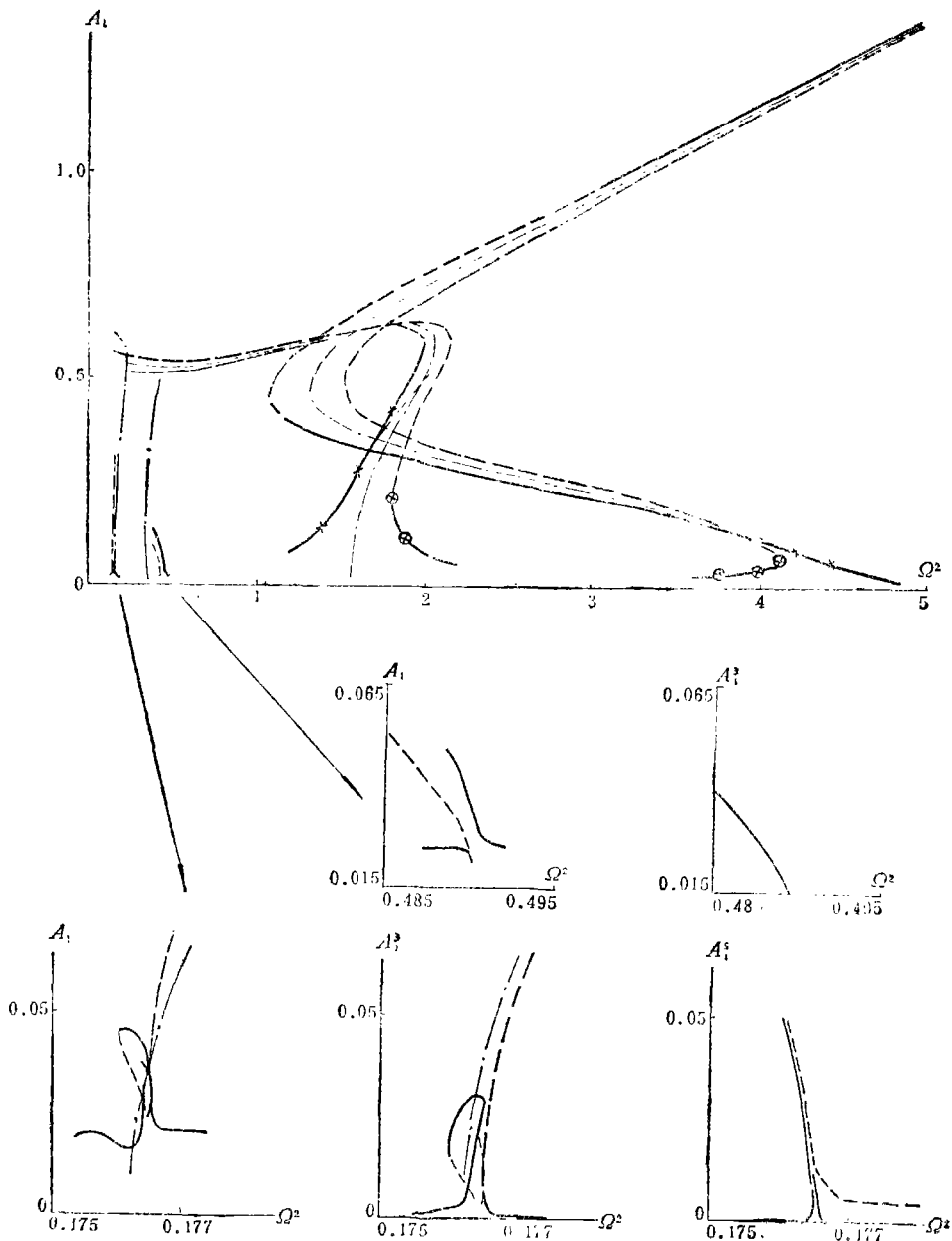


图9(a)

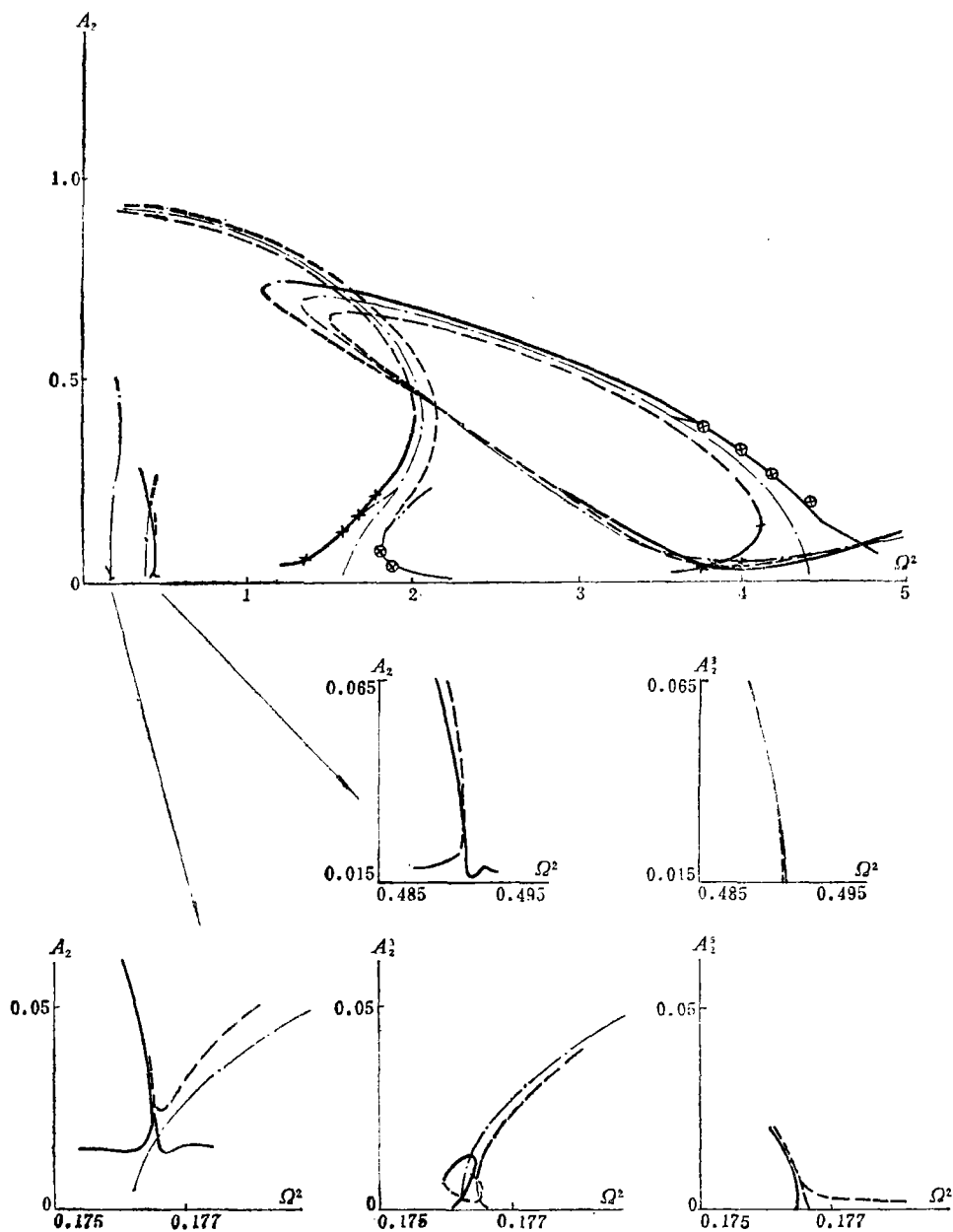


图 9 (b)

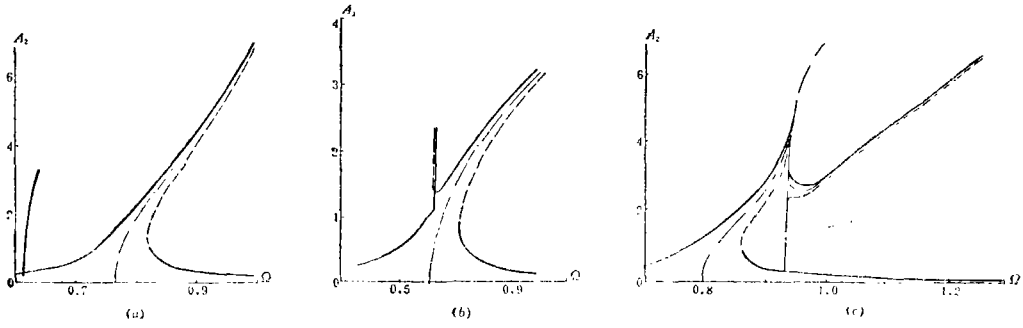
A_j^i : 第 j 个质量第 i 阶谐振动分量的振幅

数值解: — 稳定 ---- 不稳定 -·-·- 脊线

由[30]: -·-·- 近似解 + 实验值($\phi=0$) ⊕ 实验值($\phi=\pi$)

图 9 二自由度系统 (例 2.1) 的共振曲线

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + x_1 + 3x_1^3 + (x_1 - x_2) - (x_1 - x_2)^3 = 0.02 \cos \Omega t \\ \ddot{x}_2 - (x_1 - x_2) + (x_1 - x_2)^3 + 3x_2 - 4x_2^3 = 0.04 \cos \Omega t \end{cases}$$



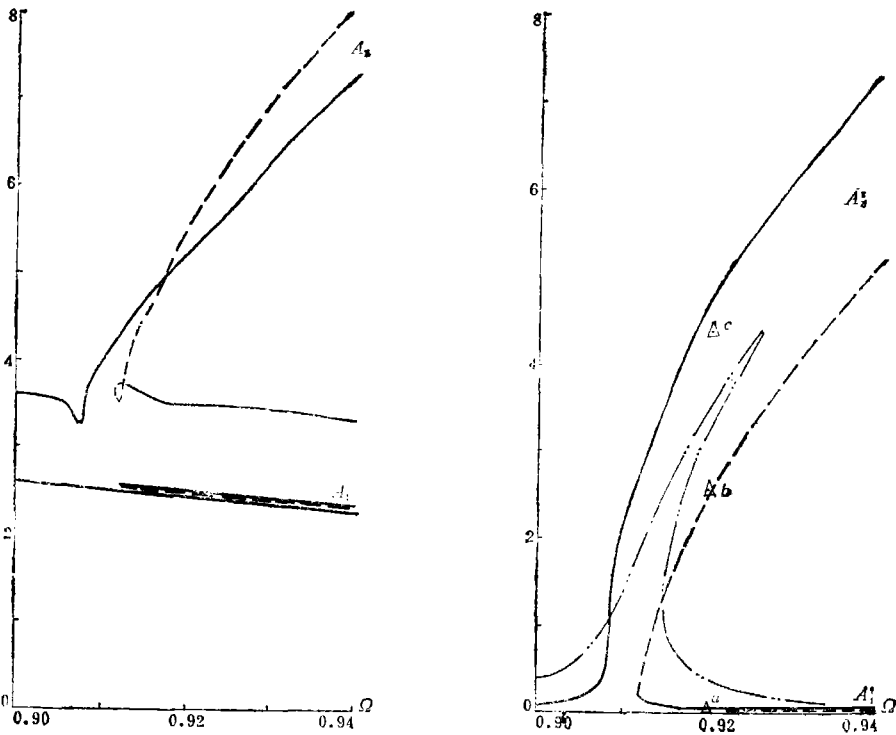
(a) $k_2=2$ (例2.3) (b) $k_2=3.47112$ (例2.2) (c) $k_2=5$ (例2.4)

A_j : 第 j 个质量第 i 阶谐振分量的振幅

数值解: —— 稳定 ---- 不稳定 -·-·- 奇线

图10 二自由度系统(例2.2-2.4)的共振曲线

$$\begin{cases} 2\ddot{x}_1 + 2x_1 + 0.2x_1^3 + k_2(x_1 - x_2) = 0.2\cos\Omega t \\ \ddot{x}_2 - k_2(x_1 - x_2) = 0 \end{cases}$$



A_j^i : 第 j 个质量第 i 阶谐波分量的振幅

数值解: —— 稳定 ---- 不稳定

由[31]: -·-·- 近似解 Δ Галеркин解

图11 一个二自由度系统在 $\Omega \approx 0.9$ 处的组合频率共振

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 0.002x_1 + x_1 + 0.002x_1x_2 + 0.003x_1^3 = 3.5\cos 2\Omega t + 6.5\cos 3\Omega t \\ \ddot{x}_2 + 0.0015x_1 + 0.81x_2 + 0.003x_1x_2 + 0.002x_2^3 = 4\cos 2\Omega t + 13\cos 3\Omega t \end{cases}$$

3, 2.5和 3.5. 数值计算结果见图10. 值得注意的是三次共振峰当与主共振峰相遇时, 会使后者略有改变, 这一点在例2.4中看得特别清楚.

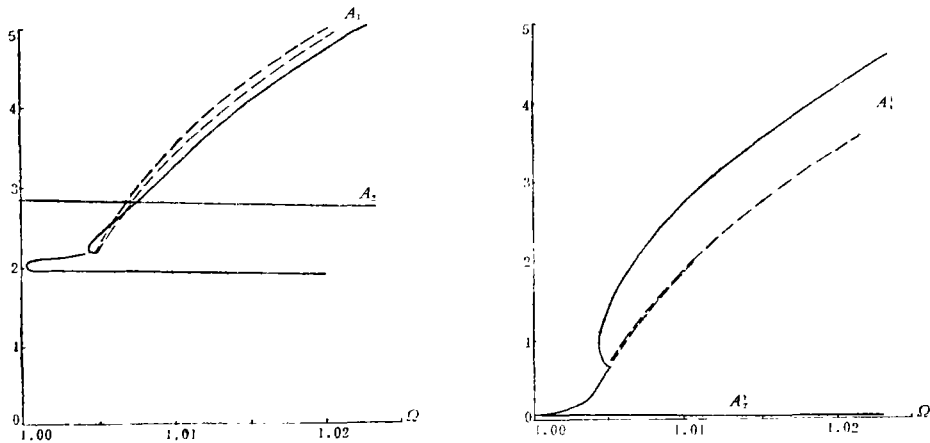
例3. 二自由度系统的组合频率.

van Dooren^[31]用谐波平衡法和 Галёркин法计算了一个受两个强迫力作用, 且有二次和三次非线性项的二自由度有阻尼系统. 其方程和计算结果都在图11中给出, 可以看出两种解法不甚符合. 用数值方法计算所得到的结果如图11和图12. 值得注意的是:

1) 共振峰只对一个质量出现, 另一质量的振幅无甚变化, 但也相应地有稳定段和不稳定段. 这一点与共振峰同时出现于各质量的单一强迫力情况大不相同.

2) $\Omega \approx 0.9$ 处的共振峰与Duffing型共振峰已有所不同, 因共振曲线的两个分支并不相互靠拢反而逐渐分开. 而 $\Omega \approx 1$ 处的共振峰形状则更为特殊.

3) 用谐波平衡法显然不能研究这种比较复杂的问题. [31]给出的三个 $\Omega = 0.92$ 处的 Галёркин解, 有两个(a, b点)与数值解一致, 第三个(c点)则有些问题. 顺便指出, Галёркин法的推导和计算工作量都很大.



A_j : 第j个质量第i阶谐波分量的振幅

数值解: —— 稳定 --- 不稳定

图12 一个二自由度系统在 $\Omega \approx 1$ 处的组合频率共振

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 0.002\dot{x}_1 + x_1 + 0.002x_1x_2 + 0.003x_1^3 = 3.5\cos 2\Omega t + 6.5\cos 3\Omega t \\ \ddot{x}_2 + 0.0015\dot{x}_2 + 0.81x_2 + 0.003x_1x_2 + 0.002x_2^3 = 4\cos 2\Omega t + 13\cos 3\Omega t \end{cases}$$

九、结 束 语

非线性振动系统可有多种不同类型的解. 在稳定解中, 虽然也存在着各种拟周期解, 以及日益引起人们注意的混沌特性, 但周期解仍是研究最多的. 至少对于弱非线性振动系统、自激振动系统和参数振动系统的临界情况等, 周期解仍然有着头等重要的意义. 本文提供的数值分析方法, 可以对各种很不相同的非线性振动系统的周期解作统一处理, 且其误差主要来源于数值积分, 故不难估计并控制它足够小. 由于所需的计算机时间相对较少 (用CD-6600计算机, 单自由度系统一般只需几十秒), 它不仅可用来对各种近似的分析解作校核, 也可以用作直接求解的手段. 许多用分析方法不能处理的系统都可以用这种数值方法计算. 本文给出的计算实例表明, 由于所处理系统的复杂程度的提高以及计算精度的改进, 许多前未察觉的非线性振动系统的特点得以被揭露. 考虑到电子计算机和计算数学的飞速发展, 可

以期望这种数值分析方法将会在研究非线性振动系统时得到更广泛的应用。

本文的主要工作是在西德斯图加特大学力学研究所A完成的。作者感谢他的导师 R. Eppler教授的悉心指导, H. Sorg教授的多方面帮助和 W.-D. Ruf先生的有益建议。

参 考 文 献

- [1] Hsu, C. S., Limit cycle oscillations of parametrically excited second order nonlinear systems, *J. Appl. Mech.*, 42(1975), 176—182.
- [2] Riganti, R., A study on the forced vibrations of a class on nonlinear systems with application to the Duffing equation Part II: Numerical Treatment, *Mechanica*, 11 (1976), 81—88.
- [3] Nayfeh, A. H. and D. T. Mook, *Nonlinear Oscillations*, John Wiley and Sons, New York—Chichester Brisbane—Toronto, (1979).
- [4] Poincaré, H., Mémoire sur les courbes définies par une equations différentielles, *J Math.*, 3e Série, 7(1881), 375—422.
- [5] Hsu, C. S., Nonlinear behaviour of multibody systems under impulsive parametric excitation, in *Dynamics of Multibody Systems*, Springer, Berlin—Heidelberg—New York, (1977).
- [6] Hsu, C. S., On nonlinear parametric excitation problems, *Adv. Appl. Mech.*, 17 (1977), 245—301.
- [7] Urabe, M., Numerical determination of periodic solution of nonlinear system, *J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A*, 21(1957), 125—148.
- [8] Urabe, M., Infinitesimal deformation of cycles, *J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A*, 18(1954), 37—53.
- [9] Urabe, M., Remarks on periodic solutions of Van der Pol's equation, *J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A*, 24(1960), 197—199.
- [10] Urabe, M., *Nonlinear Autonomous Oscillations*, Academic Press, New York—London (1967).
- [11] Ruf, W. -D., Numerische Lösung des Duffing-Problems, Diplomarbeit, Institute A für Mechanik, Uni. Stuttgart(1978).
- [12] Ling, F. H. (凌复华), Numerische Berechnung periodischer Lösungen einiger nichtlinearer Schwingungssysteme, Dissertation, Uni. Stuttgart(1981).
- [13] Poincaré, H., *Les Methodes Nouvelles de La Mécanique Céleste* Vol. 1, Gauthier-villars, Paris(1892).
- [14] Ляпунов, А. М., Общая Задача об устойчивости Движения, Харьков, (1932), или ОНТИ(1935).
- [15] 马尔金, «非线性振动理论中的李维普诺夫方法与邦加来法», 科学出版社, (1959).
- [16] Малкин, И. Г., Теория Устойчивости Движения, Гостехиздат, (1952).
- [17] Kane, T. R. and D. Sobala, A new method for attitude stabilization, *AIAA J.*, 1 (1963), 1365—1367.
- [18] Stoer, J. and R. Bulirsch, *Einführung in die Numerische Mathematik I*, Springer, Berlin—Heidelberg—New York(1978).
- [19] Fehlberg, E., Klassische Runge-Kutta Formeln fünfter und siebenter Ordnung mit

- Schrittweiten-Kontrolle, *Computing*, 4(1969), 93—106.
- [20] Fehlberg, E., Klassische Runge-Kutta Formeln vierter und niedrigerer Ordnung mit Schrittweiten-Kontrolle und ihre Anwendung auf Wärmeleitungsprobleme, *Computing*, 6(1970), 61—71.
- [21] Shampine, L. F. and M. K. Gordon, *Computer Solution of Ordinary Differential Equations*, The Initial Value Problem, W. H. Freeman and Company, San Francisco (1975).
- [22] Stoker, J. J., *Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems*, Interscience Publishers, New York-London(1950).
- [23] Schräpel, H. D., Erweiterung eines Satzes von Andronow und Witt, *ZAMM* 57 (1977), T89—T90.
- [24] Moler, C. and C. van Loan, Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, *SIAM Rev.*, 20(1978), 801—836.
- [25] Friedmann, P., C. E. Hammond and T. -H. Woo, Efficient numerical treatment of periodic systems with application to stability problems, *Int. J. Num. Math. Eng.*, 11(1977), 1117—1136.
- [26] Hsu, C. S., Impulsive parametric excitation: Theory, *J. Appl. Mech.*, 39 (1972), 551—558.
- [27] Hsu, C. S. and W. H. Cheng, Applications of the theory of impulsive parametric excitation and new treatments of general parametric excitation problems, *J. Appl. Mech.*, 40(1973), 78—86.
- [28] Urabe, M. and A. Reiter, Numerical computation of nonlinear forced oscillations by Galerkin's procedure, *J. Math. Anal. Appl.*, 14(1966), 107—140.
- [29] Rosenberg, R. M. and C. P. Atkinson, On the natural modes and their stability in nonlinear two-degree-of-freedom systems, *J. Appl. Mech.*, 26(1959), 377—385.
- [30] Sethna, P. R., Steady-state undamped vibrations of a class of nonlinear discrete systems, *J. Appl. Mech.*, 27(1960), 187—195.
- [31] van Dooren, R., Differential tones in a damped mechanical system with quadratic and cubic non-linearities, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 8(1973), 575—583.

A Numerical Treatment of the Periodic Solutions of Non-Linear Vibration Systems

Ling Fu-hua

(Department of Engineering Mechanics,

Shanghai Jiao Tong University, Shanghai)

Abstract

Direct numerical integration can be used to find the periodic solutions for the equations of motion of non-linear vibration systems. The initial conditions are iterated, so that they coincide with the terminal conditions. The time interval of the integration (i. e. the period) and certain parameters of the equations of motion can be included in the iterations. The integration method has a variable steplength.

This shooting method can produce periodic solutions with a shorter computing time. The only error occurs in the numerical integration and it can therefore be estimated and made small enough. Using this method one can treat a variety of vibration problems, such as free conservative, forced, parameter-excited and self-sustained vibrations with one or several degree-of-freedom. Unstable solutions and those which are sensitive to parameter changes can also be calculated. The stability of the solutions is investigated based on the theory of differential equations with periodic coefficients. Extrapolation method and the procedure of automatic steplength control are used to estimate the initial values of iterations by determining the resonance curve and other vibration characteristics.

Some examples have been calculated to illustrate the applicability of the method. The non-linearity may be expressed by an analytical function or any other functions, such as a piecewise linear function. Several remarkable features of non-linear vibrations are presented through the obtained periodic solutions. Finally, some results are compared with those obtained by other approximation methods and experiments.