

广义塑性力学和地力学的一些模型*

O.C. 辛克维奇

(英国, 斯汪西, 威尔斯大学, 土木工程系, 1981年11月20日收到)

摘 要

在本文中, 我们(a). 介绍了一种非常一般性的塑性定义; (b). 指出土壤类材料在单调加载和循环加载中可以采用的几种和时间无关的模型. 每一种模型的详细说明散见其它文献, 但我们相信, 新的体制提供了条件, 使各种特性的模型更易理解, 而且是更一般的解释.

一、单轴向模型

考虑一单轴向试件, 在单调增加的应力作用下, 呈非线性特性. 如果材料性质和作用时间不相关, 则我们可以测得一条单值曲线, 如图1. 在卸载时, 它顺着同一曲线退回, 这种特性称为具有非线性特性的弹性, 亦称超弹性(hyper-elastic). 描写这种模型的方法之一是采用切线关系式

$$d\sigma = Dde \quad (1.1)$$

其中 D 称为切线模量, 它是

$$D = D(\sigma) \text{ 或 } D = D(\varepsilon) \quad (1.2)$$

实际材料在卸载和重新加载时, 一般历经不同的路线, 如图2. 这样的材料性质, 如果和作用时间不相关, 在卸载时呈现永久变形, 则可以相当一般地称它是塑性的.

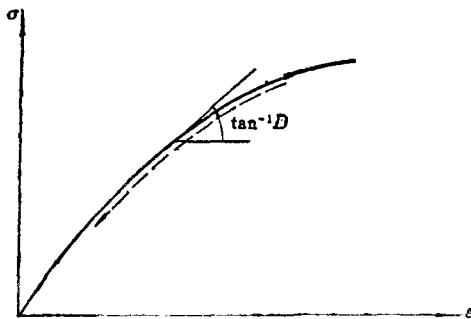


图1 非线性弹性(超弹性)

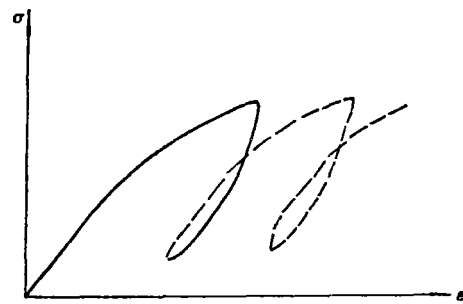


图2 实际材料的特性

* 钱伟长推荐.

我们也可以用切线关系来表示这种材料的特性^[1]，但这时的 D 并不是材料应变状态的单值函数（或不是材料应力状态的单值函数），为了定义 D ，我们还需要两方面的确切信息：

(甲) 描写过去的载荷历史的参量 κ (或几个参量)。

(乙) 标明紧跟着在后面的 $d\sigma$ (或 de) 是加载还是卸载。

如果只用历史参量，则在应力路线的任意点上就只有一个 D 值，但仍有可能有分岔路线如图3。塑性力学的一种特殊理论——内生时序理论(ENDOCHRONIC THEORY)就是根据这种模型建立起来的。

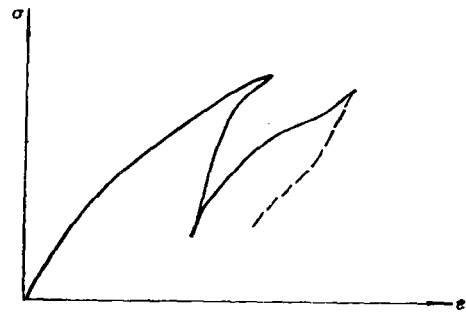


图3 $D=D$ (状态) 的模型，如内生时序模型

为了求得更一般的描述，很明显必须既用历史参量，又标明施载方向。

因此，一般的塑性模型也可以用 $d\sigma = Dde$ 来表示，但 D 对任何状态都有两个值，即 D_l (加载) 和 D_u (卸载)，一般说来，这两个 D 值，都和材料过去的历史有关。

在上述塑性理论中，弹性是它的特例，当 $D_l = D_u = D_e$ (弹性切线模量) 时，称为弹性范围。

弹性范围的极限称为屈服点。

在理想塑性 (弹塑性) 中，

屈服点上有： $D_l = 0$ ， $D_u = D_e$ (弹性)，见图4a；

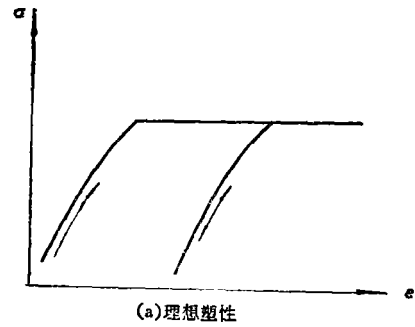
在应变硬化塑性中，

屈服点上有： $D_l > 0$ ， $D_u = D_e$ ，见图4b；

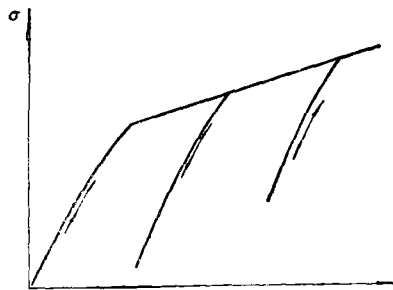
在应变软化塑性中，

屈服点上有： $D_l < 0$ ， $D_u = D_e$ ，见图4c。

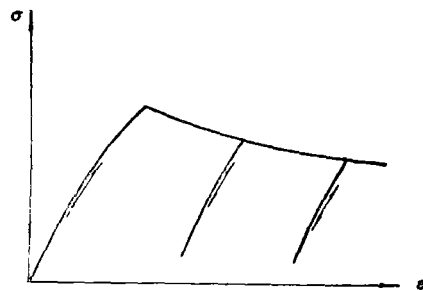
(必须指出，这里的载荷最好用应变来定义)。



(a)理想塑性



(b)硬化塑性



(c)软化塑性

图4 经典的塑性特性 (具有弹性范围的)。 (a)理想型 (b)硬化塑性 (c)软化塑性

二、多轴向应力的广义塑性力学

在多轴向应力应变状态中，增量关系为

$$d\sigma = D d\epsilon \tag{2.1}$$

其中 σ 和 ϵ 为有关张量, 在本文内, 为了方便起见, 把它们作为矩阵和矢量的符号使用.

同样, 我们可以根据下述特性来定义 (1) 非线性弹性, (2) 内生时序塑性, (3) 广义塑性, 即

- (1) D 为应力状态的函数,
- (2) D 为应力状态的函数, 而且也是历史参量 κ 的函数,
- (3)和(2)相同, 但在各点上对加载和卸载分别用适当的 D_l 和 D_u 来定义.

在载荷单调增加的实际问题中, 人们常常可以把它看作为非线性弹性问题, 其结果和采用其它复杂理论所得结果完全相同. 在单轴向问题中, 由于加载和卸载只要一看就明白, 所以, 这样做是很简单的. 但在多轴向应力情况下, 判明加载和卸载就不那么容易了. (在土壤力学中, 常常由于这个原因, 而使非线性弹性模型的计算, 遭到巨大失败. 因此, 这种非线性弹性模型应尽量避免使用).

由于这种内生时序塑性模型有上述缺点, 我们在下文描述广义塑性力学的一种很一般的模型.

在这个模型中, 应力状态 σ 和历史参量 κ 在应力空间中定义一个方向 n_f , 这个方向是和加载和卸载有关的. 在应力空间中, n_f 是一个单位矢量, 如果 $d\sigma$ 为应力变化的方向, 则

$$\left. \begin{aligned} \text{在加载时, } D = D_l, \quad n_f^T d\sigma > 0 \\ \text{在卸载时, } D = D_u, \quad n_f^T d\sigma < 0 \end{aligned} \right\} \tag{2.2}$$

和单位矢量 n_f 垂直的平面 NN 上的一切方向都是中性方向(图5). 矩阵 D_l 和 D_u 的形式是满足连续条件的(见Z. Mroz, A. V. Norris, O. C. Zienkiewicz, (1980)^[12]). 通过物理的论证, 对于一个已知的应力变化而言, 必能观察到一个相同的应变变化. 于是, 我们要求

$$\text{当 } n_f^T d\sigma = 0 \text{ 时, } D_u^{-1} = D_l^{-1} \tag{2.3}$$

能保证上述要求的最简单的应力应变增量关系式为

$$d\epsilon = D_l^{-1} d\sigma = (D_u^{-1} + n_o \cdot n_f^T / K) d\sigma \tag{2.4}$$

模量之间的等效关系为

$$D_l^{-1} = D_u^{-1} + n_o \cdot n_f^T / K \tag{2.5}$$

其中 n_o 为应力空间内方向完全任意的单位矢量, 而 K 是一个标量, 称为硬化模量.

注(1): 如果 $D_u = D_e$, 即卸载过程是弹性的, 则就特别方便. 当然, 完全有可能根本没有什么弹性范围. 于是可以写成

$$D_l^{-1} = D_0^{-1} + n_{ol} n_f^T / K \tag{2.6}$$

$$D_u^{-1} = D_0^{-1} + n_{ou} n_f^T / K \tag{2.7}$$

其中 D_0^{-1} 为只和应力状态有关的矩阵, n_{ol} 和 n_{ou} 不一定相同.

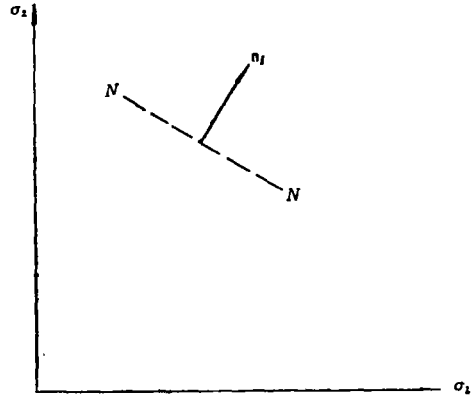


图5 应力空间—每点规定的载荷方向

注(2): Dafalias 建议的加载定义为 $\mathbf{n}_f^T d\boldsymbol{\sigma}/K \geq 0$, 即使 K 为负值 (或软化) 时, 也可以给出正值. 不过, 弹性卸载的不确定性仍然存在. 这样, 我们有必要采用应变控制和校核 $\mathbf{n}_f^T d\boldsymbol{\epsilon}$ 值的办法. 在有限元分析中, $\Delta\boldsymbol{\epsilon}$ 一般在每一增量开始时计算的, 通过这些计算, 我们决定这个增量在以后迭代计算中应该当作塑性, 还是当作弹性处理.

方程(2.4)可以理解为

$$d\boldsymbol{\epsilon} = d\boldsymbol{\epsilon}^e + d\boldsymbol{\epsilon}^p \quad (\text{适用于 } \mathbf{n}_f^T d\boldsymbol{\sigma} \geq 0) \quad (2.8)$$

其中 $d\boldsymbol{\epsilon}^p$ 为塑性应变增量

$$d\boldsymbol{\epsilon}^p = (\mathbf{n}_q \mathbf{n}_f^T / K) d\boldsymbol{\sigma} \quad (2.9)$$

在单轴向应力中, 我们用 $\mathbf{n}_f = \mathbf{n}_q = 1$, 而 K 为 σ - ϵ 曲线的斜度 (见图6).

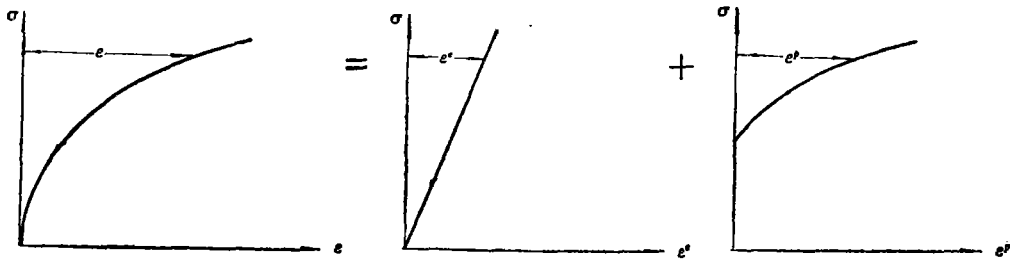


图6 总应变(ϵ)分解为弹性应变(ϵ^e)和塑性应变(ϵ^p)两部份

K 可以是零 (理想塑性)

K 或可以是正 (硬化塑性)

K 或可以是负 (软化塑性)

为了求得逆关系, 我们可以写成

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_l d\boldsymbol{\epsilon} \quad (2.10)$$

而

$$\mathbf{D}_l = \mathbf{D}_u - \frac{\mathbf{D}_u \mathbf{n}_q \mathbf{n}_f^T \mathbf{D}_u}{K + \mathbf{n}_f^T \mathbf{D}_u \mathbf{n}_q} \quad (2.11)$$

当 \mathbf{D}_u 是对称的, 而且 $\mathbf{n}_f = \mathbf{n}_q$, 则我们得相关流动, 而且 \mathbf{D}_l 是对称的, 如果 $\mathbf{n}_f \neq \mathbf{n}_q$, 我们得不相关的流动, 而且 \mathbf{D}_l 是不对称的.

注: 推导表达式(2.11)并不是不重要的, 为了完备起见, 写在下面. 从(2.4)式开始

$$d\boldsymbol{\epsilon} = (\mathbf{D}_u^{-1} + \mathbf{n}_q \mathbf{n}_f^T / K) d\boldsymbol{\sigma} \quad (a)$$

如果称

$$\mathbf{n}_f^T d\boldsymbol{\sigma} / K = \lambda \quad (b)$$

我们有

$$d\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{D}_u^{-1} d\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{n}_q \lambda \quad (c)$$

用 $\mathbf{n}_f^T \mathbf{D}_u$ 相乘, 得

$$\mathbf{n}_f^T \mathbf{D}_u d\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{n}_f^T d\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{n}_f^T \mathbf{D}_u \mathbf{n}_q \lambda \quad (d)$$

或

$$\mathbf{n}_j^T \mathbf{D}_v d\boldsymbol{\varepsilon} = \lambda K + \lambda \mathbf{n}_j^T \mathbf{D}_u \mathbf{n}_q \quad (e)$$

所以

$$\lambda = \frac{\mathbf{n}_j^T \mathbf{D}_v d\boldsymbol{\varepsilon}}{K + \mathbf{n}_j^T \mathbf{D}_u \mathbf{n}_q} \quad (f)$$

代入(c)式, 得

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_v^{-1} d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\mathbf{n}_q \mathbf{n}_j^T \mathbf{D}_v d\boldsymbol{\varepsilon}}{K + \mathbf{n}_j^T \mathbf{D}_u \mathbf{n}_q} \quad (g)$$

或在乘了 \mathbf{D}_u 以后, 得

$$d\boldsymbol{\sigma} = \left(\mathbf{D}_v - \frac{\mathbf{D}_u \mathbf{n}_q \mathbf{n}_j^T \mathbf{D}_v}{K + \mathbf{n}_j^T \mathbf{D}_u \mathbf{n}_q} \right) d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (h)$$

证明完毕.

这是曲型的弹塑性矩阵 (见Zienkiewicz, 1969, ^[19]).

必须指出, 塑性定律的定义只有在任意应力状态中标出了下列各量后才是完备的.

1. 历史参量
2. 载荷方向的单位矢量 \mathbf{n}_j
3. 流动方向的单位矢量 \mathbf{n}_q
4. 弹性模量 (或卸载模量) \mathbf{D}_v
- 和5. 塑性模量 K

很明显, 我们有很多可能的方法标出上述各量, 它们包括经典塑性理论, 约束界面塑性理论和其它尚未考验的各种理论.

Truesdal 的超弹性理论为上述关系的特例.

三、经典塑性理论

(1) 单位方向矢量 \mathbf{n}_j 是由屈服面

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = 0 \quad (3.1)$$

定义的, 它是

$$\mathbf{n}_j = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} / \left[\left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \right]^{1/2} \quad (3.2)$$

即垂直于曲面 $F(\boldsymbol{\sigma}, \kappa)$ 的法线方向.

(2) 流动方向的单位矢量 \mathbf{n}_q 定义为垂直于曲面 $Q(\boldsymbol{\sigma})$ (即塑性势) 的法线矢量

$$\mathbf{n}_q = \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} / \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \left(\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \right]^{1/2} \quad (3.3)$$

(3) 硬化参量 κ 定义为 $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ 包括 $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ 的历史在内的函数.

(4) 硬化模量 K 是根据上述定义求得的, 我们假设, 当 $\mathbf{n}_j^T d\boldsymbol{\sigma} \geq 0$ 时, 代表应力状态的点仍停留在屈服面 F 上. 所以, 根据一致性条件, 我们必有

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial F}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} d\boldsymbol{\varepsilon}^p = 0 \quad (3.4)$$

把方程式(2.9)即

$$d\epsilon^p = n_i n_i^T d\sigma / K \quad (3.5)$$

代入, 并除以 $\left[\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right)^T \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right) \right]^{1/2}$, 即得

$$(1 + \beta/K) n_i^T d\sigma = 0; \quad \beta = \frac{\frac{\partial F}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \epsilon^p}}{\left[\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right)^T \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right) \right]^{1/2}} n_i \quad (3.6)$$

因为 $n_i^T d\sigma \geq 0$, 所以得

$$K = -\beta \quad (3.7)$$

在土力学中, 经典塑性模型有许多是很有用的: 在所有这些模型中, 当应力到达主应力空间的Mohr-Coulomb包络面 $M(\sigma) = 0$ 后, 一定要呈现能继续变形. 在下文, 用各种各样的图来表示这些模型. 这些图是用不变量空间 $\sigma_m, \bar{\sigma}$ 来表示三轴向载荷的. σ_m 和 $\bar{\sigma}$ 代表应力空间的第一不变量和第二不变量. 为了方便, 我们随俗用 $\sigma_m \equiv -p, \bar{\sigma} \equiv q/\sqrt{3}$ 作为表达符号, 这些符号都是按有效应力特性使用的.

模型A. 理想相关塑性 (图7)

$$\left. \begin{aligned} K &= 0 \\ F(\sigma) &= M(\sigma) = 0 \\ Q(\sigma) &= F(\sigma) \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

模型B. 理想非相关塑性 (图8)

$$\left. \begin{aligned} K &= 0 \\ F(\sigma) &= M(\sigma) = 0 \\ Q(\sigma) &= \bar{M}(\sigma) \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

$\bar{M}(\sigma)$ 的表达式和 $M(\sigma)$ 相似, 但 Φ 不同.

模型C. 临界状态模型(密度硬化). 相关特性见图9

$$F(\sigma, \kappa) = 0, \quad \kappa = \epsilon_p^0 \quad (3.10)$$

为切线为 $d\epsilon_p^0 = 0$ 的 $M(\sigma) = 0$ 上的一族闭合曲面. 这个概念是 Drucker, Henker, Gibson (1957)^[6], 还有 Roscoe, Schofield, Wroth, Burland (1968)^{[16], [17]} 等首先提出来的.

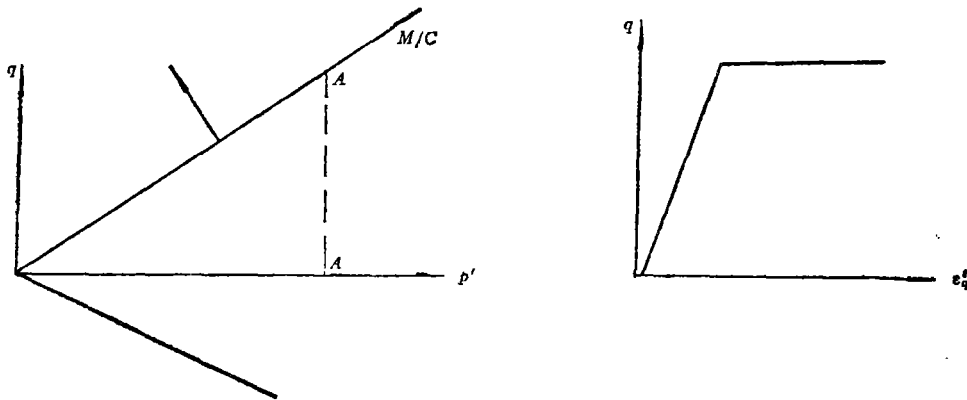


图7 模型A 理论相关塑性

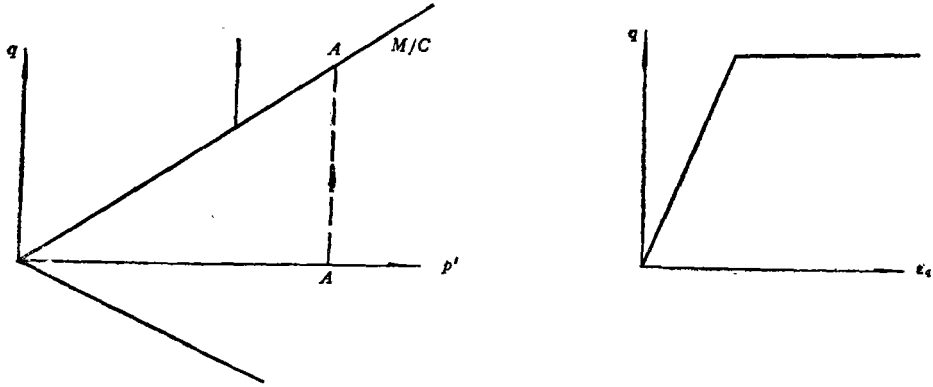


图8 模型B 理想非相关塑性

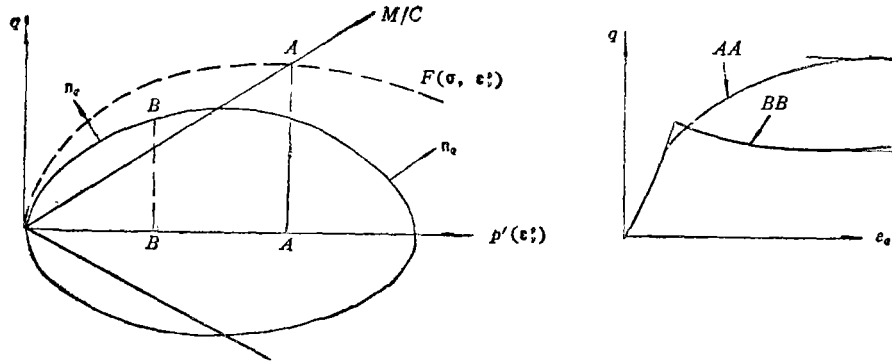


图9 模型C 临界状态—密度硬化/软化塑性

这个模型可以给出应变硬化 $K > 0$ 、中性特性 $K = 0$ (这里 $M(\sigma) = 0$) 和应变软化. F 的最简单的形状是一个通过原点的椭圆, 但是像图10那样具有拉伸交点的两个椭圆, 更加合适. (参见 Dafalias, Herrman, 1980^[5], Pietruszczak, Mroz 1980^[15] 等). 本模型首先提出了过度固结的概念 (overconsolidation)

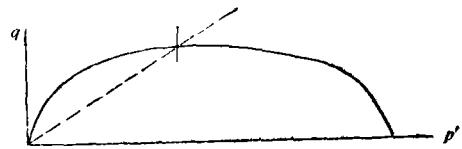


图10 模型C—有非对称曲面

模型D. 具有密度和偏量硬化 (相关的) 的临界状态 (图11) (P. Wilde 的两个不变量

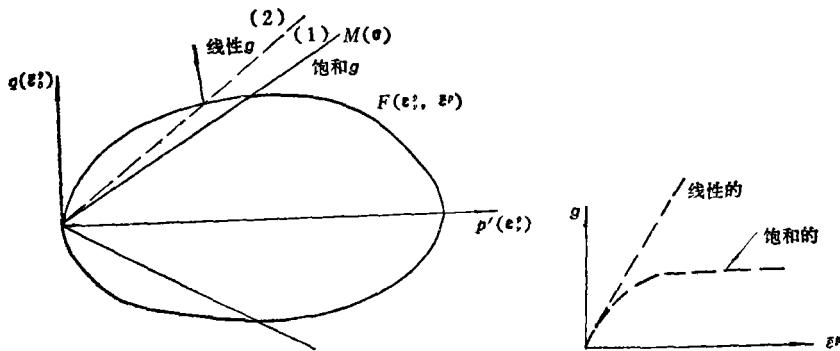


图11 临界状态, 既有密度硬化, 也有偏量硬化

相关的颗粒状介质模型^[18])

$$F(\sigma, \kappa_1, \kappa_2) = 0, \quad \kappa_1 \equiv \varepsilon^p, \quad \kappa_2 \equiv g(\bar{\varepsilon}^p) \quad (\text{第二不变量}) \quad (3.11)$$

当 g 为 κ_1 的线性函数时, 这个模型可以证明是一种临界状态, 或在 $M(\sigma) = 0$ 以上时, 是连续屈服的状态 (图11的线(1))、如果 g 有一个最大值, 当达到 $M(\sigma) = 0$ 时, 即出现软化 (见 Nova, Wood 1979^[14], Lade 和 Duncan 1975^[8])

本模型被用来表示颗粒状材料时显然是很好的. 它是标准临界状态的改进, 标准临界状态是从这种临界状态消除两个参量中的一个参量所得到的. 这个模型代表未脱水土壤的特性, 这种特性和一般土壤特性不同, 见图12.

四、约束界面模型

上节所讲的各种经典的塑性模型并不能简单地表示像图2所述的加载卸载重复循环的非

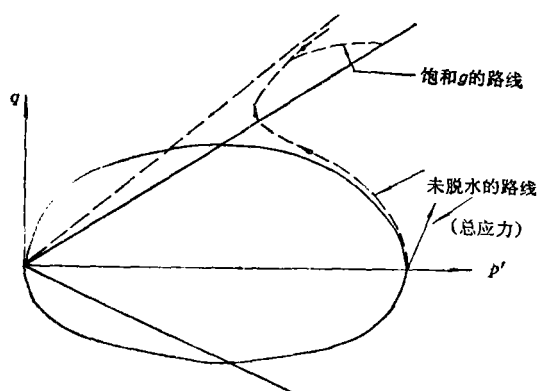


图12 模型D, 典型的未脱水的应力路线

线性现象. 在经典屈服面内部的弹性范围内, 所有载荷循环都是可逆的, 也不可能像沙土那样在重复载荷下出现的压实现象产生永久变形. 为了克服这种困难, 人们只能发展其它塑性模型. Mroz(1967)^[8]引用了一种多重曲面模型. Dafalias 和 Popov(1975)^[3], Krieg(1975)^[7]提出了一种决定模量的简单插值理论. 接着, Mroz, Norris, Zienkiewicz(1978^[10], 1979^[11], 1980^[12])从此发展了土壤力学问题的实用理论. 在目前, 这类理论业已有很多种.

约束界面塑性理论的基本概念为

(1) 约束界面

$$B(\bar{\sigma}, \kappa) = 0 \quad (4.1)$$

在应力空间中的定义, 和经典塑性理论中的屈服面的定义相同.

在这个约束界面上, 矢量 \bar{n}_f , \bar{n}_q 和塑性模量 K 都是按经典塑性理论的规则来定义的.

(2) 在约束界面内侧的应力点 σ (和它的过去的历史) 和约束界面上的应力点 $\bar{\sigma}$ 都是用一定的规则连系着的.

(3) 建立从 $\bar{\sigma}$ 处的 \bar{n}_f , \bar{n}_q , \bar{K} 值求在相关点 σ 处的 n_f , n_q , K 值的一套规则.

(2) 和 (3) 的规则都很复杂, 目前许多模型都属于这一类. 一切容许的塑性变形在约束界面内都是侧连续的, 在有些塑性变形中, 根本没有纯弹性的区域.

现在让我们在这类模型中举几个典型例子——它们在脱水条件下都有循环压实的特性 (或在循环加压下, 具有未脱水的特性.)

在所有下述模型中, 约束界面上都采用了相当于 \bar{n}_f , \bar{n}_q 和 K 的临界状态椭圆

模型 I. 具有两个曲面的各向异性硬化模型 (Mroz, Norris, Zienkiewicz 1978/79^[13]).

(1) 有一个可动椭圆 C (图13), σ 总是在这个椭圆上或在这个椭圆内侧. 这个椭圆的

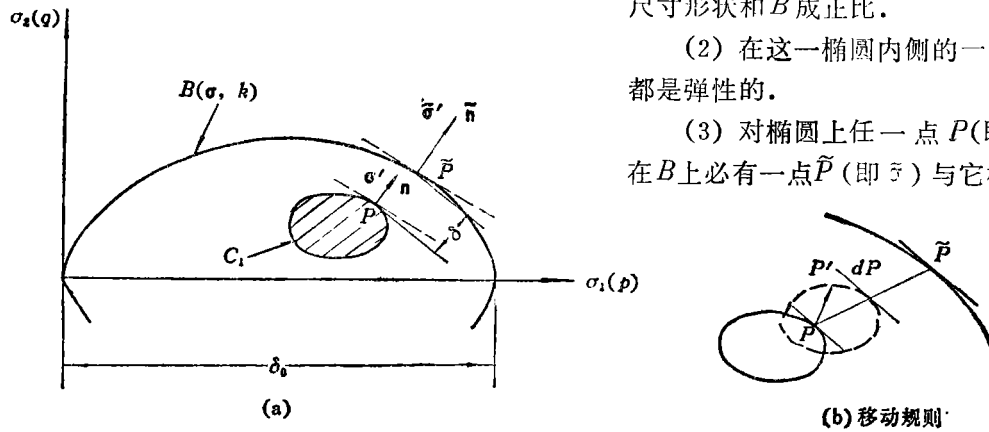


图13 约束界面——塑性可逆模型 I
两个曲面, Mroz-Norris-Zienkiewicz 模型

在 P 和 \tilde{P} 上有相平行的切线, 即 $n_i = \tilde{n}_i$, 而且那里的 \tilde{K} 是由临界状态条件所决定的。

(4) $\sigma(P)$ 点的 K 值是用 δ 为基础的插值公式求得的. δ 为距离 $P\tilde{P}$. 当 $\delta \rightarrow 0$ 时, $K \rightarrow \tilde{K}$. 可供采用的插值公式为

$$K = \tilde{K} + (K - \tilde{K}) \left(\frac{\delta}{\delta_0} \right)^{\nu} \quad (4.2)$$

其中 \tilde{K} 是一个大的正值, δ_0 为某一大的距离, 它可以用 B 的长直径来表示。

Dafalies 和 Herrmann (1980)^[6] 采用另一公式

$$K = \tilde{K} + \tilde{K} \left(\frac{\delta}{\delta_0 - \delta} \right)^m \quad (4.3)$$

其中 \tilde{K} 在接近 p 轴的区域是不断增大的. 这就相当于在实验中所看到的情况, 即在约束椭圆的左侧, 塑性流动较大。

(5) 应力空间中应力点的塑性运动决定椭圆的运动——椭圆中心沿 $P\tilde{P}$ 上运动时, 新的应力点在椭圆 $P+dP$ 处, 如图 13b 所示。

这个模型在循环加载时, 引起塑性应变和一定的密实化(压力增加). 约束界面只和 $\kappa = \epsilon_0$ 有关, 并随着循环加载而扩大。

未脱水材料循环加载的典型应力路线见图 14。

必须指出, 这个模型也可以理解为一种运动的塑性模型, 这时, 运动的椭圆 C 可以作为屈服曲面. 不过, 结论仍旧不变, 即上述模型是解释运动塑性特性的较简单的方法。

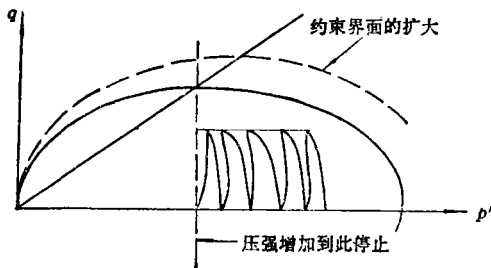


图 14 未脱水循环加载下模型 I 的特性

尺寸形状和 B 成正比。

(2) 在这一椭圆内侧的一切应变都是弹性的。

(3) 对椭圆上任一点 P (即 σ), 在 B 上必有一点 \tilde{P} (即 $\tilde{\sigma}$) 与它相关,

模型 II. 收缩的约束界面模型

让我们谈具有收缩性的约束界面模型 I, 在这种模型中, 约束界面为 $B_N = B_N(\sigma, \kappa, h)$, 其中 h 为塑性应变偏量的总量的某种量度

$$h = \int (de_{ij}^p de_{ij}^p)^{1/2} \quad (4.4)$$

于是, 如非约束界面的尺寸收缩, 不然循环载荷将引起液化。

另一种收缩模型涉及 K 值，或涉及 K 值的插值公式。在这种收缩模型中，在多次循环加载后，材料呈现软化特性（见 Mroz, Norris, Zienkiewicz 1981^[13]）。

模型 III, 零弹性域模型

模型 I 的一种简化是弹性域 C 减缩为零的情况。这时 n_f 只和应力增量 $d\sigma$ 的方向有关。这种模型在列出算式时较为简单，其特性和模型 I 很相像，但参量数目比模型 I 的更少一个。

模型 IV, Dafalias 和 Herrman(1980) 模型

这个模型（见图 15）很简单， n_f （或 $\bar{\sigma}$ ）的定义是唯一的。相关点 \bar{P} 像图 15 所示的那样可以简单地在直线 OP 的径向延长线上求得。求 K 的方法和模型 I 所述相同。这个模型在采用了适当的 K 的软化公式后，给出压强增长，液化和较大的滞后回路。我们无法用这个模型描述各向异性问题。它和模型 I 一样，在循环加载中，临界曲面膨胀（图 16），在卸载时，严格地属于弹性变形。

模型 V(a) 无穷远界面模型

在前述诸模型中，没有一个模型具有记忆消失的特性。所谓记忆消失：指振幅较大的循环加载可以消除过去振幅较小的记忆。而振幅较小的循环加载仍能记忆起过去的振幅较大的加载过程。这种特性在实际土壤中是常见的。

对上述记忆消失的特性而言，Mroz, Norris, Zienkiewicz(1980)^[12]曾提出了一个无穷远界面（INS）模型。

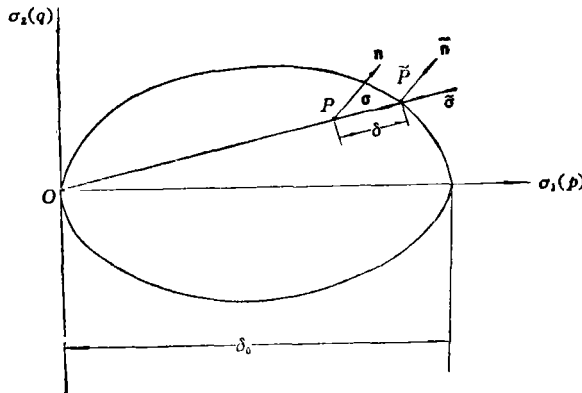


图15 模型IV (Dafalias, Herrman, 1980) 径向规律模型

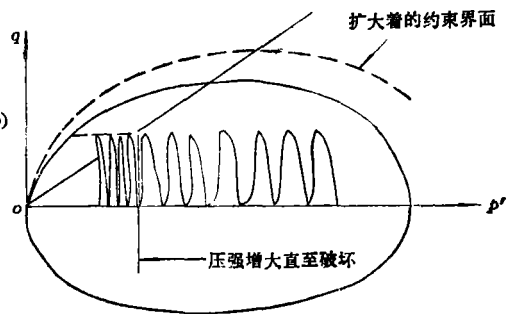


图16 未脱水的循环特性模型IV

无穷远界面模型的特性可以分阶段描述如图 17。和约束界面形状相同的诸曲面称为同调曲面 (homologous surface)。逆向加载时的规律规定：在逆向应力点作切线切于当时的同调曲面，并规定同调面上的应力点 σ 和约束界面上的相关点 $\bar{\sigma}$ 有相同的切线斜度。这就可以决定 $\bar{n}_f = n_f = n_0$ 和 \bar{K} 。我们采用插值公式，用 δ/δ_0 作为参量，它代表当时的同调曲面和约束曲面之比。当 $\delta/\delta_0 \rightarrow 1$ 时， $K \rightarrow \bar{K}$ ，我们采用下式

$$K = \bar{K} + (K - \bar{K}) \left(1 - \frac{\delta}{\delta_0}\right)^{\nu} \tag{4.5}$$

(1) 考虑从约束界面的原点 O 出发达到的应力点 σ 的特性。如图 17a，在这一条加载路线上，特性和模型 IV 完全相同。设在到达 P_2 点后，出现逆向载荷或卸载（图 17b），约束界面上的相关点为 \bar{P}_2 ，在这里有两个同调曲面是有记忆的，即第一事件的同调曲面 C_1 ，和第二

事件的同调曲面 C_2 .

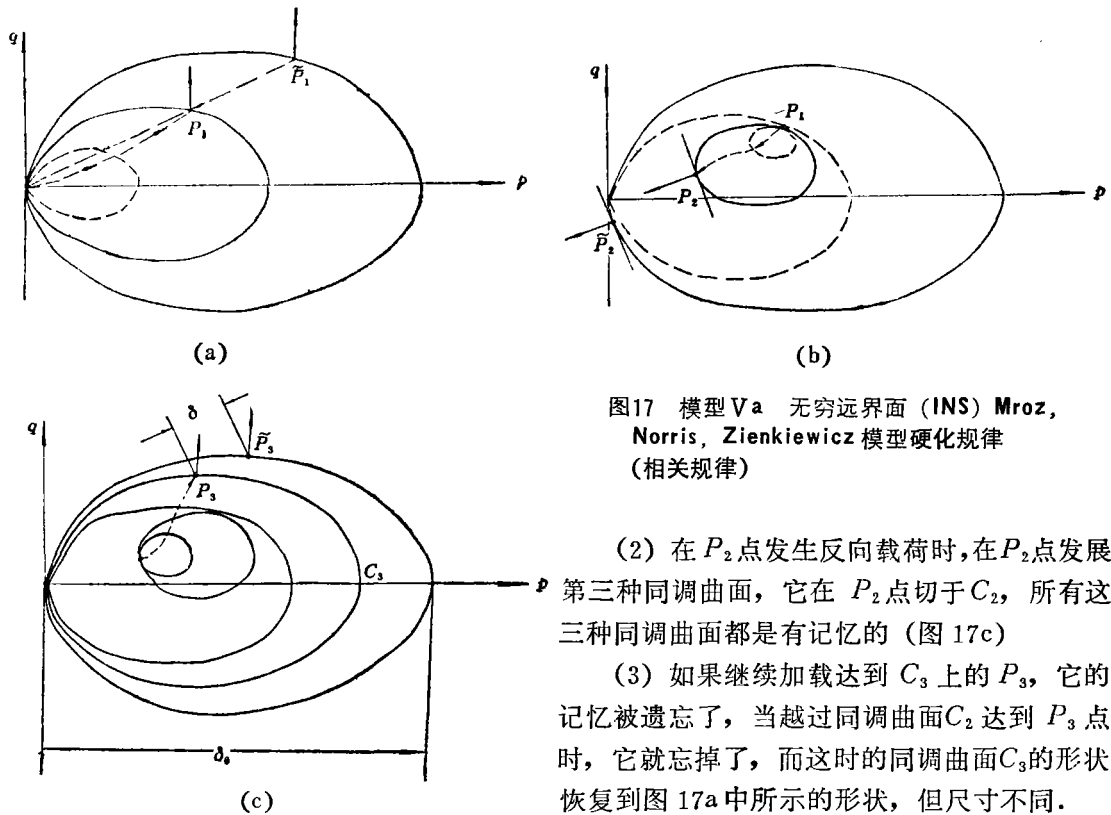


图17 模型Va 无穷远界面 (INS) Mroz, Norris, Zienkiewicz 模型硬化规律 (相关规律)

(2) 在 P_2 点发生反向载荷时,在 P_2 点发展第三种同调曲面,它在 P_2 点切于 C_2 ,所有这三种同调曲面都是有记忆的 (图 17c)

(3) 如果继续加载达到 C_3 上的 P_3 ,它的记忆被遗忘了,当越过同调曲面 C_2 达到 P_3 点时,它就忘掉了,而这时的同调曲面 C_3 的形状恢复到图 17a 中所示的形状,但尺寸不同.

这个规则在原则上讲很简单,但在一些加载历史中,常常要记忆许多个反向的同调曲面.

这个模型有多方面适用的特性,但不能收缩,在未脱水的情况下,不容许出现液化,这和模型 I 相似.它也和模型 II 相似,收缩能改进性能.

模型 V (b) 无穷远界面的修正模型

为了节省贮存量,这个模型只保持最后一个反向载荷的同调曲面的记忆.这个模型要求这个曲面有特定的移位规则和硬化规则.它和模型 I 相像,但曲面的直径是变化着的.对最后一个反向载荷同调曲面而言,特性和模型 Va 相同.

模型 VI 收缩的约束界面模型

这类模型的典型是 Carter, Booker, Wroth(1980)^[2] 和 Balladi(1978) 所提出来的.他们的主要目的是在未脱水的条件下求得循环加载的压实密度,或由此产生的完全液化.

我们将只讨论 Carter-Wroth 模型,把这个模型归入这个系统的道理并不充分,在这个模型中,约束界面内侧并不发生塑性应变,但是,当弹性卸载时,约束界面出现尺寸收缩现象.在图 18 中, P 点的卸载是由 $n_f = \bar{n}_f$ 所规定的,收缩规则为

$$\frac{d\delta_0}{\delta_0} = \theta \frac{d\delta}{\delta} \tag{4.6}$$

这种收缩只在卸载时出现,或即在 $d\delta < 0$ 时出现,其中 $\theta = 0.01 \sim 0.1$. 在循环加载中,约束界面逐步缩小,而且在未脱水的条件下,液化型破坏一定会发生.

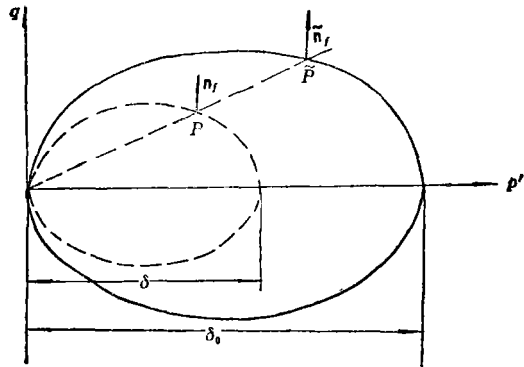


图18 CALTER-WROTH 模型

这个模型和其它模型不同，在循环加载中，约束界面连续减小（这和模型 I，IV，V 相反）；在循环加载试验中，材料破坏载荷较小。这是真的吗？能有实验证实的确有这种特性的材料吗？

五、结 束 语

在这篇短文中，我们 (a) 引用了一种非常一般性的塑性定义；(b) 指出土壤类材料在单调加载和循环加载中可以采用的几种和

时间无关的模型，每一种模型的详细说明散见其它文献，但我们相信，新的体制提供了各种特性的模型的更易理解和更一般的解释。

其结果可以用两种应力不变量的空间描写，也很易延拓到有第三不变量的情况中去。为了发展到用所有应力分量的空间来描写这个问题，我们必须假设，一切塑性应变在屈服约束界面上是用 $\partial F / \partial \sigma$ 来表示它的方向的。如果这种情况满足，则通过标准变换（见辛克维奇著有限元法 1977^[20]），就能找到所有应变分量。

把本文所述模型推广到粘塑性区域中去，并使它们包括时间效应的问题，曾由 Mroz, Norris, Zienkiewicz (1981)^[13] 等讨论过。

参 考 文 献

1. Bazant, Z., Endochronic in elasticity and incremental plasticity, *Int. J. Solid Struct.*, 14, (1978), 691—714.
2. Carter, J. P., Booker, J. R. and Worth, C. P., A critical state soil for cyclic loading, in *Soils under Cyclic and Transient Loading*, ed. Panade, G. N. and Zienkiewicz, O. C., John Wiley, (to be published).
3. Dafalias, Y. F. and Popov, E. P., A model of non-linearly hardening materials for complex loadings, *Acta Mechanica*, 21, (1975), 173—192.
4. Dafalias, Y. F., On cyclic and anisotropic plasticity, i) A general model including material behaviour under stress reversals, ii) anisotropic hardening for initially orthotropic materials, Ph. D. Thesis, University of California, Berkeley, U. S. A., (1975).
5. Dafalias, Y. F. and Herrmann, L. R., A bounding surface soil plasticity model, *Int. Symp. on Soils under Cyclic and Transient Loading*, Swansea, U. K. (1980).
6. Drucker, D. C., Gibson, R. E. and Henkel, D. J., Soil mechanics and work hardening theories of plasticity, *Trans. A. S. C. E.*, 122, (1957), 288—346.
7. Krieg, R. D., A practical two-surface plasticity theory, *J. Appl. Mech.*, E42, (1975), 641—646.
8. Lade, P. V. and Duncan, J. M., Elastoplastic stress-strain theory for cohesionless soil, *J. Geotech. Eng. Div., Proc. A. S. C. E.*, 101, Gt 10, (1975), 1037—1033.
9. Mroz, Z., On the description of anisotropic work-hardening, *J. Mech. Phys. Solids*, 15, (1967), 163—175.

10. Mroz, Z., Norris, V. A. and Zienkiewicz, O. C., An anisotropic hardening model for soils and its application to cyclic loading, *Int. J. Num. Anal. Math. Geom.*, 2, (1978), 203-221.
11. Mroz, Z., Norris, V. A. and Zienkiewicz, O. C., Application of an anisotropic hardening model in the analysis of elastoplastic deformation of soils, *Geotechnique*, 29, (1979), 1-34.
12. Mroz, Z., Norris, V. A. and Zienkiewicz, O. C., Simulation of behaviour of soils under cyclic loading by using a more general hardening rule, *Research report, Department of Civil Engineering, University of Wales, Swansea, U. K.*(1980).
13. Mroz, Z., Norris, V. A. and Zienkiewicz, O. C., An anisotropic critical state model for soils subjected to cyclic loading, to be published in *Geotechnique*.
14. Nova, R. and Wood, D. M., A constitutive model for sand in triaxial compression, *Int. J. Num. Anal. Math. Geom.*, 3, (1979), 255-278.
15. Pistruszczak, At. and Mroz, Z., Description of mechanical behaviour of anisotropically consolidated clays, *Proc. Euromech. Aoll., Anisotropy in Mechanics*, Grenoble, Noordhoff Int. Publ. (1978).
16. Roscoe, K. H. and Burland, J. B., On the generalized stress-strain behaviour of "wet" clay, in the *Engineering Plasticity*, ed. Heyman, J. and Leckie, F. A., Cambridge Univ. Press, (1968), 535-609.
17. Schofield, A. and Worth, P., *Critical State Soil Mechanics*, McGraw-Hill, London, (1968).
18. Wilde, P., Two invariant depending models of granular media, *Arch. Mech. Steo.*, 29, (1977), 799-809.
19. Zienkiewicz, O. C., Valliappan, S. and King, I. P., Elastoplastic solutions of engineering problems, initial stress, finite element approach, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, (1969), 75-100.
20. Zienkiewicz, O. C., *The Finite Element Method*, third edition, (1977).

Generalized Plasticity and Some Models for Geomechanics

O. C. Zienkiewicz

(Dept. of Civil Engineering, University of Wales, Swansea, U. K.)

Abstract

In this brief note, we have (a) introduced a very general form of plasticity definition; (b) indicated several types of models used for monotonic and transient loading of soil-like materials, which do not depend on time effects. The details of each form are given elsewhere, but we believe that the new framework provides an easier and more general interpretation of a variety of behaviour form.