

应用功的互等定理求解具有复杂边界条件的矩形板的挠曲面方程*

付宝连

(黑龙江齐齐哈尔东北重型机械学院, 1981年11月10日收到)

摘 要

本文指出, 在一定的条件下, 功的互等定理等价于位移叠加原理. 在[6]的基础上进一步推广了功的互等定理的应用, 因而为求解在复杂受力情况下, 具有复杂边界条件的矩形板和直梁的挠曲面方程提供了一个简便、通用的新计算方法.

一、引 言

功的互等定理是弹性力学的一个经典性原理. 它^[1]指出, 在两个相同的线性弹性体之间, 如果它们的应力和应变状态是真实的, 不管此两个线性弹性体的边界条件是否相同, 均可有功的互等定理存在. 功的互等定理在结构力学中有着重要的应用, 如求影响线问题便是其中之一.

最小势能原理等价于平衡方程, 最小余能原理等价于协调方程, 如此等等. 关于变分原理文献[2]给出了详尽的叙述. 而现在本文指出, 在一定的条件下功的互等定理等价于位移叠加原理. 功的互等定理这一新被发现的功能有着重要的应用价值.

现有不同的约束两个相同线性弹性体. 其一只受一单位集中载荷的作用而且作用点为一流动变量, 这个物体被称为第一系统或基本系统. 另者受实际载荷作用的被称为第二系统或真实系统. 当于此两系统之间应用功的互等定理时, 则功的互等定理等价于位移叠加原理. 功的互等定理与位移叠加原理的等价性必须服从关于该两个系统的前述约定条件.

首先, 如所周知, 位移叠加原理对求解有关问题给出了一个较简单的方法. 但是, 对于以解析法为基础的位移叠加原理, 我们必须分别求解每一类载荷作用下的每一个问题而后我们才可以将每一解叠加而成全解, 也就是说, 我们必须分别求解在每一类载荷作用下的每一个边值问题, 而最后才能得到在全部载荷作用下的全解. 但是, 以功的互等定理为基础的位移叠加原理不仅指出了位移的叠加意义而且径直给出了在每一类载荷作用下的每一个解, 这一解等于基本系统的已知边界力或已知位移乘以真实系统的相应位移或力的积分. 因此, 以功

* 钱伟长推荐.

的互等定理为基础的位移叠加原理较之于以解析法为基础的位移叠加原理要简单。

其次, 如所周知, 边值问题的复杂性就是难于满足复杂的边界条件. 如今, 在具有简单的边界条件的线性弹性体与具有复杂边界条件的同一物体之间应用功的互等定理, 于是具有复杂边界条件的位移解能被具有简单边界条件的位移解表达出来. 功的互等定理等价于位移叠加原理, 推广功的互等定理的应用为求解具有复杂边界条件的边值问题找到了一个新的方法.

对于一般线性弹性体而言, 本文说明了功的互等定理与位移叠加原理的等价性. 这一等价性对于工程中大量应用的梁、板和壳类结构有着重要的应用价值. 下面我们只限于应用这一原理于直梁和平板结构.

首先, 我们给出了用在单位集中载荷作用下具有简单边界条件的同一板的解表达的复杂受力情况, 复杂边界条件的弹性薄板和矩形板的挠曲面方程的一般表达式.

其次, 我们应用前述表达式具体地计算了一受均布载荷作用的悬臂矩形板的挠曲面方程. 同时还给出了一些其它算例. 计算表明, 我们所提出的方法是简单、方便和通用的.

二、基本原理

对于具有两个不同边界条件系统两个不同载荷系统的两个相同的线性弹性体而言, 如果两系统都处于真实状态, 那么在该两系统之间有功的互等定理存在. 我们假设第一系统 U_1, V_1, W_1 表示位移分量, P_{x1}, P_{y1}, P_{z1} 表示表面力分量, 而单位集中载荷被作用于流动坐标点 (ξ, η, ζ) 上. 第二系统的边界位移分量为 U_2, V_2, W_2 , 而 P_{x2}, P_{y2}, P_{z2} 和 X_2, Y_2, Z_2 分别表示表面力分量和体积力分量, 并且以 $\Delta_2(\xi, \eta, \zeta)$ 表示第二系统的位移方程. 在此两系统之间应用功的互等定理, 则有

$$\Delta_2(\xi, \eta, \zeta) + \iint_{S_1} (P_{x1}U_2 + P_{y1}V_2 + P_{z1}W_2)_{(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)} ds = \iiint_{\Omega} (X_2U_1 + Y_2V_1 + Z_2W_1)_{(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)} dxdydz + \iint_{S_2} (P_{x2}U_1 + P_{y2}V_1 + P_{z2}W_1)_{(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)} ds \quad (2.1)$$

式(2.1)中的脚注 $(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$ 表示相应的被积函数是独立变量 $(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$ 的函数.

从式(2.1)可以看出, 将式(2.1)的所有积分项移到等号右边, 则第二系统的位移方程 $\Delta_2(\xi, \eta, \zeta)$ 可表示为三个积分之和. 每个积分项等于三个被积函数积分的和而且每一被积函数等于第一系统的已知边界力或已知位移与第二系统的相应的位移或力相乘积. 这就表明, (1)在关于该两系统的前述约定条件下应用功的互等定理时, 功的互等定理等价于位移叠加原理; (2)每一被叠加的位移等于第一系统的已知边界力或已知位移与第二系统的相应的位移或力的乘积的积分(对于矩形薄板, 第二系统的边界位移或边界力是易于假设的). 这一方法比解析法要简单得多.

将这一表达式应用于弹性薄板, 如假设具有真实边界条件在真实载荷作用下的平板被称为第二系统, 而在流动坐标点 (ζ, η) 处作用一单位集中载荷及具有简单的边界条件的同一平板被称为第一系统, 于是式(2.1)成为

$$W_2(\xi, \eta) = \iint_{\Omega} q_2(x, y)W_1(x, y, \xi, \eta) dxdy + \sum_{i=1}^m P_{2i}W_1(x_i, y_i, \xi, \eta)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^n M_{2xj} \left[\frac{\partial}{\partial x} W_1(x, y, \xi, \eta) \right]_{\substack{x=x_j \\ y=y_j}} \\
& + \sum_{k=1}^p M_{2yk} \left[\frac{\partial}{\partial y} W_1(x, y, \xi, \eta) \right]_{\substack{x=x_k \\ y=y_k}} + \int_C \left(\frac{\partial M_{2ns}}{\partial s} \right. \\
& + Q_{2n} \Big|_{(x,y)} W_1(x, y, \xi, \eta) ds - \int_C (M_{2n})_{(x,y)} \frac{\partial}{\partial n} W_1(x, y, \xi, \eta) ds \\
& - \int_C \left(\frac{\partial M_{1ns}}{\partial s} + Q_{1n} \right)_{(x,y,\xi,\eta)} W_2(x, y) ds + \int_C (M_{1n})_{x,y,\xi,\eta} \frac{\partial}{\partial n} W_2(x, y) ds
\end{aligned} \tag{2.2}$$

如进一步假设, 在流动坐标点 (ξ, η) 处作用一单位集中载荷的简支矩形板为第一系统, 而具有真实边界条件有真实载荷作用的同一矩形平板为第二系统, 则第二系统的挠曲面方程为

$$\begin{aligned}
W_2(\xi, \eta) = & \int_0^a \int_0^b q_2(x, y) W_1(x, y, \xi, \eta) dx dy + \sum_{i=1}^m P_{2i} W_1(x_i, y_i, \xi, \eta) \\
& + \sum_{j=1}^n M_{2xj} \left[\frac{\partial}{\partial x} W_1(x, y, \xi, \eta) \right]_{\substack{x=x_j \\ y=y_j}} \\
& + \sum_{k=1}^p M_{2yk} \left[\frac{\partial}{\partial y} W_1(x, y, \xi, \eta) \right]_{\substack{x=x_k \\ y=y_k}} \\
& - \left[\int_0^b M_{2x}(y) \frac{\partial}{\partial x} W_1(x, y, \xi, \eta) dy \right]_0^a - \left[\int_0^a M_{2y}(x) \frac{\partial}{\partial y} W_1(x, y, \xi, \eta) dx \right]_0^b \\
& - \left[\int_0^b \left(\frac{\partial M_{x1}}{\partial x} - 2 \frac{\partial M_{xy1}}{\partial y} \right)_{(x,y,\xi,\eta)} W_2(y) dy \right]_0^a \\
& - \left[\int_0^a \left(\frac{\partial M_{y1}}{\partial y} - 2 \frac{\partial M_{xy1}}{\partial x} \right)_{(x,y,\xi,\eta)} W_2(x) dx \right]_0^b - \left[2 M_{xy1(x,y,\xi,\eta)} W_2(x, y) \right]_{0,0}^{a,b} \\
& - \left[2 M_{xy1(x,y,\xi,\eta)} W_2(x, y) \right]_{0,0}^{a,0}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

对于直梁情况, 取在流动坐标点 (ξ) 处作用有单位集中载荷的简支梁为第一系统, 而取在真实载荷作用下并具有真实边界条件的同一直梁为第二系统, 则第二系统的挠曲轴方程为

$$\begin{aligned}
W_2(\xi) = & \int_0^l q_2(x) W_1(x, \xi) dx + \sum_{i=1}^m P_{2i} W_1(x_i, \xi) + \sum_{j=1}^n M_{2xj} \left[\frac{d}{dx} W_1(x, \xi) \right]_{x=x_j} \\
& - \left[M_{2x} \frac{d}{dx} W_1(x, \xi) \right]_0^l - \left[Q_{x1}(x, \xi) W_2 \right]_0^l
\end{aligned} \tag{2.4}$$

上述诸符号的意义与惯用的相同。

在流动坐标点处作用有单位集中载荷的简支矩形板和简支梁的解是已知的, 于是具有复

杂边界条件在复杂载荷作用下的同一平板, 同一直梁的挠曲方程均可被式 (2.3) 和 (2.4) 表示出来. 下面将给出求解直梁和矩形平板挠曲方程的算例.

三、应用功的互等定理求解直梁的挠曲轴方程

首先来计算如图 1 (a) 所示外伸臂等直梁的挠曲轴方程.

如取如图 1 (b) 所示受单位集中力作用的同一简支梁为第一系统, 图 1 (a) 梁为第二系统, 于此两系统间应用功的互等定理, 则有

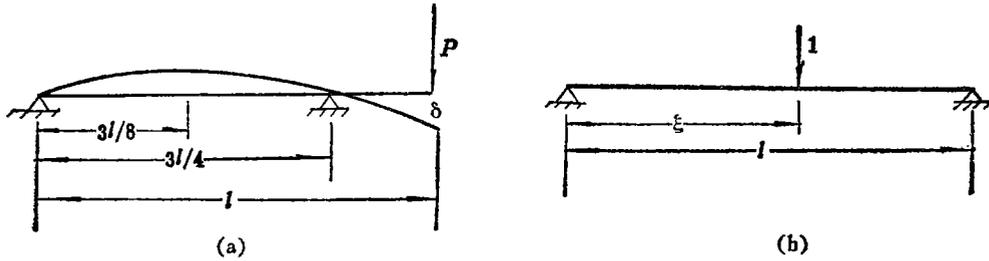


图 1

$$W_2'(\xi) - \frac{\xi}{l} \delta = -\frac{4}{3} P \frac{(l-\xi)}{6EJl} \left\{ [l^2 - (l-\xi)^2] \frac{3l}{4} - \left(\frac{3l}{4}\right)^3 + l - \xi \left(\frac{3l}{4} - \xi\right)^3 \right\}, \quad 0 \leq \xi \leq \frac{3l}{4} \quad (3.1)$$

$$W_2(\xi) - \frac{\xi}{l} \delta = -\frac{4}{3} P \frac{(l-\xi)}{6EJl} \frac{3l}{4} \left[l^2 - \left(\frac{3l}{4}\right)^2 - (l-\xi)^2 \right], \quad \frac{3}{4} \leq \xi \leq l \quad (3.2)$$

注意到, $W_2'(\frac{3l}{4}) = 0$, 则得 $\delta = \frac{Pl^3}{48EJ}$, 最后得到

$$W_2'(\xi) = \frac{P\xi}{18EJ} \left(\xi^2 - \frac{9}{16} l^2 \right), \quad 0 \leq \xi \leq \frac{3l}{4} \quad (3.3)$$

$$W_2(\xi) = \frac{P}{6EJ} \left(\frac{9}{16} l^3 - \frac{39}{16} l^2 \xi + 3l\xi^2 - \xi^3 \right), \quad \frac{3l}{4} \leq \xi \leq l \quad (3.4)$$

式 (3.3)、(3.4) 与积分法所得结果全同.

下面给出用三角级数表示的梁的挠曲轴方程的表达式. 图 2 所示受力情况及约束情况的梁为第二系统, 在此第二系统与图 1 (b) 第一系统之间应用功的互等定理, 同时注意到图 1 (b) 第一系统的挠曲轴方程为

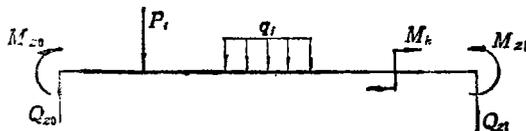


图 2

$$W_1(x, \xi) = \frac{1}{EJ} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2l^3}{(m\pi)^4} \sin \frac{m\pi\xi}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} \quad (3.5)$$

则第二系统挠曲轴方程为

$$\begin{aligned}
 W_2(\xi) = & \sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2P_i l^3}{(m\pi)^4} \sin \frac{m\pi\xi}{l} \sin \frac{m\pi x_i}{l} + \int_0^l q_i(x) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2l^3}{(m\pi)^4} \sin \frac{m\pi\xi}{l} \cdot \sin \frac{m\pi x}{l} dx \\
 & + \sum_{k=1}^p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2M_k l^2}{(m\pi)^3} \sin \frac{m\pi\xi}{l} \cos \frac{m\pi x_k}{l} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2M_{m1} l^2}{(m\pi)^3} \sin \frac{m\pi\xi}{l} \cos m\pi \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2M_{m0} l^2}{(m\pi)^3} \sin \frac{m\pi\xi}{l} + \frac{\xi}{l} W_2(l) + \frac{l-\xi}{l} W_2(0) \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

应用式 (3.6) 计算图 1 (a) 外伸臂梁的挠曲轴方程, 则得

$$W_2(\xi) = 0.02057 \frac{\xi}{l} \frac{Pl^3}{EJ} - \frac{8Pl^3}{3EJ} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m\pi)^4} \sin \frac{3m\pi}{4} \sin \frac{m\pi\xi}{l} \quad (3.7)$$

取级数部分的前二项, 则得近似结果为

$$W_2\left(\frac{3l}{8}\right) = -0.00899 \frac{Pl^3}{EJ}$$

$$W_2(l) = 0.02057 \frac{Pl^3}{EJ}$$

前者的误差为 2.4%, 后者的误差为 1.2%, 负号表示位移方向与单位集中力反向。

四、应用功的互等定理求解矩形板的挠曲面方程

四边固定受均布载荷作用矩形板的挠曲面方程

我们取在一流动坐标 (ξ, η) 点处有一单位集中力作用的简支矩形板为第一系统, 如图 3 (a) 所示; 而取四边固定受均布载荷作用的同一矩形板为第二系统, 如图 3 (b) 所示。注意到第一系统的挠曲面方程为

$$W_1(x, y, \xi, \eta) = \frac{4}{\pi^4 abD} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (4.1)$$

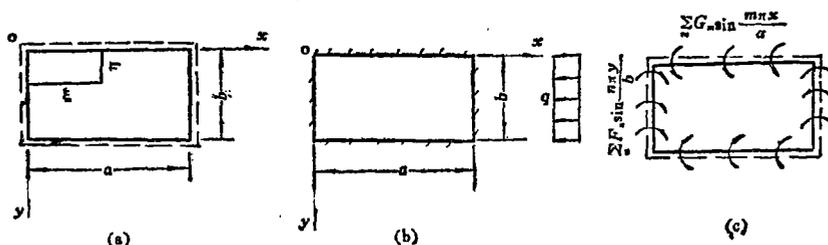


图 3

在图 3 (a) 与图 3 (c) 之间应用功的互等定理, 则有

$$\begin{aligned}
 W_2(\xi, \eta) = & \int_0^a \int_0^b q_0 W_1(x, y, \xi, \eta) dx dy + 2 \int_0^b \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} F_n \sin \frac{n\pi y}{b} \left[\frac{\partial}{\partial x} W_1(x, y, \xi, \eta) \right]_{x=0} dy \\
 & + 2 \int_0^a \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} G_m \sin \frac{m\pi x}{a} \left[\frac{\partial}{\partial y} W_1(x, y, \xi, \eta) \right]_{y=0} dx \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

将式(4.1)代入式(4.2)中, 经过计算则得

$$\begin{aligned}
 W_2(\xi, \eta) = & \frac{4}{\pi^2 ab D} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \left(\frac{4abq_0}{\pi^2 mn} + \frac{m\pi b}{a} F_n + \frac{n\pi a}{b} G_m \right) \\
 & \cdot \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{n\pi \eta}{b} \quad (4.3)
 \end{aligned}$$

由于固定边转角为零, 则得

$$\left. \begin{aligned}
 \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \left(\frac{4abq_0}{\pi^2 n} + \frac{m\pi a}{b} G_m + \frac{m^2 \pi b}{a} F_n \right) = 0 \\
 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \left(\frac{4abq_0}{\pi^2 m} + \frac{m\pi b}{a} F_n + \frac{n^2 \pi a}{b} G_m \right) = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

解方程组(4.4)可求出 F_n 、 G_m , 因而式(4.3)最后被确定。

从前述求解过程易于看出, 应用功的互等定理, 同时根据在流动坐标点 (ξ, η) 处作用有一单位集中载荷的简支板的已知解(4.1)是易于求出解(4.3)的。这个方法比基于解析法的位移叠加原理要简单。

这个例子说明了我们所提出的方法是简单的、方便的, 下面我们将计算受均布载荷作用悬臂矩形板的弯曲, 以此来说明本法的通用性。

为计算弯曲的悬臂板, 我们取一如图4(a)所示受一单位集中载荷作用的同一简支矩形板为基本系统。其挠曲面方程如式(4.1), 也可以将其写成收敛较快的下列两种形式

$$\begin{aligned}
 W_0(x, y, \xi, \eta) = & \frac{a^2}{\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \left[1 + \beta_m \coth \beta_m - \frac{\beta_m(b-y)}{b} \coth \frac{\beta_m(b-y)}{b} - \frac{\beta_m \eta}{b} \coth \frac{\beta_m \eta}{b} \right] \\
 & \cdot \frac{1}{m^3 \sinh \beta_m} \sinh \frac{\beta_m \eta}{b} \sinh \frac{\beta_m(b-\eta)}{b} \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (4.5)
 \end{aligned}$$

这里 $\beta_m = \frac{m\pi b}{a}$, $y \geq \eta$ 。

当 $y < \eta$ 时, 在式(4.5)中 $b-y$ 代以 y , η 代以 $b-\eta$ 。

$$\begin{aligned}
 W_0(x, y, \xi, \eta) = & \frac{b^2}{\pi^3 D} \sum_{n=1}^{\infty} \left[1 + \alpha_n \coth \alpha_n - \frac{\alpha_n(a-x)}{a} \coth \frac{\alpha_n(a-x)}{a} - \frac{\alpha_n \xi}{a} \coth \frac{\alpha_n \xi}{a} \right] \\
 & \cdot \frac{1}{n^3 \sinh \alpha_n} \sinh \frac{\alpha_n \xi}{a} \sinh \frac{\alpha_n(a-\xi)}{a} \sin \frac{n\pi \eta}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

这里 $\alpha_n = \frac{n\pi a}{b}$, $x \geq \xi$.

当 $x \leq \xi$ 时, 在式(4.6)中 $a-x$ 代以 x , ξ 代以 $a-\xi$.

在计算悬臂矩形板的弯曲时, 我们将要用到单位载荷基本系统的相应关系, 它们是

$$\left(\frac{\partial W_0}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{a^2}{\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\beta_m}{b}\right) \left[\beta_m \coth \beta_m - \frac{\beta_m(b-\eta)}{b} \coth \frac{\beta_m(b-\eta)}{b} \right] \frac{1}{m^3 \sinh \beta_m} \cdot \sinh \frac{\beta_m(b-\eta)}{b} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (4.7)$$

$$(V_{0y})_{y=b} = \frac{1}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -2 + (1-\nu) \left[-\beta_m \coth \beta_m + \frac{\beta_m \eta}{b} \coth \frac{\beta_m \eta}{b} \right] \right\} \frac{1}{\sinh \beta_m} \sinh \frac{\beta_m \eta}{b} \cdot \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (4.8a)$$

$$(V_{0y})_{y=0} = \frac{4}{\pi ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \left[\left(\frac{n}{b}\right)^3 + (2-\nu) \left(\frac{n}{b}\right) \left(\frac{m}{a}\right)^2 \right] \cdot \sin \frac{n\pi\eta}{b} \cos n\pi \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (4.8b)$$

$$(V_{0x})_{x=0} = \frac{1}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 2 + (1-\nu) \left[-\alpha_n \coth \alpha_n + \frac{\alpha_n \xi}{a} \coth \frac{\alpha_n \xi}{a} \right] \right\} \frac{1}{\sinh \alpha_n} \sinh \frac{\alpha_n \xi}{a} \cdot \sin \frac{n\pi\eta}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (4.9a)$$

$$(V_{0x})_{x=0} = \frac{1}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 2 + (1-\nu) \left[\alpha_n \coth \alpha_n - \frac{\alpha_n(a-\xi)}{a} \coth \frac{\alpha_n(a-\xi)}{a} \right] \right\} \frac{1}{\sinh \alpha_n} \cdot \sinh \frac{\alpha_n(a-\xi)}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$(V_{0x})_{x=0} = \frac{4}{\pi ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \left[\left(\frac{m}{a}\right)^3 + (2-\nu) \left(\frac{m}{a}\right) \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right] \sin \frac{m\pi\xi}{a} \cos m\pi \sin \frac{n\pi\eta}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (4.9b)$$

$$(V_{0x})_{x=0} = \frac{4}{\pi ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \left[\left(\frac{m}{a}\right)^3 + (2-\nu) \left(\frac{m}{a}\right) \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right] \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$[(R_0)]_{\substack{x=0 \\ y=b}} - (R_0)_{\substack{x=0 \\ y=b}} = \frac{8(1-\nu)}{\pi^2 ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \left(\frac{m}{a}\right) \left(\frac{n}{b}\right) \\ \cdot \cos n\pi (\cos m\pi - 1) \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} \quad (4.10)$$

现在来计算悬臂矩形板的弯曲。解除悬臂板固定边的弯曲约束代以弯矩 $\sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} G_m \sin \frac{m\pi x}{a}$

的作用，如图 4 (c) 所示。假设三个自由边的位移方程分别为

$$W(y)_{x=0} = W(y)_{x=a} = K \frac{y}{b} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$W(x)_{y=b} = K + \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} B_m \sin \frac{m\pi x}{a}$$

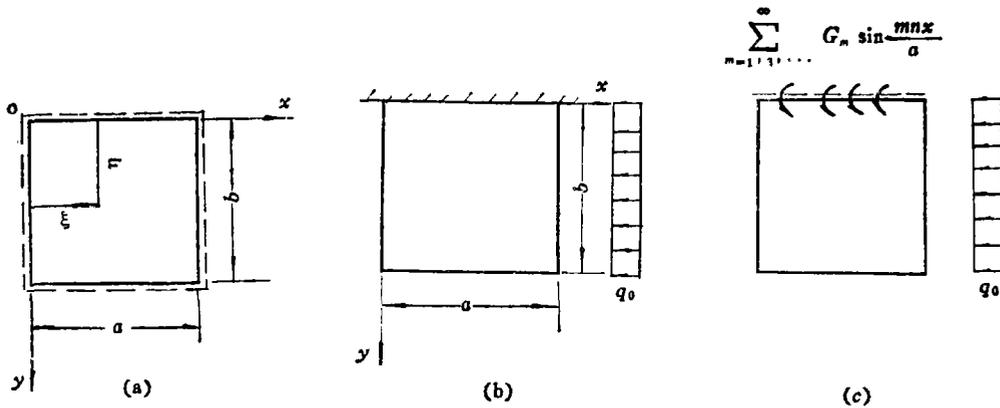


图 4

并且在图 4 (a) 基本系统与图 4 (c) 真实系统之间应用功的互等定理，则得悬臂矩形板的挠曲面方程为

$$W(\xi, \eta) = \int_0^a \int_0^b q_0 W_0(x, y, \xi, \eta) dx dy + \int_0^a \left(\frac{\partial W_0}{\partial y} \right)_{y=0} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} G_m \sin \frac{m\pi x}{a} dx \\ - \int_0^a (V_{0y})_{y=b} \left(K + \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} B_m \sin \frac{m\pi x}{a} \right) dx - \int_0^b [(V_{0x})_{x=a} - (V_{0x})_{x=0}] \left(K \frac{y}{b} \right. \\ \left. + \sum_n^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi y}{b} \right) dy - [(R_0)_{\substack{x=0 \\ y=b}} - (R_0)_{\substack{x=0 \\ y=b}}] K \quad (4.11)$$

方程式 (4.11) 应满足边界条件

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial W}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} &= 0 \\ \left[\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 W}{\partial \xi^2 \partial \eta}\right]_{\eta=b} &= 0 \\ \left[\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 W}{\partial \xi \partial \eta^2}\right]_{\xi=0, a} &= 0 \\ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta}\right)_{\xi=b, \eta=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.12a)$$

$$\left. \begin{aligned} W_{\eta=0} &= 0 \\ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}\right)_{\eta=b} &= 0 \\ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2}\right)_{\xi=a, 0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.12b)$$

由于挠曲面方程式 (4.11) 已予先满足了边界条件 (4.12b), 故式 (4.11) 最后只需满足 (4.12a) 即可.

据式 (4.1) 得出

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^b q_0 W_0(\xi, \eta, x, y) dx dy &= \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} \\ &= \frac{4q_0 a^4}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \left\{ 1 + \frac{1}{2 \cosh \frac{\beta_m}{2}} \left[\frac{\beta_m}{b} \left(\eta - \frac{b}{2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{b}{2} \right) \sinh \frac{\beta_m}{b} \left(\eta - \frac{b}{2} \right) - \left(2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\beta_m}{2} \tanh \frac{\beta_m}{2} \right) \cosh \frac{\beta_m}{b} \left(\eta - \frac{b}{2} \right) \right] \right\} \frac{1}{m^5} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \quad (4.13) \end{aligned}$$

注意到式 (4.7) 可得

$$\begin{aligned} \int_0^a \left(\frac{\partial W_0}{\partial y}\right)_{y=0} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} G_m \sin \frac{m\pi x}{a} dx &= \frac{a^2}{2\pi^2 D} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \left[-\frac{1}{\sinh^2 \beta_m} \beta_m \sinh \frac{\beta_m \eta}{b} \right. \\ &\quad \left. + \coth \beta_m \left(\frac{\beta_m \eta}{b} \right) \cosh \frac{\beta_m \eta}{b} - \frac{\beta_m \eta}{b} \sinh \frac{\beta_m \eta}{b} \right] \frac{1}{m^2} G_m \sin \frac{m\pi\xi}{a} \quad (4.14) \end{aligned}$$

注意到式 (4.8a) 可得

$$\begin{aligned} -\int_0^a (V_{0y})_{y=b} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} B_m \sin \frac{m\pi x}{a} dx &= \frac{1-\nu}{2} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{1-\nu} + \beta_m \cosh \beta_m \right) \sinh \frac{\beta_m \eta}{b} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\beta_m \eta}{b} \cosh \frac{\beta_m \eta}{b} \right] \frac{1}{\sinh \beta_m} \beta_m \sin \frac{m\pi\xi}{a} \quad (4.15) \end{aligned}$$

注意到式(4.9a)可得

$$-\int_0^b [(V_{0x})_{x=a} - (V_{0x})_{x=0}] \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi y}{b} dy = \frac{1-\nu}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\cosh \alpha_n - 1}{\sinh \alpha_n} \left[\left(\frac{\alpha_n}{\sinh \alpha_n} - \frac{2}{1-\nu} \right) \right. \right. \\ \left. \left. \sinh \frac{\alpha_n \xi}{a} + \frac{\alpha_n \xi}{a} \cosh \frac{\alpha_n \xi}{a} \right] + \frac{2}{1-\nu} \cosh \frac{\alpha_n \xi}{a} - \frac{\alpha_n \xi}{a} \sinh \frac{\alpha_n \xi}{a} \right\} A_n \sin \frac{n\pi \eta}{b} \quad (4.16)$$

注意到式(4.8b)、(4.9b)及式(4.10)可得

$$-\int_0^a (V_{0y})_{y=b} K dx - \int_0^b [(V_{0x})_{x=a} - (V_{0x})_{x=0}] K \frac{y}{b} dy - [(R_0)_{x=a, y=b} - (R_0)_{x=0, y=b}] K = \frac{K}{b} \eta \quad (4.17)$$

将式(4.13)–(4.17)代入式(4.11)即可得总的位移方程;再使其满足边界条件式(4.12a),即可得最后结果.本法所得到的结果与[4]全同,故不再进行数学计算.

对于非均布载荷 $q(x, y)$ 及有若干集中力同时作用的非对称情况,悬臂板自由边的位移方程相应地分别假设为

$$W(y)_{x=0} = K_1 \frac{y}{b} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{1n} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ W(y)_{x=a} = K_2 \frac{y}{b} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ W(x)_{y=b} = K_1 + \frac{(K_2 - K_1)}{a} x + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin \frac{m\pi x}{a}$$

固定边的弯矩方程为

$$M_y(x)_{y=c} = \sum_{m=1}^{\infty} G_m \sin \frac{m\pi x}{a}$$

悬臂矩形板相应的挠曲面方程为

$$W(\xi, \eta) = \int_0^a \int_0^b q(x, y) W_0(x, y, \xi, \eta) dx dy + \sum_{i=1}^n P_i W_0(x_i, y_i, \xi, \eta) + \int_0^a \left(\frac{\partial W_0}{\partial y} \right)_{y=0} \\ \cdot \sum_{m=1}^{\infty} G_m \sin \frac{m\pi x}{a} dx - \int_c^a (V_{0y})_{y=b} \left[K_1 + \frac{(K_2 - K_1)}{a} x + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin \frac{m\pi x}{a} \right] dx \\ - \int_0^b (V_{0x})_{x=a} \left(K_2 \frac{y}{b} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} \sin \frac{n\pi y}{b} \right) dy \\ + \int_0^b (V_{0x})_{x=0} \left(K_1 \frac{y}{b} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{1n} \sin \frac{n\pi y}{b} \right) dy - (R_0)_{x=a, y=b} K_2 + (R_0)_{x=0, y=b} K_1 \quad (4.18)$$

式(4.18)的计算方法与式(4.11)相同,故不再行计算.

参 考 文 献

1. 钱伟长, 叶开沅, 《弹性力学》, 科学出版社, (1980, 3).
2. 钱伟长, 《变分法及有限元》(上册), 科学出版社, (1980).
3. 张福范, 《弹性薄板》, 科学出版社, (1963).
4. 张福范, 悬臂矩形板的弯曲, 全国弹塑性力学学术交流会论文, (1980, 6).
5. Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S., *Theory of Plates and Shell*, Second Edition, (1959).
6. 付宝连, 求解位移方程的能量原理, 应用数学和力学, 2, 6 (1981).

Applications of the Reciprocal Theorem to Solving the Equations of the Deflection Surface of the Rectangular Plates with Various Edge Conditions

Fu Bao-lian

(*Northeast Heavy Machinery Institute, Heilongjiang*)

Abstract

This paper points out that on certain condition the reciprocal theorem is equivalent to the superposition principle of displacements. On the basis of ref. [6], applications of the reciprocal theorem are further extended, then a convenient, general and new method is presented for solving the equations of deflection surface of the rectangular plates and the straight beams with various edge conditions under various loads.