应用数学和力学，第3卷第3期（1982年5月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

随机泛函分析中可交换映象的随机不动点定理*

张石生

（四川大学数学系，1981年10月24日收到）

摘 要

随机不动点定理在随机泛函分析中是一重要问题．在可分完备的度量空间中的随机不动点定理Bharucha-Reid，王梓坤，Špaček，Hanš，Itoh 及作者等都曾进行过讨论（见[1-5，15-20，21]）．

在本文中我们对概率分析中可交换映象的随机不动点定理得出了几个新的结果，它推广了前述诸人工作中某些重要结果．在确定性情形也推广了 Jungck[6,7,8]，Das，Naik[9]，Rhoades[10]，及Ciric[11]的结果．

一、引　论

随机不动点理论在随机泛函分析中起到重要的作用．许多随机积分方程、随机微分方程和随机算子方程解的存在性的研究，往往引导到在各种类型的函数空间中讨论随机不动点的存在性问题．近年来由于随机泛函分析的发展，王梓坤[21]，Špaček[13]，Hanš[3]，Bharucha-Reid[1,2]，Itoh[4,5]，Kannan-Salehi[12]及作者的文章[15-20]等讨论过Polish空间（即可分完备的度量空间）中随机不动点定理及其在许多方面的应用的问题．

在本文中我们得出了随机分析中可交换映象的几个随机不动点定理．我们的结果推广了前述诸人的某些重要的结果．在确定性的情形，本文的结果也统一和改进了 Jungck[6,7,8]，Das，Naik[9]，Rhoades[10]，Ciric[11]中的某些结果．

二、预备知识和引理

本文处处假定(X,d)是一Polish空间，$(\Omega,\mathscr{F},P)$是一完备的概率测度空间，$(X,\mathscr{B})$是一可测空间，这里$\mathscr{B}$是X的一切 Borel 子集的σ-代数．

一映象 $x(\omega)$：$\Omega\to X$称为取值于X的随机变量，如果对任一集合 $B\in\mathscr{B}$，

* 周谟仁推荐．

$x^{-1}(B)=\{\omega\in\Omega,\ x(\omega)\in B\}\in\mathscr{F}$.

一算子 $f(\omega,x)$: $\Omega\times X\to X$ 称为连续的随机算子，如果对每一 $x\in X$，$f(\cdot,x)$是具值于X的随机变量，对每一 $\omega\in\Omega$，$f(\omega,\cdot)$关于 x 是连续的.

一随机变量 $\xi(\omega)$: $\Omega\to X$ 称为随机算子 $f(\omega,x)$: $\Omega\times X\to X$ 的随机不动点，如果 $f(\omega,\xi(\omega))=\xi(\omega)$ a.s.

以后，我们将用到下面的结果.

引理1. (Kannan, Salehi[12]). 设 $\xi(\omega)$是一X-值的随机变量，$f(\omega,x)$是一连续随机算子. 则 $f(\omega,\xi(\omega))$也是一X-值的随机变量.

本文处处假定 $f(\omega,x)$: $\Omega\times X\to X$ 是一连续的随机算子，$\{g_i(\omega,x)\}_{i=1}^{\infty}$: $\Omega\times X\to X$ 是与 f 可交换的连续随机算子序列，并且 f 和 g_i，$i=1,2,\cdots$满足下面的条件:

(Ⅰ)对每一$g_i(\omega,x),i=1,2,\cdots$和任意的 X-值的随机变量 $\xi(\omega)$: $\Omega\to X$，存在一X-值的随机变量$\eta_i(\omega)$: $\Omega\to X$，使得

$$P(\omega\in\Omega:\ g_i(\omega,\xi(\omega))=f(\omega,\eta_i(\omega)))=1 \tag{2.1}$$

(Ⅱ)存在一正整数的序列 $\{m_i\}_{i=1}^{\infty}$，使得对任意的正整数i,j和任意的$x,y\in X$，下式成立:

$$\begin{aligned}&P[\omega\in\Omega:\ d(g_i^{m_i}(\omega,x),g_j^{m_j}(\omega,y))\leqslant\mathscr{A}(\omega,\max\{d(f(\omega,x),\\&\quad f(\omega,y)),d(f(\omega,x),g_i^{m_i}(\omega,x)),d(f(\omega,y),g_j^{m_j}(\omega,y)),\\&\quad d(f(\omega,y),g_i^{m_i}(\omega,x)),d(f(\omega,x),g_j^{m}(\omega,y))\})]\\&\overset{\text{def.}}{=\!=}P(E_{ijxy})=1\end{aligned} \tag{2.2}$$

这里 $\mathscr{A}(\omega,t)$: $\Omega\times[0,\infty)\to[0,\infty)$是满足下面的条件($\mathscr{A}1$),($\mathscr{A}2$)(或($\mathscr{A}1$)，($\mathscr{A}3$))的随机函数.

($\mathscr{A}1$). 对每一固定的 $\omega\in\Omega$,$\mathscr{A}(\omega,\cdot)$是 t 的不减的右连续函数，而且对每一 $t\in[0,\infty)$，$\mathscr{A}(\cdot,t)$关于ω可测.

($\mathscr{A}2$). 对每一实数 $q\in[0,\infty)$，存在一与之相应的实数 $t(q)\in[0,\infty)$，使得

(a)　$$P\left(\omega\in\Omega:\ \sup_{t\in\{t:\ t\in[0,\infty),t\leqslant q+\mathscr{A}(\omega,t)\}}\{t\}\leqslant t(q)\right)\overset{\text{def.}}{=\!=}P(G_q)=1 \tag{2.3}$$

(b)　$$P\left(\omega\in\Omega:\ \lim_{n\to\infty}\mathscr{A}^n(\omega,t(q))=0\right)\overset{\text{def.}}{=\!=}P(H_q)=1 \tag{2.4}$$

这里 $\mathscr{A}^n(\omega,t(q))$是 $\mathscr{A}(\omega,t(q))$的 n 次迭代函数.

($\mathscr{A}3$). 对每一 $t>0$,

$$P(\omega\in\Omega:\ \mathscr{A}(\omega,t)<t)\overset{\text{def.}}{=\!=}P(K_t)=1 \tag{2.5}$$

而且

$$P(\omega\in\Omega:\ \lim_{t\to\infty}(t-\mathscr{A}(\omega,t)))\overset{\text{def.}}{=\!=}P(D)=1 \tag{2.6}$$

由假设条件(Ⅰ)和引理1，易于得出: 对每一$g_i(\omega,x),i=1,2,\cdots$和任意的 X-值随机变量 $\xi(\omega)$: $\Omega\to X$，存在一 X-值的随机变量 $\eta_i^*(\omega)$: $\Omega\to X$，使得

$$P(\omega\in\Omega:\ g_i^{m_i}(\omega,\xi(\omega))=f(\omega,\eta_i^*(\omega)))=1 \tag{2.7}$$

在前述诸条件下，现在我们定义一 X-值随机变量的序列 $\{x_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$ 如下：

对任一 X-值随机变量 $x_1(\omega)$，由(2.7)知存在 X-值随机变量 $x_2(\omega)$，使得

$$P(\omega\in\Omega:\ g_1^{m_1}(\omega,x_1(\omega))=f(\omega,x_2(\omega)))\overset{\text{def.}}{=\!=}P(E_1)=1$$

依次，如果已经定义了 X-值随机变量 $x_n(\omega)$，由(2.7)可定义 X-值随机变量 $x_{n+1}(\omega)$，使得

$$P(\omega\in\Omega:\ g_n^{m_n}(\omega,x_n(\omega))=f(\omega,x_{n+1}(\omega)))\overset{\text{def.}}{=\!=}P(E_n)=1,\quad n=1,2,\cdots \tag{2.8}$$

令

$$y_n(\omega)=g_n^{m_n}(\omega,x_n(\omega)),n=1,2\cdots \tag{2.9}$$

故

$$y_n(\omega)=f(\omega,x_{n+1}(\omega))\ \text{a.s.}\ n=1,2,\cdots \tag{2.9$'$}$$

由引理1，易知 $y_n(\omega)$ 是一 X-值的随机变量.

引理2. 设 $\mathscr{A}(\omega,t)$ 满足条件($\mathscr{A}$1)和($\mathscr{A}$2). 则由(2.9)定义的 X-值的随机变量的序列 $\{y_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$ 几乎必然地是一 Cauchy 序列.

证. 由 X 的可分性，f 和 $g_i,i=1,2,\cdots$ 的连续性和 $\mathscr{A}$ 关于 t 的右连续性，易知集合 A:

$$A=\Big(\bigcap_{i,j}^{\infty}\bigcap_{x\in X}\bigcap_{y\in X}E_{ijxy}\Big)\cap\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\Big)\cap\Big(\bigcap_{q\geq 0}G_q\Big)\cap\Big(\bigcap_{q\geq 0}H_q\Big)\in\mathscr{F},$$

而且 $P(A)=1$，又上式中的集合 E_{ijxy}, G_q, H_q, E_n 分别由(2.2), (2.3), (2.4)和(2.8)定义.

对任一固定的 $\omega\in A$，和任意的 i,j

$$\begin{aligned}d(y_i(\omega),\ y_j(\omega))&=d(g_i^{m_i}(\omega,x_i(\omega)),\ g_j^{m_j}(\omega,x_j,(\omega)))\\&\leqslant\mathscr{A}(\omega,\max\{d(f(\omega,x_i(\omega)),f(\omega,\ x_j(\omega)),\\&\qquad d(f(\omega,\ x_i(\omega)),\ g_i^{m}(\omega,x_i(\omega))),d(f(\omega,x_j(\omega)),\\&\qquad g_j^{m_j}(\omega,\ x_j(\omega))),d(f(\omega,\ x_j(\omega)),\ g_i^{m_i}(\omega,x_i(\omega))),\\&\qquad d(f(\omega,x_i(\omega)),\ g_j^{m_j}\ \omega,x_j(\omega)))\})\\&=\mathscr{A}(\omega,\max\{d(y_{i-1}(\omega),y_{j-1}(\omega)),d(y_{i-1}(\omega),y_i(\omega)),\\&\qquad d(y_{j-1}(\omega),y_j(\omega)),d(y_{j-1}(\omega),y_i(\omega)),d(y_{i-1}(\omega),y_j(\omega))\})\end{aligned}$$

于是由条件($\mathscr{A}$1)，对任意的正整数 $m,n(m<n)$，有

$$\sup_{m\leq i,j\leq n}d(y_i(\omega),y_j(\omega))\leqslant\mathscr{A}(\omega,\ \sup_{m-1\leq i,j\leq n}d(y_i(\omega),y_j(\omega))) \tag{2.10}$$

可是

$$\begin{aligned}&\sup_{1\leq i,j\leq n}d(y_i(\omega),y_j(\omega))\\&\qquad=\max\{\sup_{2\leq i,j\leq n}d(y_i(\omega),y_j(\omega)),\ \sup_{2\leq j\leq n}d(y_1(\omega),\ y_j(\omega))\}\end{aligned}$$

$$\leqslant \max\{\sup_{2\leqslant i,j\leqslant n} d(y_i(\omega),y_j(\omega)),d(y_1(\omega),y_2(\omega))+\sup_{3\leqslant j\leqslant n} d(y_2(\omega),y_j(\omega))\}$$

$$\leqslant d(y_1(\omega),y_2(\omega))+\sup_{2\leqslant i,j\leqslant n} d(y_i(\omega),y_j(\omega)) \tag{2.11}$$

于(2.10)中取 $m=2$，由(2.11)得

$$\sup_{1\leqslant i,j\leqslant n} d(y_i(\omega),y_j(\omega))\leqslant d(y_1(\omega),y_2(\omega))+\mathscr{A}(\omega,\sup_{1\leqslant i,j\leqslant n} d(y_i(\omega),y_j(\omega))) \tag{2.12}$$

令实数 $q=d(y_1(\omega),y_2(\omega))$，引用条件($\mathscr{A}2$)，由(2.12)即得：存在实数 $t(q)\in[0,\infty)$，使得

$$\sup_{1\leqslant i,j\leqslant n} d(y_i(\omega),y_j(\omega))\leqslant t(q) \tag{2.13}$$

由(2.10)和(2.13)得

$$\sup_{2\leqslant i,j\leqslant n} d(y_i(\omega),y_j(\omega))\leqslant \mathscr{A}(\omega,\sup_{1\leqslant i,j\leqslant n} d(y_i(\omega),y_j(\omega)))\leqslant \mathscr{A}(\omega,t(q))$$

重复这一程序，对任意的正整数 $m,n(m<n)$，可得

$$\sup_{m\leqslant i,j\leqslant n} d(y_i(\omega),y_j(\omega))\leqslant \mathscr{A}^{m-1}(\omega,t(q)) \tag{2.14}$$

令 $m\to\infty$（故也 $n\to\infty$），并引用条件($\mathscr{A}2$)，由(2.14)即得

$$0\leqslant \lim_{m\to\infty}\sup_{m\leqslant i,j\leqslant n} d(y_i(\omega),y_j(\omega)\leqslant \lim_{m\to\infty}\mathscr{A}^{m-1}(\omega,t(q))=0,\ \text{a.s.}$$

上式表明 $\{y_i(\omega)\}_{i=1}^{\infty}$ 对几乎一切的 $\omega\in\Omega$ 是 X-值的Cauchy 序列，即 $\{y_i(\omega)\}_{i=1}^{\infty}$ 几乎必然地为一 X-值的Cauchy序列．引理 2 证毕．

引理3. 设 $\mathscr{A}(\omega,t)$ 满足条件($\mathscr{A}1$)，($\mathscr{A}3$)．则

(i)对每一 $t>0$，

$$P(\omega\in\Omega:\ \lim_{n\to\infty}\mathscr{A}^n(\omega,t)=0)=1$$

(ii)对任意满足下面条件的非负实数的序列 $\{t_n\}$：

$$P(\omega\in\Omega:\ t_{n+1}\leqslant \mathscr{A}(\omega,t_n))=1,\quad n=1,2,\cdots\cdots$$

我们有 $\lim\limits_{n\to\infty} t_n=0$.

(iii)特别来说，对每一满足如下条件的实数：

$$t\in[0,\infty):\ t\leqslant \mathscr{A}(\omega,t)\ \text{a.s.，有}\ t=0.$$

证(i) 对每一 $t>0$，由($\mathscr{A}3$)得 $\mathscr{A}(\omega,t)<t$ a.s.

反复使用这一程序，即得

$$\mathscr{A}^n(\omega,t)\leqslant \mathscr{A}^{n-1}(\omega,t)\leqslant\cdots\cdots\leqslant \mathscr{A}(\omega,t)<t\ \text{a.s.}$$

由 $\mathscr{A}(\omega,t)$ 对 t 的右连续性，即得

$$\lim_{n\to\infty}\mathscr{A}^n(\omega,t)=\lim_{n\to\infty}\mathscr{A}(\omega,\mathscr{A}^{n-1}(\omega,t))=\mathscr{A}(\omega,\lim_{n\to\infty}\mathscr{A}^{n-1}(\omega,t))\ \text{a.s.}$$

令 $v(\omega,t)=\lim\limits_{n\to\infty}\mathscr{A}^n(\omega,t)$，由上式即得

$$v(\omega,t)=\mathscr{A}(\omega,v(\omega,t))\ \text{a.s.}$$

如果 $v(\omega,t)\neq 0$ a.s. 于是由条件($\mathscr{A}3$)得

$$v(\omega,t)=\mathscr{A}(\omega,v(\omega,t))<v(\omega,t)\ \text{a.s.}$$

这是一个矛盾，由此矛盾，即得 $v(\omega,t)=0$, a.s. 即

$$\lim_{n\to\infty}\mathscr{A}^n(\omega,t)=0,\ \text{a.s.}$$

(ii)由假定易于得出

$$t_{n+1}\leqslant\mathscr{A}(\omega,t_n)\leqslant\mathscr{A}^2(\omega,t_{n-1})\leqslant\cdots\cdots\leqslant\mathscr{A}^n(\omega,t_1)\ \text{a.s.}$$

于上式让 $n\to\infty$，并引用引理3(i)的结论，得

$$0\leqslant\lim_{n\to\infty}t_{n+1}\leqslant\lim_{n\to\infty}\mathscr{A}^n(\omega,t_1)=0\ \text{a.s.}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}t_n=0$$

(iii)于(ii)中令 $t_n=t$, $n=1,2,\cdots\cdots$. 引理3 (iii)的结论由(ii)可得

引理3 证毕.

利用引理3可证下面的引理

引理 4 设 $\mathscr{A}(\omega,t)$ 满足条件($\mathscr{A}1$), ($\mathscr{A}3$). 则由(2.9)定义的 X-值的随机变量的序列 $\{y_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$，几乎必然地是一Cauchy序列.

证. 如引理2一样可证，对任意的正整数 $m,n(m<n)$ 有

$$\sup_{m\leqslant i,j\leqslant n}d(y_i(\omega),y_j(\omega))\leqslant\mathscr{A}(\omega,\sup_{m-1\leqslant i,j\leqslant n}d(y_i(\omega),y_j(\omega)))\ \text{a.s.}\tag{2.10}$$

$$\sup_{1\leqslant i,j\leqslant n}d(y_i(\omega),\ y_j(\omega))\leqslant d(y_1(\omega),y_2(\omega))+\mathscr{A}(\omega,\ \sup_{1\leqslant i,j\leqslant n}d(y_i(\omega),y_j(\omega)))\ \text{a.s.}\tag{2.12}$$

由(2.12)我们可以证明

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{1\leqslant i,j\leqslant n}d(y_i(\omega),y_j(\omega))=\sup_{i,j\geqslant1}d(y_i(\omega),y_j(\omega))<\infty\ \text{a.s}$$

事实上，如不然，于是有

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{1\leqslant i,j\leqslant n}d(y_i(\omega),y_j(\omega))=\infty\ \text{a.s.}$$

利用条件($\mathscr{A}3$)，并由(2.12)得

$$\infty=\lim_{n\to\infty}\Big(\sup_{1\leqslant i,j\leqslant n}d(y_i(\omega),y_j(\omega))-\mathscr{A}(\omega,\ \sup_{1\leqslant i,j\leqslant n}d(y_i(\omega),y_j(\omega)))\Big)$$
$$=d(y_1(\omega),\ y_2(\omega))\ \text{a.s.}$$

这就得出矛盾，由此矛盾即得

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{1\leqslant i,j\leqslant n}d(y_i(\omega),y_j(\omega))=\sup_{i,j\geqslant1}d(y_i(\omega),y_j(\omega))<\infty\ \text{a.s.}$$

现在我们定义一非负实数的减序列

$$t_m(\omega)=\sup_{i,j\geqslant m}d(y_i(\omega),y_j(\omega)),\ m=1,2,\cdots\cdots\tag{2.13}$$

因 $\mathscr{A}(\omega,t)$ 对 t 是不减的，由(2.10)得

$$t_m(\omega)\leqslant\mathscr{A}(\omega,t_{m-1}(\omega))\ \text{a.s.}$$

由引理3(ii)，上式表明 $\lim\limits_{m\to\infty}t_m(\omega)=0$. a.s.，即

$$\lim_{m\to\infty}\sup_{i,j\geq m} d(y_i(\omega),y_j(\omega))=0 \text{ a.s.}$$

故$\{y_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$几乎必然地是一 X-值的Cauchy 序列

引理 4 证毕.

三、主 要 结 果

现在我们叙述本文的主要结果.

定理. 设(X,d)是一Polish空间，$(\Omega,\mathscr{F},P)$是一完备的概率测度 空 间. 设 $f(\omega, x)$: $\Omega\times X\to X$是一连续的随机算子，$\{g_i(\omega,x)\}_{i=1}^{\infty}$: $\Omega\times X\to X$ 是一与 f 可交换的连续随机算子的序列，而且假定f和 $g_i, i=1,2,\cdots\cdots$满足二、中的条件(Ⅰ)和(Ⅱ). 则f和 $g_i,i=1,2,\cdots\cdots$有唯一的公共随机不动点$f(\omega,y_*(\omega))$，其中

$$y_*(\omega)=\lim_{n\to\infty} y_n(\omega) \text{ a.s.}$$

又$\{y_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$是由(2.9)定义的机随变量的序列.

证. 因$\mathscr{A}(\omega,t)$满足条件($\mathscr{A}$1),($\mathscr{A}$2)或($\mathscr{A}$1)，($\mathscr{A}$3)，于是由引理 2 或引理 4，由(2.9)所定义的X-值的随机变量的序列$\{y_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$几乎必然地是一Cauchy序列. 设 $y_n(\omega)$在 X中几乎必然地收敛于 $y_*(\omega)$，因而 $y_*(\omega)$也是一 X-值的随机变量. 根据 引 理 1 $f(\omega,y_*(\omega))$也是一X-值的随机变量，而且

$$\lim_{n\to\infty} f(\omega,y_n(\omega))=f(\omega,y_*(\omega)) \text{ a.s.}$$

于是由(2.9)和(2.9)′，并注意 f 与 $g_i,i=1,2,\cdots$的可交换性

$$\begin{aligned} g_n^{m_n}(\omega, y_{n-1}(\omega)) &= g_n^{m_n}(\omega,f(\omega,x_n(\omega)))\\ &=f(\omega, g_n^{m_n}(\omega,x_n(\omega)))=f(\omega,y_n(\omega)) \text{ a.s.} \end{aligned} \tag{3.1}$$

故

$$\lim_{n\to\infty} g_n^{m_n}(\omega,y_{n-1}(\omega))=\lim_{n\to\infty} f(\omega,y_n(\omega))=f(\omega,y_*(\omega)) \text{ a.s.} \tag{3.2}$$

另外，对任意的 $i,i=1,2,\cdots$，由(3.1)得

$$\begin{aligned} &d(f(\omega, y_n(\omega)), g_i^{m_i}(\omega, y_*(\omega)))=d(g_n^{m_n}(\omega,y_{n-1}(\omega)), g_i^{m_i}(\omega,y_*(\omega)))\\ &\leqslant\mathscr{A}(\omega,\max\{d(f(\omega,y_{n-1}(\omega)), f(\omega,y_*(\omega))), d(f(\omega,y_{n-1}(\omega)),f(\omega,y_n(\omega))),\\ &\qquad d(f(\omega,y_*(\omega)), g_i^{m_i}(\omega,y_*(\omega))),d(f(\omega,y_*(\omega)),f(\omega,y_n(\omega))),\\ &\qquad d(f(\omega,y_{n-1}(\omega)), g_i^{m_i}(\omega,y_*(\omega)))\}) \text{ a.s.} \end{aligned} \tag{3.3}$$

因

$$\lim_{n\to\infty} f(\omega,y_n(\omega))=f(\omega,y_*(\omega)) \text{ a.s.}$$

而且

$$\lim_{n\to\infty} g_n^{m_n}(\omega,y_{n-1}(\omega))=f(\omega,y_*(\omega)) \text{ a.s.}$$

于是对任意的 $\varepsilon>0$，存在正整数 n_0，当 $n\geqslant n_0$ 时有

$$d(f(\omega,y_{n-1}(\omega)),f(\omega, y_*(\omega)))<\frac{\varepsilon}{2} \text{ a.s.},$$

$$d(g_n^{m_n}(\omega, y_{n-1}(\omega)), f(\omega, y_*(\omega)))<\frac{\varepsilon}{2} \text{ a.s.},$$

故当 $n\geqslant n_0$ 时，由(3.3)得

$$\begin{aligned} d(f(\omega, y_n(\omega)), g_i^{m_i}(\omega, y_*(\omega)))\leqslant \mathscr{A}\Big(\omega, \max\Big\{\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon, d\big(f(\omega, y_*(\omega)), \\ g_i^{m_i}(\omega, y_*(\omega))\big), \frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}+d(f(\omega, y_*(\omega)), g_i^{m_i}(\omega, y_*(\omega)))\Big\}\Big) \\ \leqslant \mathscr{A}(\omega, \varepsilon+d(f(\omega, y_*(\omega)), g_i^{m_i}(\omega, y_*(\omega)))) \end{aligned} \tag{3.4}$$

于(3.4)中先让 $n\to\infty$ 取极限，然后让 $\varepsilon\searrow 0$，并注意 $\mathscr{A}(\omega,t)$ 对 t 的右连续性，即得

$$d(f(\omega,y_*(\omega)), g_i^{m_i}(\omega,y_*(\omega)))\leqslant \mathscr{A}(\omega, d(f(\omega,y_*(\omega)), g_i^{m_i}(\omega,y(\omega)))) \text{ a.s.}$$

根据引理3 (iii)，上式表明

$$f(\omega,y_*(\omega))=g_i^{m_i}(\omega,y_*(\omega)) \text{ a.s. } i=1,2,\cdots \tag{3.5}$$

由(3.5)即得

$$\begin{aligned} d(g_i^{m_i}(\omega,f(\omega,y_*(\omega))), f(\omega,y_*(\omega)))&=d(g_i^{m_i}(\omega,f(\omega,y_*(\omega))), g_i^{m_i}(\omega,y_*(\omega))) \\ &\leqslant \mathscr{A}(\omega, \max\{d(f(\omega,f(\omega,y_*(\omega))),f(\omega,y_*(\omega))), \\ &\quad d(f(\omega,f(\omega,y_*(\omega))),g_i^{m_i}(\omega,f(\omega,y_*(\omega)))), \\ &\quad d(f(\omega,y_*(\omega)),f(\omega,y_*(\omega))),d(f(\omega,y_*(\omega)), \\ &\quad g_i^{m_i}(\omega,f(\omega,y_*(\omega)))), d(f(\omega,f(\omega,y_*(\omega))),f(\omega,y_*(\omega)))\}) \\ &\quad (\text{因} f(\omega,f(\omega,y_*(\omega)))=f(\omega, g_i^{m_i}(\omega,y_*(\omega))) \\ &\quad =g_i^{m_i}(\omega,f(\omega,y_*(\omega))) \text{ a.s.故}) \\ &=\mathscr{A}(\omega, d(g_i^{m_i}(\omega,f(\omega,y_*(\omega))),f(\omega,y_*(\omega)))) \text{ a.s.} \end{aligned}$$

根据引理3 (iii)，由上之不等式得

$$g_i^{m_i}(\omega,f(\omega,y_*(\omega)))=f(\omega,y_*(\omega)) \text{ a.s., } i=1,2,\cdots \tag{3.6}$$

现在我们证明 $f(\omega,y_*(\omega))$ 是 f 和 $g_i, i=1,2,\cdots$ 的唯一公共不动点.

事实上，根据(3.5)和(3.6)，得

$$\begin{aligned} f(\omega,f(\omega,y_*(\omega)))&=f(\omega, g_i^{m_i}(\omega,y_*(\omega))) \\ &=g_i^{m_i}(\omega,f(\omega,y_*(\omega)))=f(\omega,y_*(\omega)) \text{ a.s.} \end{aligned} \tag{3.7}$$

另一方面，对任意 $i, i=1,2,\cdots$，由(3.6)，(3.7)有

$$
\begin{aligned}
&d(f(\omega,y_*(\omega)),g_i(\omega,f(\omega,y_*(\omega)))\\
&\quad=d(g_i^{m_i}(\omega,f(\omega,y_*(\omega))),\ g_i^{m_i}(\omega,g_i(\omega,f(\omega,y_*(\omega)))))\\
&\quad\leqslant\mathscr{A}(\omega,\max\{d(f(\omega,f(\omega,y_*(\omega))),f(\omega,g_i(\omega,f(\omega,y_*(\omega))))),\\
&\qquad d(f(\omega,f(\omega,y_*(\omega))),f(\omega,y_*(\omega))),\\
&\qquad d(f(\omega,g_i(\omega,f(\omega,y_*(\omega)))),g_i(\omega,f(\omega,y_*(\omega)))),\\
&\qquad d(f(\omega,g_i(\omega,f(\omega,y_*(\omega)))),f(\omega,y_*(\omega))),\\
&\qquad d(f(\omega,f(\omega,y_*(\omega))),g_i(\omega,f(\omega,y_*(\omega))))\})\\
&\quad\leqslant\mathscr{A}(\omega,\max\{d(f(\omega,y_*(\omega)),g_i(\omega,f(\omega,y_*(\omega)))),0,0,d(g_i(\omega,f(\omega,\\
&\qquad y_*(\omega))),f(\omega,y_*(\omega))),d(f(\omega,y_*(\omega)),g_i(\omega,f(\omega,y_*(\omega))))\})\\
&\quad=\mathscr{A}(\omega,d(f(\omega,y_*(\omega)),g_i(\omega,f(\omega,y_*(\omega)))))\ \text{a.s.}
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

引用引理3 (iii)，由(3.8)可得

$$
f(\omega,y_*(\omega))=g_i(\omega,f(\omega,y_*(\omega)))\ \text{a.s.}\ i=1,2,\cdots
\tag{3.9}
$$

结合(3.7)和(3.9)即得 $f(\omega,y_*(\omega))$是 f 和 g_i，$i=1,2,\cdots$的公共随机不动点.

为了证 $f(\omega,y_*(\omega))$的唯一性，我们进行如下：

设存在 f 和 g_i，$i=1,2,\cdots$的另一公共的随机不动点 $x_*(\omega)$，使得

$$
\begin{aligned}
&f(\omega,x_*(\omega))=x_*(\omega)\ \text{a.s.}\\
&g_i(\omega,x_*(\omega))=x_*(\omega)\ \text{a.s.},\ i=1,2,\cdots,
\end{aligned}
$$

因而

$$
\begin{aligned}
&d(x_*(\omega),f(\omega,y_*(\omega)))=d(g_i^{m_i}(\omega,x_*(\omega)),g_j^{m_j}(\omega,f(\omega,y_*(\omega))))\\
&\quad\leqslant\mathscr{A}(\omega,\ \max\{d(f(\omega,x_*(\omega)),f(\omega,f(\omega,y_*(\omega)))),\\
&\qquad d(f(\omega,x_*(\omega)),x_*(\omega)),d(f(\omega,f(\omega,y_*(\omega))),f(\omega,y_*(\omega))),\\
&\qquad d(f(\omega,f(\omega,y_*(\omega))),x_*(\omega)),d(f(\omega,x_*(\omega)),f(\omega,y_*(\omega)))\})\\
&\quad\leqslant\mathscr{A}(\omega,\ \max\{d(x_*(\omega),f(\omega,y_*(\omega))),0,0,d(f(\omega,y_*(\omega)),x_*(\omega)),\\
&\qquad d(x_*(\omega),f(\omega,y_*(\omega)))\})=\mathscr{A}(\omega,d(x_*(\omega),f(\omega,y_*(\omega))))\ \text{a.s.}
\end{aligned}
$$

由上式即得

$$
x_*(\omega)=f(\omega,y_*(\omega))\ \text{a.s.}
$$

定理证毕.

推论. 设(X,d)是一 Polish 空间，$(\Omega,\mathscr{F},P)$是一完备的概率测度空间. 设 $f(\omega,x)$: $\Omega\times X\to X$是一连续的随机算子，$\{g_i(\omega,x)\}_{i=1}^{\infty}$: $\Omega\times X\to X$，$i=1,2,\cdots$是与 f 可交换的连续随机算子的序列. 又设 f 和$\{g_i\}$满足二、中的条件(Ⅰ)和下面的条件(Ⅲ)：

(Ⅲ). 存在正整数的序列$\{m_i\}_{i=1}^{\infty}$使得对任意的 i,j 和任意的 $x,y\in X$，下式成立：

$$
\begin{aligned}
P(\omega\in\Omega:\ &d(g_i^{m_i}(\omega,x),\ g_j^{m_j}(\omega,y))\leqslant k(\omega)\max\{d(f(\omega,x),f(\omega,y)),\\
&d(f(\omega,x),g_i^{m_i}(\omega,x)),\ d(f(\omega,y),\ g_j^{m_j}(\omega,y)),\\
&d(f(\omega,y),g_i^{m_i}(\omega,x)),\ d(f(\omega,x),g_j^{m_j}(\omega,y))\})=1.
\end{aligned}
$$

这里 $k(\omega)$: $\Omega\to(0,1)$是一随机函数.

则定理的结论仍成立.

证. 取$\mathscr{A}(\omega,t)=k(\omega)t,t\geqslant 0$,易知$\mathscr{A}(\omega,t)$满足条件($\mathscr{A}1$),($\mathscr{A}2$),($\mathscr{A}3$). 故结论即得.

注: Bharucha-Reid[1]的定理3.4和[2]的定理6, Špaček的[13], Hans的[3]等都是本文推论的特殊情形.又本文的定理和推论是作者的文章[16,18]的发展. 在确定性的情形,Das,Naik[9]的定理2.1, 3.1, 3.2, 4.1, Jungck的[6], Rhoades[10]的定理23,Ciric[11]的定理1、定理2是本文推论的特殊情形.

另外, 从某种意义上来说, 本文的结果在决定性情形也是Leader[14]的推广和改进.

又本文结果在随机分析, 诸如随机逼近理论的应用将在另文中讨论.

参 考 文 献

1. Bharucha-Reid, A. T., *Random Integral Equations*, Academic Press, New York, London, (1972).
2. Bharucha-Reid, A. T., Fixed point theorem in probabilistic analysis, *Bull. Amer. Math. Soc.* 82 (1976), 641—657.
3. Hanš, O., Random fixed point theorems, in *Trans. of the First Prague Conference on Information Theory, Satistical Decision Functions*, Random Processes, 105—125, Prague, (1957).
4. Itoh, S., Random fixed point theorems with an application to random differential equations in Banach space, *J. Math. Anal. Appl.*, 67, 2 (1979), 261—273.
5. Itoh, S., A random fixed point theorem for a multivalued contraction mapping, *Pacific J. Math.* 68(1977), 85—90.
6. Jungck, G., Commuting mappings and fixed points, *Amer. Math. Motnhly*,83 (1976), 261—263.
7. Jungck, G., Periodic and fixed points, and commuting mappings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 76, 2(1979), 333—338.
8. Jungck, G., A common fixed point theorem for commuting maps on L-spaces, *Math. Japonica*, 25, 1(1980), 81—85.
9. Das, K. M. and Naik, K. V., Common fixed point theorems for commuting maps on a metric space, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 77, 3(1979), 369—373.
10. Rhoades, B. E., Comparison of various definitions of contractive mappings, *Trans. Amer. Math. Soc.*,226(1977), 256—290.
11. Ciric, B., A generalization of Banach's contraction principle, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 45, 2(1974), 267—273.
12. Kannan, R. and Salehi, H., Random nonlinear equations and monotone nonlinearities, *J. Math. Anal. Appl.*, 57(1977), 234—256.
13. Špaček, A. Zufällige Gleichungen, Czechoslovak, *Math. J.*, 5(1955), 462—466.
14. Leader, S., Fixed points for general contractions in metric spaces, *Math. Japonica*, 24, 1 (1979), 17—24.
15. 张石生, 关于一个多值映象的不动点定理, 自然杂志, 6, (1981), 476—477.
16. Chang Shih-sen, Random fixed point theorems in probabilistic analysis, *Nonlinear Analysis*, 5, 2(1981), 113—122.
17. 张石生, 关于随机映象的一个随机不动点定理, 成都科技大学学报, 2, (1981), 73—79.

18. 张石生，关于随机分析的不动点定理（Ⅰ），四川大学学报．3，（1980），9—16．
19. 张石生，陈绍仲，随机分析中的不动点定理及对随机逼近理论的应用，应用数学学报，（1981）．
20. 张石生，关于多值映象序列的不动点定理，四川大学学报，4，（1980），61—68．
21. 王梓坤，随机泛函分析引论，数学进展，5，1（1962），45—71．

Random Fixed Point Theorems for Commuting Random Operators in Probabilistic Functional Analysis

Chang Shih-sen

(Sichuan University, Chengdu)

Abstract

Random fixed point theorems are of fundamental importance in probabilistic functional analysis. In complete separable metric space random fixed point theorems have been discussed by Bharucha-Reid[1,2], Hans[3], Itoh[4,5] and the author's paper[15~20].

In this paper we obtain a random fixed point theorem for commuting random operators in probabilistic functional analysis. Our results generalize some important results mentioned above. In determinative conditions our results also extend and unify some results in Jungck [6,7,8], Das and Naik[9], Rhoades[10] and Ciric[11].