应用数学和力学，第3卷第3期（1982年5月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

考虑环影响的平面圆型限制性三体问题的可能运动区域*

张　翔　龄

（北京师范大学天文系，1981年7月6日收到）

摘　要

本文讨论了一个主星体带环的平面圆型限制性三体问题的可能运动区域，给出了第三体的运动方程，并得到下面一些结论：

（1） 秤动点的位置依赖于系统的参数 μ；环的内、外半径 a，b；两主星体之间距离 l；以及环的质量与带环主星体与环的总质量之比 θ．当 a,b,l,θ 一定时，秤动点的个数随 μ 变化，最多有五个，最少有三个．此外，三角秤动点与两个主星体的构形是等腰三角形．

（2） 当 a,b,l,θ 一定时，给出了系统参数 μ 的一个变化范围，当 μ 在这个范围内时，第三体可能运动区域的结构与通常意义下的平面圆型限制性三体问题的相似．

一、引　言

平面圆型限制性三体问题是天体力学中著名问题．两百年来，许多人，例如Euler，Lagrange，Jacobi，Hill，Poincaré等对它都进行了深入的研究，形成了一套理论．Szebehely在他的著作[1]中，对这个理论作了详尽的叙述．无论在天体力学的理论或应用中，这个问题都具有重要的意义．

但是过去在处理这个问题时，天体都被视为质点．近年来有人考虑过扁率对这个问题的影响[2]．鉴于目前观测已经证实除土星外，天王星和木星也都带有光环，所以本文准备讨论一种有环参与的限制性三体问题，研究环对这个问题的影响．

以下用 P_1,P_2,P_3 表示所研究的三个体，其中：

P_1 带有环，环是圆形的；其中心在 P_1 的质心上；内外半径为 a，b；质量分布均匀．P_1 及其环的总质量为 m_1，环的质量为 θm_1，这里 $0<\theta<1$，并且设 θ 是一个小量．

P_2 不带环，质量为 m_2．

P_3 不带环，质量为 m_3，而且 m_3 远远小于 m_1 和 m_2．

并且我们作下面几点假设：

（1） 不考虑 P_1,P_2,P_3 的形状，把它们视为质点．同时，不考虑环的厚度，并规定当

* 董金柱推荐．

$\theta=0$时，$a=b=0$；反之亦如此．

（2） 忽略P_3对P_1及其环和P_2的影响．故可设 $m_3=0$．

（3） 在问题的处理中，环的形状及它相对于 P_1 的位置保持不变．

本文想解决如下问题：在上述假设下，当P_1,P_2,P_3及 P_1 的环都在同一个平面内运动，并且P_1及其环和P_2绕它们的公共质心作圆运动时，决定第三体P_3的可能运动区域．

所用的方法参见[1]．

二、运动方程和积分

1． 先求环对其所在平面上一点P的位函数V，这里仅讨论P在环外的情形．

设σ为环的面密度，是常数；θm_1为环的质量；a，b为环的内外半径；G为引力常数；R为 P点到环中心距离，$R>b>a$，参看图1．则：

$$V=\iint\frac{Gdm}{\rho}=G\sigma\int_0^{2\pi}d\varphi\int_a^b\frac{rdr}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\varphi}}$$

$$=G\sigma\int_0^{2\pi}d\varphi\int_a^b\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\varphi)\left(\frac{r}{R}\right)^{n+1}dr$$

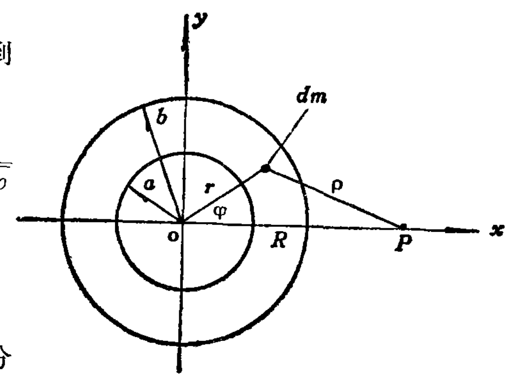

图 1

这里$P_n(\cos\varphi)$是 Legendre 多项式．注意逐项积分后展开式中奇数项都为0，直接计算得：

$$V=\frac{G\theta m_1}{R}+\frac{G\theta m_1(b^2+a^2)}{8R^3}+\frac{3G\theta m_1(b^4+a^2b^2+a^4)}{64R^5}+O\left(\frac{1}{R^7}\right)$$

$O\left(\frac{1}{R^7}\right)$代表从$n=6$开始的所有项的和．当$R$不充分接近$b$时，$O\left(\frac{1}{R^7}\right)$是小量，故可取$V$的前六项进行讨论．当然这样得到的结果是所研究问题的近似解．以下我们用：

$$V=\frac{G\theta m_1}{R}+\frac{G\theta m_1(b^2+a^2)}{8R^3}+\frac{3G\theta m_1(b^4+a^2b^2+a^4)}{64R^5} \tag{2.1}$$

作为环对其外一点P的位函数．

2． 运动方程

设 $m_1+m_2=1$； $m_2/(m_1+m_2)=\mu$； $G=1$；P_1与P_2 的距离 $l=1$；$\theta(b^2+a^2)/8l^2=\alpha$；$3\theta(b^4+a^2b^2+a^4)/64l^4=\beta$；$n$为$P_1$及其环、$P_2$绕它们质心作圆运动的角速度，不难推出：

$$n^2=1+3\alpha+5\beta=1+3\gamma$$

这里$3\gamma=3\alpha+5\beta$．注意，α，β，γ都是θ，a，b，l的函数，至少是θ的同阶小量．

以 P_1 及其环与 P_2 的质心为原点，P_2 到P_1 的连线为x轴，引入旋转坐标系 $o-xy$，其绕o旋转的角速度为 n，则在这个坐标系中(图2)：P_1，P_2，P_3的坐标分别为 $(\mu,0)$，$(\mu-1,0)$，(x,y)．P_3 的

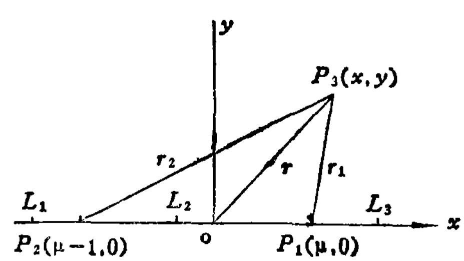

图 2

运动方程为

$$\begin{cases} \ddot{x}-2n\dot{y}=\Omega_x \\ \ddot{y}+2n\dot{x}=\Omega_y \end{cases} \tag{2.2}$$

其中 $\Omega(x,y)=\frac{n^2}{2}(x^2+y^2)+\frac{(1-\mu)}{r_1}+\frac{\alpha(1-\mu)}{r_1^{\,3}}+\frac{\beta(1-\mu)}{r_1^{\,5}}+\frac{\mu}{r_2}+\frac{n^2}{2}\mu(1-\mu)$

$$=\frac{n^2}{2}[(1-\mu)r_1^{\,2}+\mu r_2^{\,2}]+\frac{1-\mu}{r_1}+\frac{\alpha(1-\mu)}{r_1^{\,3}}+\frac{\beta(1-\mu)}{r_1^{\,5}}+\frac{\mu}{r_2} \tag{2.3}$$

$r_1=\sqrt{(x-\mu)^2+y^2}$, $\qquad r_2=\sqrt{(x+1-\mu)^2+y^2}$

而且 $r_1>\bar{b}$，这里 $\bar{b}=b/l$.

3. 运动方程的积分

由(2.2)式可得方程的积分：$\dot{x}^2+\dot{y}^2=2\Omega-C$ (2.4)

称为 Jacobi 积分，C 表示积分常数.

4. 方程（2.2）与通常的平面圆型限制性三体问题运动方程的差别之一是：前者没有后者关于 $\mu=\frac{1}{2}$的对称性. 因此，下面的讨论限制 μ 在[0,1]上变化. 这里强调指出 $\mu\neq 1$，因为 $\mu=1$ 时，就不存在环的影响了.

三、秤 动 点

在这节和下节中，我们先不考虑方程（2.2）中的条件：$r_1>\bar{b}$，来研究这个方程

1. 方程（2.2）的秤动点满足：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Omega}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial y}=0 \end{cases}$$

或

$$\left.\begin{aligned} &n^2x-\frac{(1-\mu)(x-\mu)}{r_1^{\,3}}-\frac{3\alpha(1-\mu)(x-\mu)}{r_1^{\,5}}-\frac{5\beta(1-\mu)(x-\mu)}{r_1^{\,7}}-\frac{\mu(x+1-\mu)}{r_2^{\,3}}=0 \\ &n^2y-\frac{(1-\mu)y}{r_1^{\,3}}-\frac{3\alpha(1-\mu)y}{r_1^{\,5}}-\frac{5\beta(1-\mu)y}{r_1^{\,7}}-\frac{\mu y}{r_2^{\,3}}=0 \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

2. 下面讨论方程（3.1）的解.

若 $y\neq 0$，则有

$$n^2-\frac{(1-\mu)}{r_1^{\,3}}-\frac{3\alpha(1-\mu)}{r_1^{\,5}}-\frac{5\beta(1-\mu)}{r_1^{\,7}}-\frac{\mu}{r_2^{\,3}}=0$$

据此，由（3.1）的第一式得：

$$\frac{1}{r_1^{\,3}}+\frac{3\alpha}{r_1^{\,5}}+\frac{5\beta}{r_1^{\,7}}-\frac{1}{r_2^{\,3}}=0$$

从而有：
$$\frac{1}{r_2^{\,3}}=n^2 \tag{3.2}$$

$$\frac{1}{r_1^{\,3}}+\frac{3\alpha}{r_1^{\,6}}+\frac{5\beta}{r_1^{\,7}}=n^2=1+3\alpha+5\beta \tag{3.3}$$

(3.3)式可写成为 $n^2r_1^7-r_1^4-3\alpha r_1^2-5\beta=0$，这个方程的系数列仅有一个变号，据 Descarte 法则，方程最多有一个正根，易见这个正根为：

$$r_1=1 \tag{3.4}$$

利用（3.4）式，由（3.2）得

$$z(x+1-\mu)=(1+3\gamma)^{-2/3}$$

令
$$x=\mu-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lambda \tag{3.5}$$

代入上式得：
$$(1-\lambda)=(1+3\gamma)^{-2/3}$$
$$\lambda=2\gamma+O(\gamma^2)$$

所以
$$x=\mu-\frac{1}{2}-\gamma+O(\gamma^2),$$

又
$$y=\pm\sqrt{1-\frac{1}{4}(1+\lambda)^2}=\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\gamma\right)+O(\gamma^2).$$

综上知方程（2.2）有两个三角秤动点，L_4，L_5，位置为：

$$L_4:\begin{cases} x_{L_4}=\mu-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\lambda=\mu-\dfrac{1}{2}-\gamma+O(\gamma^2) \\ y_{L_4}=\sqrt{1-\dfrac{1}{4}(1+\lambda)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\gamma+O(\gamma^2) \end{cases}$$
$$L_5:\begin{cases} x_{L_5}=\mu-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\lambda=\mu-\dfrac{1}{2}-\gamma+O(\gamma^2) \\ y_{L_5}=-\sqrt{1-\dfrac{1}{4}(1+\lambda)^2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\gamma+O(\gamma^2) \end{cases} \tag{3.6}$$

若 $y=0$，由（3.1）的第一式不难得到三个共线秤动点（参见[1]）：

L_1：$(x_{L_1},\ 0)$，x_{L_1} 在$(\mu-2,\ \mu-1)$之中.

L_2：$(x_{L_2},\ 0)$，x_{L_2} 在$(\mu-1,\ \mu)$之中.

L_3：$(x_{L_3},\ 0)$，x_{L_3} 在$(\mu,\ \mu+1)$之中.

可以用[2]中方法给出 x_{L_1}，x_{L_2}，x_{L_3}关于 μ，α，β 的级数表示.

3．**定义** $r_1(L_i)=|x_{L_i}-\mu|$
$\quad\quad r_2(L_i)=|x_{L_i}+1-\mu|\quad (i=1,2,3)$

性质：（1）$r_2(L_1)$，$r_2(L_2)$ 随 μ 单调增加.

（2）$r_1(L_3)$ 随 μ 单调减少.

证明：（1）对于 L_1，x_{L_1} 满足：

$$n^2x+\frac{(1-\mu)}{r_1^{\,2}}+\frac{3\alpha(1-\mu)}{r_1^{\,4}}+\frac{5\beta(1-\mu)}{r_1^{\,6}}+\frac{\mu}{r_2^{\,2}}=0$$

这是由（3.1）中第一式令 $y=0$ 得到的，注意这里的 r_1，r_2 即是 $r_1(L_1)$，$r_2(L_1)$．关于 x_{L_2}，x_{L_3} 的情形也一样，下面不再重复．

因为 $x=\mu-1-r_2$，$r_1=1+r_2$，则有：

$$n^2(\mu-1-r_2)+\frac{1-\mu}{(1+r_2)^2}+\frac{3\alpha(1-\mu)}{(1+r_2)^4}+\frac{5\beta(1-\mu)}{(1+r_2)^6}+\frac{\mu}{r_2^2}=0$$

对 μ 求导得

$$\frac{dr_2}{d\mu}=\frac{n^2-\frac{1}{(1+r_2)^2}-\frac{3\alpha}{(1+r_2)^4}-\frac{5\beta}{(1+r_2)^6}+\frac{1}{r_2^2}}{n^2+\frac{2(1-\mu)}{(1+r_2)^3}+\frac{12\alpha(1-\mu)}{(1+r_2)^5}+\frac{30\beta(1-\mu)}{(1+r_2)^7}+\frac{2\mu}{r_2^3}}>0$$

所以 $r_2(L_1)$ 随 μ 单调增加，由此可以定出它的变化范围：

$$0\leqslant r_2(L_1)<\sqrt[3]{\frac{1}{1+3\gamma}}=1-\gamma+O(\gamma^2)$$

对于 L_2，与 L_1 相仿，有 x_{L_2} 满足

$$n^2x+\frac{(1-\mu)}{r_1^2}+\frac{3\alpha(1-\mu)}{r_1^4}+\frac{5\beta(1-\mu)}{r_1^6}-\frac{\mu}{r_2^2}=0$$

因为 $x=r_2+\mu-1$，$r_1=1-r_2$，

所以
$$n^2(r_2+\mu-1)+\frac{(1-\mu)}{(1-r_2)^2}+\frac{3\alpha(1-\mu)}{(1-r_2)^4}+\frac{5\beta(1-\mu)}{(1-r_2)^6}-\frac{\mu}{r_2^2}=0$$

对 μ 求导得：

$$\frac{dr_2}{d\mu}=\frac{\frac{1}{(1-r_2)^2}+\frac{3\alpha}{(1-r_2)^4}+\frac{5\beta}{(1-r_2)^6}+\frac{1}{r_2^2}-n^2}{n^2+\frac{2(1-\mu)}{(1-r_2)^3}+\frac{12\alpha(1-\mu)}{(1-r_2)^5}+\frac{30\beta(1-\mu)}{(1-r_2)^7}+\frac{2\mu}{r_2^3}}$$

由 r_2 所满足的方程知，$\mu\neq1$ 时，$r_2<1$，因此有

$$\frac{dr_2}{d\mu}>0$$

所以，$r_2(L_2)$随 μ 单调增加，由此可以定出它的变化范围为：

$$0\leqslant r_2(L_2)<\sqrt[3]{\frac{1}{1+3\gamma}}=1-\gamma+O(\gamma^2)$$

（2） 对于 L_3，x_{L_3} 满足

$$n^2x-\frac{(1-\mu)}{r_1^2}-\frac{3\alpha(1-\mu)}{r_1^4}-\frac{5\beta(1-\mu)}{r_1^6}-\frac{\mu}{r_2^2}=0$$

因为
$$r_1=x-\mu,\qquad r_2=1+r_1$$

所以
$$n^2(r_1+\mu)-\frac{(1-\mu)}{r_1^2}-\frac{3\alpha(1-\mu)}{r_1^4}-\frac{5\beta(1-\mu)}{r_1^6}-\frac{\mu}{(1+r_1)^2}=0$$

对 μ 求导得：

$$\frac{dr_1}{d\mu}=\frac{-n^2-\frac{1}{r_1^2}-\frac{3\alpha}{r_1^4}-\frac{5\beta}{r_1^6}+\frac{1}{(1+r_1)^2}}{n^2+\frac{2(1-\mu)}{r_1^3}+\frac{12\alpha(1-\mu)}{r_1^5}+\frac{30\beta(1-\mu)}{r_1^7}+\frac{2\mu}{(1+r_1)^3}}$$

由 r_1 所满足的方程知，$\mu\neq 1$ 时，$r_1\neq 0$，因此有

$$\frac{dr_1}{d\mu}<0$$

故 $r_1(L_3)$随 μ 单调减少，而且有 $0<r_1(L_3)\leqslant 1$.

4. 据上面的结果，若考虑 $r_1>\bar{b}$，则方程(2.2)最多有五个（当 $r_1(L_2)>\bar{b}$，$r_1(L_3)>\bar{b}$ 时），最少有三个（当 $r_1(L_2)<\bar{b}$，$r_1(L_3)<\bar{b}$ 时）秤动点．与通常的平面圆型限制性三体问题相比，共线秤动点的个数有些变化．此外，三角秤动点 L_4、L_5 与主星体 P_1、P_2 的构形不再是等边三角形，而是腰为 1 底为 $n^{-2/3}=1-\gamma+O(\gamma^2)$ 的等腰三角形．由此知，当 θ、a、b 变大时（在一定范围内），γ 跟着变大，L_4、L_5 将向不带环的主星体靠近，而与带环的主星体距离保持不变．

四、Ω(x,y)的性质

性质Ⅰ $\Omega(x,y)=\Omega(x,-y)$，即 Ω 是关于 x 轴对称的．

这条性质是显然的．

性质Ⅱ （1）$\Omega(x,y)$在 L_4，L_5 处取得其最小值．

（2）L_1，L_2，L_3 是 $\Omega(x,y)$的鞍点．

（3）$\lim\limits_{r\to\infty}\Omega(x,y)=+\infty$，　$\lim\limits_{r_1\to 0}\Omega(x,y)=+\infty$，　$\lim\limits_{r_2\to 0}\Omega(x,y)=+\infty$.

证明：(1) 令

$$\left.\begin{aligned}
\Omega_x&=n^2x-\frac{(1-\mu)(x-\mu)}{r_1^{\,3}}-\frac{3\alpha(1-\mu)(x-\mu)}{r_1^{\,5}}-\frac{5\beta(1-\mu)(x-\mu)}{r_1^{\,7}}-\frac{\mu(x+1-\mu)}{r_2^{\,3}}\\
&=g(x,y)\\
\Omega_y&=y\left[n^2-\frac{(1-\mu)}{r_1^{\,3}}-\frac{3\alpha(1-\mu)}{r_1^{\,6}}-\frac{5\beta(1-\mu)}{r_1^{\,7}}-\frac{\mu}{r_2^{\,3}}\right]=yf(x,y)
\end{aligned}\right\}\tag{4.1}$$

则

$$\Omega_{xx}=\frac{\partial g}{\partial x},\qquad \Omega_{xy}=\frac{\partial}{\partial x}(y\cdot f)=y\frac{\partial f}{\partial x},\qquad \Omega_{yy}=f+y\frac{\partial f}{\partial y}$$

因为

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x}=n^2&-\frac{(1-\mu)}{r_1^3}-\frac{3\alpha(1-\mu)}{r_1^5}-\frac{5\beta(1-\mu)}{r_1^7}-\frac{\mu}{r_2^3}+\frac{3(1-\mu)(x-\mu)^2}{r_1^5}\\
&+\frac{15\alpha(1-\mu)(x-\mu)^2}{r_1^7}+\frac{35\beta(1-\mu)(x-\mu)^2}{r_1^9}+\frac{3\mu(x+1-\mu)^2}{r_2^5}
\end{aligned}$$

对于L_4，L_5有：　$x-\mu=-\dfrac{1}{2}(1+\lambda)$，　$x+1-\mu=\dfrac{1}{2}(1-\lambda)$，

$$r_1=1,\qquad\qquad r_2=\sqrt{1-\lambda}$$

所以　$$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{L_{4,5}}=\mu n^2+\frac{1}{4}(1-\mu)(1+\lambda)^2\ (3+15\alpha+35\beta)-\frac{\mu(1+3\lambda)}{4(\sqrt{1-\lambda}\ )^3}$$

$$=\frac{1}{4}(1-\mu)(1+\lambda)^2\ (3+15\alpha+35\beta)+\frac{3\mu}{4\sqrt{1-\lambda}}>0$$

又
$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{L_{4,5}}=\frac{3\mu}{2(\sqrt{1-\lambda})^3}-\frac{1}{2}(1-\mu)(1+\lambda)(3+15\alpha+35\beta)$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{L_{4,5}}=y(L_{4,5})\left[(1-\mu)\ (3+15\alpha+35\beta)+\frac{3\mu}{(\sqrt{1-\lambda})^5}\right]$$

$$H(L_{4,5})=\begin{vmatrix}\Omega_{xx}(L_{4,5}), & \Omega_{xy}(L_{4,5})\\ \Omega_{xy}(L_{4,5}), & \Omega_{yy}(L_{4,5})\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}g(L_{4,5}), & y(L_{4,5})f_x(L_{4,5})\\ y(L_{4,5})f_x(L_{4,5}), & y(L_{4,5})f_y(L_{4,5})\end{vmatrix}$$

$$=y^2(L_{4,5})\left\{g_x(L_{4,5})\left[(1-\mu)(3+15\alpha+35\beta)+\frac{3\mu}{(\sqrt{1-\lambda})^5}\right]-f_x^2(L_{4,5})\right\}$$

$$=y^2(L_{4,5})\mu(1-\mu)\left[n^2(3+15\alpha+35\beta)+\frac{(5+3\lambda)(3+15\alpha+35\beta)}{4(\sqrt{1-\lambda})^3}\right.$$

$$\left.+\frac{3(1+\lambda)^2\ (3+15\alpha+35\beta)}{4(\sqrt{(1-\lambda)})^5}\right]>0$$

综上得

$$\Omega_x(L_{4,5})=\Omega_y(L_{4,5})=0$$
$$\Omega_{xx}(L_{4,5})>0$$
$$H(L_{4,5})>0$$

因此 $\Omega(x,y)$ 在L_4，L_5上取极小值，若考虑到本性质(2)，(3)两条，则知也是最小值．直接计算有

$$\min\Omega(x,y)=\frac{3}{2}+\left\{\frac{\mu(1-\sqrt{1-\lambda})}{\sqrt{1-\lambda}}+(\alpha+\beta)\ (1-\mu)+\frac{1}{2}[(3\alpha+5\beta)\ (1-\lambda\mu)-\lambda\mu]\right\}$$

(2) $$g_x(x_{L_i},\ 0)=n^2+\frac{2(1-\mu)}{r_1^3}+\frac{12\alpha(1-\mu)}{r_1^5}+\frac{30\beta(1-\mu)}{r_1^7}+\frac{3\mu}{r_2^3}>0$$
$$(i=1,2,3)$$

$$f(x_{L_1},\ 0)=n^2-\frac{1-\mu}{r_1^3}-\frac{3\alpha(1-\mu)}{r_1^5}-\frac{5\beta(1-\mu)}{r_1^7}-\frac{\mu}{r_2^3}$$

因为

$$g(x_{L_1},0)=n^2(\mu-r_1)+\frac{(1-\mu)}{r_1^2}+\frac{3\alpha(1-\mu)}{r_1^4}+\frac{5\beta(1-\mu)}{r_1^6}+\frac{\mu}{r_2^2}=0$$

利用它$f(x_{L_1},0)$可写成为:

$$f(x_{L_1},0)=\frac{\mu}{r_1}\left[1-\frac{1}{r_2^3}+3\gamma\right]<\frac{\mu}{r_1}\left[1-\frac{1}{\left(\sqrt[3]{\frac{1}{1+3\gamma}}\right)^3}+3\gamma\right]=0$$

仿上可得:

$$f(x_{L_2},0)=\frac{\mu}{r_1}\left[1-\frac{1}{r_2^3}+3\gamma\right]<\frac{\mu}{r_1}\left[1-\frac{1}{\left(\sqrt[3]{\frac{1}{1+3\gamma}}\right)^3}+3\gamma\right]=0$$

$$f(x_{L_3},0)=\frac{\mu}{r_1}\left[-1+\frac{1}{r_2^3}-3\gamma\right]<0$$

这里使用了 $r_2=1+r_1>1$

综上得 $f(L_i, 0)<0$, $(i=1,2,3)$

所以 $H(L_i)=g_x(x_{L_i},0)\cdot f(x_{L_i},0)<0 \quad (i=1,2,3)$

从而知$H(L_i)$不定，L_1，L_2，L_3是$\Omega(x,y)$的鞍点.

(3) 结论是显然的.

性质Ⅲ $\Omega(x,0)$在共线秤动点L_1，L_2，L_3处取极小值.

证明：因为 $\Omega_x(x_{L_i},0)=0$

$$\Omega_{xx}(x_{L_i},0)=g_x(x_{L_i},0)>0, \quad (i=1,2,3)$$

所以$\Omega(x, 0)$在L_1，L_2，L_3上取极小值.

性质Ⅳ (1) $\Omega(L_4)=\Omega(L_5)\leqslant\Omega(L_i)$ $(i=1,2,3)$

(2) $\Omega(L_1)\leqslant\Omega(L_2)$

(3) 对给定的γ，存在$\mu^*(\gamma)$满足

$r_2(L_2(\mu^*))=1-\sqrt{\frac{3\gamma}{1+3\gamma}}$. 当$0\leqslant\mu\leqslant\mu^*(\gamma)$时，有$\Omega(L_3)\leqslant\Omega(L_2)$，

并且 $\lim\limits_{\gamma\to 0}\mu^*(\gamma)=1$.

(4) 对给定的γ，存在$\mu^{**}(\gamma)$，当$0\leqslant\mu\leqslant\mu^{**}(\gamma)$时，有$\Omega(L_3)\leqslant\Omega(L_1)$，而

且有 $\lim\limits_{\gamma\to 0}\mu^{**}(\gamma)=\frac{1}{2}$.

证明：(1) 结论是显然的.

(2) 首先来证明：若$0\leqslant k<1$，则

$$\Omega(\mu-1+k, 0)\geqslant\Omega(\mu-1-k, 0)$$

因为 $\Omega(\mu-1+k,0)-\Omega(\mu-1-k,0)$

$$=2(1-\mu)k\left\{\frac{k^2}{1-k^2}+\frac{\alpha k^2}{(1-k^2)^3}+\frac{\beta(10k^2+k^4)}{(1-k^2)^5}+3\alpha\left[\frac{1}{(1-k^2)^3}-1\right]\right.$$

$$\left.+5\beta\left[\frac{1}{(1-k^2)^5}-1\right]\right\}\geqslant 0$$

所以 $\Omega(\mu-1+k,0)\geqslant\Omega(\mu-1-k, 0)$

令$k=r_2(L_2)$，因为在$(-\infty, \mu-1)$上$\Omega(x,0)$于L_1取最小值，则

$$\Omega(L_2)=\Omega(\mu-1+k,0)\geqslant\Omega(\mu-1-k,0)\geqslant\Omega(L_1)$$

这样就完成了(2)的证明.

(3) 因为$\Omega(\mu-k,0)-\Omega(\mu+k,0)=2\mu k\left(\frac{k^2}{1-k^2}-3\gamma\right)$，由此知：当$k\geqslant\sqrt{\frac{3\gamma}{1+3\gamma}}$时，

$$\Omega(\mu-k,0)\geqslant\Omega(\mu+k,0)$$

令$\mu^*(\gamma)$满足 $r_2(L_2(\mu^*))=1-\sqrt{\frac{3\gamma}{1+3\gamma}}$

由$r_2(L_2(\mu))$对μ的单调性，当$\mu\leqslant\mu^*(\gamma)$时，

$$r_2(L_2)\leqslant 1-\sqrt{\frac{3\gamma}{1+3\gamma}}, \qquad r_1(L_2)\geqslant\sqrt{\frac{3\gamma}{1+3\gamma}}$$

则有

$$\Omega(L_2)=\Omega(\mu-r_1(L_2),0)\geqslant\Omega(\mu+r_1(L_2),0)\geqslant\Omega(L_3)$$

这里使用了 $\Omega(L_3)$ 是$(\mu,+\infty)$上最小值这个事实.

利用x_{L_2}满足的方程与$r_1=\mu-x_{L_2}$可推出:

$$\mu^*(\gamma)=\frac{-\dfrac{1}{3\gamma}-\dfrac{3\alpha(1+3\gamma)}{(3\gamma)^2}-\dfrac{5\beta(1+3\gamma)^2}{(3\gamma)^3}+\sqrt{\dfrac{3\gamma}{1+3\gamma}}}{1-\dfrac{1}{3\gamma}-\dfrac{3\alpha(1+3\gamma)}{(3\gamma)^2}-\dfrac{5\beta(1+3\gamma)^2}{(3\gamma)^3}-\dfrac{1}{1-2\sqrt{3\gamma(1+3\gamma)}+6\gamma}}=1-O(\gamma^{3/2})$$

所以 $\lim\limits_{\gamma\to 0}\mu^*(\gamma)=1$. 由此知，当 γ 是小量时 $\mu^*(\gamma)$在 1 附近.

（4） 首先求 $\mu=0$ 时，$\Omega(L_1)$，$\Omega(L_3)$的值，此时问题退化为二体问题.

x_{L_1} 满 足：$n^2x_{L_1}+\dfrac{1}{x_{L_1}^2}+\dfrac{3\alpha}{x_{L_1}^4}+\dfrac{5\beta}{x_{L_1}^6}=0$

x_{L_3} 满 足：$n^2x_{L_3}-\dfrac{1}{x_{L_3}^2}-\dfrac{3\alpha}{x_{L_3}^4}-\dfrac{5\beta}{x_{L_3}^6}=0$

所以 $x_{L_1}=-x_{L_3}=-1$，并且

$$\Omega(L_1)=\Omega(L_3)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(5\alpha+7\beta) \tag{4.2}$$

下面计算 $\mu=0$ 时，$\dfrac{d\Omega(x_{L_i},0)}{d\mu}$的值 $(i=1,3)$.

首先 $\dfrac{d\Omega(x_{L_i},0)}{d\mu}=\dfrac{\partial\Omega(x_{L_i},0)}{\partial\mu}+\dfrac{\partial\Omega(x_{L_i},0)}{\partial x_{L_i}}\cdot\dfrac{dx_L}{d\mu}=\dfrac{\partial\Omega(x_{L_i},0)}{\partial\mu}$

因为

$$\frac{\partial\Omega(x,0)}{\partial\mu}=\frac{n^2}{2}(r_2{}^2-r_1{}^2)+\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}-\frac{\alpha}{r_1{}^3}-\frac{\beta}{r_1{}^5}$$
$$+(1-\mu)\left(n^2r_1-\frac{1}{r_1{}^2}-\frac{3\alpha}{r_1{}^4}-\frac{5\beta}{r_1{}^6}\right)\frac{\partial r_1}{\partial\mu}+\mu\left(n^2r_2-\frac{1}{r_2{}^2}\right)\frac{\partial r_2}{\partial\mu}$$

对 于 L_1，$r_1=\mu-x_{L_1}$，$r_2=\mu-1-x_{L_1}$，则 $\dfrac{\partial r_1}{\partial\mu}=\dfrac{\partial r_2}{\partial\mu}=1$

所以 $\dfrac{\partial\Omega(x_{L_1},0)}{\partial\mu}=\dfrac{n^2}{2}(r_2{}^2-r_1{}^2)+\dfrac{1}{r_2}-\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{\alpha}{r_1{}^3}-\dfrac{\beta}{r_1{}^5}+(1-\mu)\left(r_1-\dfrac{1}{r_1{}^2}-\dfrac{3\alpha}{r_1{}^4}-\dfrac{5\beta}{r_1{}^6}\right)$

$$+\mu\left(r_2-\frac{1}{r_2{}^2}\right)+3\gamma(1-\mu)r_1+3\gamma\mu r_2$$

又因 $\dfrac{d\Omega(x_{L_1},0)}{dx}=n^2x_{L_1}+\dfrac{1-\mu}{r_1{}^2}+\dfrac{3\alpha(1-\mu)}{r_1{}^4}+\dfrac{5\beta(1-\mu)}{r_1{}^6}+\dfrac{\mu}{r_2{}^2}$

$$=(1-\mu)\left(\frac{1}{r_1{}^2}-r_1\right)+\mu\left(\frac{1}{r_2{}^2}-r_2\right)+\frac{3\alpha(1-\mu)}{r_1{}^4}+\frac{5\beta(1-\mu)}{r_1{}^6}+3\gamma(\mu-r_1)=0$$

利用这个式子可得:

$$\frac{\partial\Omega(x_{L_1},0)}{\partial\mu}=\frac{n^2}{2}(r_2{}^2-r_1{}^2)+\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}-\frac{\alpha}{r_1{}^3}-\frac{\beta}{r_1{}^5}+3\gamma$$

当 $\mu=0$ 时，$x_{L_1}=-1$，$r_1=\mu-x_{L_1}=1$，$r_2=\mu-1-x_{L_1}=0$，从而得

$$\left.\frac{\partial\Omega(x_{L_1},0)}{\partial\mu}\right|_{\mu=0}=+\infty \tag{4.3}$$

类似可推出:

$$\frac{\partial\Omega(x_{L_3},0)}{\partial\mu}=\frac{n^2}{2}(r_2{}^2-r_1{}^2)+\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}-\frac{\alpha}{r_1{}^3}-\frac{\beta}{r_1{}^5}$$

当 $\mu=0$ 时，$x_{L_3}=1$，$r_1=x_{L_3}-\mu=1$　$r_2=1+r_1=2$

所以
$$\left.\frac{\partial\Omega(x_{L_3},0)}{\partial\mu}\right|_{\mu=0}=1+\frac{1}{2}(7\alpha+13\beta) \tag{4.4}$$

据（4.2），（4.3），（4.4）三式，可画出 $\Omega(x_{L_1},0)$，$\Omega(x_{L_3},0)$ 在 $\mu=0$ 附近的图象（图3）.据本性质中第（3）条知，当 $\mu\to1$ 时，将有 $\Omega(L_3)>\Omega(L_2)>\Omega(L_1)$，因此一定可以找到一个 $\mu^{**}(\gamma)$ 满足 $0<\mu^{**}(\gamma)<1$，当 $0\leqslant\mu\leqslant\mu^{**}(\gamma)$ 时有: $\Omega(L_1)\geqslant\Omega(L_3)$.

当 $\gamma=0$ 时，问题退化成通常的平面圆型限制性三体问题，据［1］中结果知 $\mu^{**}(0)=\frac{1}{2}$，即 $\lim\limits_{\gamma\to0}\mu^{**}(\gamma)=\frac{1}{2}$. 由此知，当 γ 是小量时，$\mu^{**}(\gamma)$ 在 $\frac{1}{2}$ 附近.

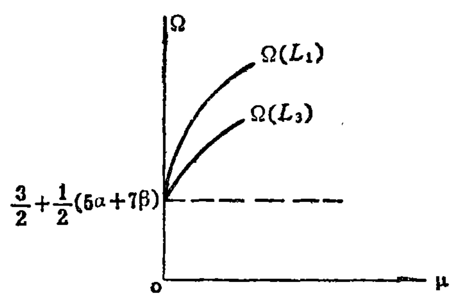

图 3

五、第三体P_3的可能运动区域

1. 第三体 P_3 的可能运动区域是 xy 平面上的点集:

$$\mathbf{R}=\{(x,y)\,|\,2\Omega(x,y)>c,\ r_1>\bar{r}\}$$

这里 c 由第三体 P_3 在旋转坐标系中的能量决定. 满足 $2\Omega(x,y)=0$ 的曲线称为零速度曲线.

2. 记 $2\Omega(L_i)=c_i$ $(i=1,2,3,4,5)$.

对给定的小量 γ，当 $0\leqslant\mu\leqslant\min\{\mu^*(\gamma),\ \mu^{**}(\gamma)\}=\mu^{**}(\gamma)$ 时，据第四节性质Ⅳ有:

$$c_5=c_4\leqslant c_3\leqslant c_1\leqslant c_2$$

再根据 $\Omega(x,y)$ 的其他性质和条件 $r_1>\bar{r}$，可以作出各种能量情况下第三体的可能运动区域，参见[1]中第四章. 除了考虑环的形状外，可能运动区域的结构与通常的平面圆型限制性三体问题的相似. 具体的图形参看[1]中第四章相应的图.

3. 可以证明: 当 $\mu^{**}(\gamma)\leqslant\mu\leqslant\mu^*(\gamma)$ 时，有

$$c_5=c_4\leqslant c_1\leqslant c_3\leqslant c_2$$

这时可能运动区域的结构与2段中情况类似．

4．其余情况不再讨论，因为在实际问题中，这些情况不会出现．但可以肯定，相应的可能运动区域的结构会出现和一般的平面圆型限制性三体问题的不一样的情形．

六、结　论

1．与通常的平面圆型限制性三体问题相比，本问题的结果和它有如下差别：

（1）运动方程不再具有关于$\mu=\frac{1}{2}$的对称性．

（2）秤动点的个数是变化的，最多五个，最少三个．

（3）三角秤动点与P_1，P_2的构形不再是等边三角形，而是等腰三角形．

相同之处是：在$0<\mu\leqslant\mu^*(\gamma)$范围内，可能运动区域的结构相似．

2．对于土星与天王星，它们相应的θ如下：$\theta_{土}\sim10^{-6}$，$\theta_{天王}\sim10^{-9}$，或更小．在有它们参与的限制性问题讨论中，环的影响可按上面方法处理，但影响是很微弱的．

本文是在郑学塘，贾沛璋两位老师指导下完成的，作者对他们表示衷心的感谢．

参　考　文　献

1．Szebehely, V., *Theory of Orbits*, Academic Press New York, (1967).

2．Bhatnagar, K. B. and Chawla, J. M., *Celes. Mech.*, 16, (1977), 129—136.

The Region of Possible Motion of the Planar Circular Restricted Three-Body Problem under the Influence of a Ring

Zhang Xiang-ling

(Department of Astronomy, Beijing Normal University, Beijing)

Abstract

This paper discusses the region of possible motion of planar circular restricted three-body problem among which the primary has a ring.