应用数学和力学，第3卷第3期（1982年5月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

圆管层流与湍流进口段效应修正系数的研究*

王 致 清

（哈尔滨工业大学，1981年9月28日收到）

摘　要

本文对于光滑圆管层流与湍流进口段长度以及压力损失和流量进口段效应修正系数，提出统一的计算方法．

通过具体算例，提供了层流与湍流进口段效应压力损失和流量修正系数的理论计算公式．并且给出计及湍流进口段效应的流量计算方法．理论计算结果与实验数据比较表明，本文提供的公式，是简便而又可靠的．

一、引　言

本文利用边界层动量积分关系式的近似处理方法，在边界层内速度分布和摩擦应力为一般表达式下，对于光滑圆管层流或湍流进口段长度、压力损失和流量进口段效应修正系数，给出统一的计算方法．

本文又通过具体算例，提供了层流与湍流的进口段效应压力损失和流量修正系数沿流程（或者随边界层厚度）而变化的关系式．并且给出计及湍流进口段效应流量的计算方法．理论计算值与实验数据比较表明，本文提供的理论计算公式，是简便而可靠的．在液压工程技术中，常常碰到需要考虑进口段效应的“短圆管”，因此本文很有工程实际意义．

文中引用符号的意义：

x, y——直角坐标
p_0——在进口($x=0$)断面上压力
p——在离进口为x的断面上压力
p_e——进口段终了处的压力
u——在边界层内x方向速度分量
u_0——在边界层外侧势流速度
u_m——管道过流断面上平均速度
τ_w——管壁面上摩擦应力
δ——边界层厚度
δ_1——边界层排挤厚度
δ_2——边界层动量厚度
ρ——流体的密度
μ——流体的动力粘性系数
ν——流体的运动粘性系数
λ_ξ——局部压头损失系数
λ——全压头损失系数

* 钱伟长推荐．

λ_p——压力损失系数

γ——进口段效应压力损失修正系数

C_e——进口段效应流量修正系数

d——圆管直径($d=2r_0$)

$\xi=\dfrac{x}{d}$——无因次管长

$U=\dfrac{u_0}{u_m}$——无因次势流速度

$\Delta=\dfrac{\delta}{r_0}$——无因次边界层厚度

$\Delta_1=\dfrac{\delta_1}{r_0}$——无因次排挤厚度

$\Delta_2=\dfrac{\delta_2}{r_0}$——无因次动量厚度

$Re=\dfrac{u_m d}{\nu}$——雷诺数

二、理论基础

从进口开始沿壁面流动方向以 x 表示，壁面的内法线方向表示为 y(见图 1 示). 从圆管轴线起算的径向矩离为 $r=r_0-y$(r_0——为圆管半径).

假设：(1)流体为不可压缩($\rho=$常数)；流动是定常的；管进口圆滑；在进口处速度均匀为一常数. (2)在进口段形成以管轴为对称的边界层(见图 1 示). 在边界层内是层流或湍流(指时均湍流)，在边界层外侧是势流. (3)在进口段终了的流动形成完全发展了的层流(Hagen-Poiseulle 流)或者形成完全发展了的时均湍流，其速度分布为抛物线规律或者近似为幂次型速度规律(准确为对数规律).

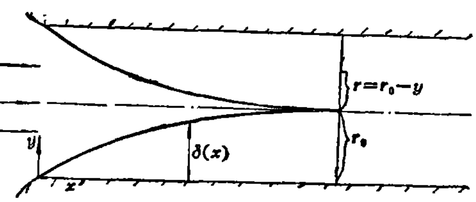


图 1

沿着圆管壁面的边界层动量积分关系式有如下形式

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta (u_0-u)u\left(1-\frac{y}{r_0}\right)dy-\frac{du_0}{dx}\int_0^\delta u\left(1-\frac{y}{r_0}\right)dy$$
$$=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\int_0^\delta\left(1-\frac{y}{r_0}\right)dy+\frac{\tau_w}{\rho} \tag{2.1}$$

或者有无因次形式

$$\frac{d\Delta_2}{d\xi}+\frac{1}{U}\frac{dU}{d\xi}(2\Delta_2+\Delta_1)=\frac{2\tau_w}{\rho u_0^2} \tag{2.2}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}\Delta_1&=\frac{\delta_1}{r_0}=\frac{1}{r_0}\int_0^\delta\left(1-\frac{u}{u_0}\right)\left(1-\frac{y}{r_0}\right)dy\\ \Delta_2&=\frac{\delta_2}{r_0}=\frac{1}{r_0}\int_0^\delta\left(1-\frac{u}{u_0}\right)\frac{u}{u_0}\left(1-\frac{y}{r_0}\right)dy\end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

上面的关系式对于层流或湍流，均可适用.

设边界层内速度分布有一般函数形式

$$\frac{u}{u_0}=f(\eta)\qquad\qquad \eta=\frac{y}{\delta} \tag{2.4}$$

由连续性条件推导得

$$U=\frac{u_0}{u_m}=\frac{1}{1-2A\Delta+B\Delta^2} \tag{2.5}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}A&=\int_0^1(1-f)d\eta\\B&=\int_0^1(1-2\eta f)d\eta\end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

而且有

$$\Delta_1=A\Delta-\frac{1}{2}B\Delta^2 \tag{2.7}$$

$$\Delta_2=C\Delta-D\Delta^2 \tag{2.8}$$

式中

$$C=\int_0^1(1-f)fd\eta \tag{2.9}$$

$$D=\int_0^1\eta(1-f)fd\eta \tag{2.10}$$

边界层内速度分布函数 $f(\eta)$，除了应满足边界层的一般边界条件外，尚要满足一定的附加条件，即满足当 $\Delta\to 1$ 时，流动形成完全发展了的均匀流动条件：

对于完全发展了的层流（Hagen-Poiseulli 流），有 $U(\Delta=1)=2$，由(2.5)式推出

$$\int_0^1 f(1-\eta)d\eta=\frac{1}{4} \tag{2.11}$$

对于完全发展了的时均湍流，由(2.5)式推出

$$\int_0^1 f(1-\eta)d\eta=\frac{1}{2}U^{-1}(\Delta=1) \tag{2.12}$$

式中 $U^{-1}(\Delta=1)$ 是依雷诺数而定的某个数值．实验指出，在雷诺数不太高的情况下，即当 $Re=4\times10^3\sim3.2\times10^6$时，$U^{-1}(\Delta=1)$靠近 0.80～0.87．此时，可以采用幂次型度速分布

$$f(\eta)=\eta^n \tag{2.13}$$

在上述雷诺数范围内， $n=\frac{1}{6}\sim\frac{1}{10}$范围内变化．此时有

$$U^{-1}(\Delta=1)=\frac{2}{(n+1)(n+2)} \tag{2.14}$$

与速度幂次型分布规律(2.13)相对应的壁面上摩擦应力，采用如下的经验公式

$$\tau_w=B(n)\left(\frac{\nu}{u_0\delta}\right)^m\rho u_0^2 \tag{2.15}$$

式中 $B(n)$——与雷诺数相关的特征数，阻力规律幂次指数 m，与速度指数 n 有下列关系：

$$m=\frac{2n}{n+1} \tag{2.16}$$

层流的壁面上摩擦应力，按 Newton 摩擦定律确定，得

$$\tau_w=\left(\frac{\partial f}{\partial\eta}\right)_0\rho u_0^2\left(\frac{\nu}{u_0\delta}\right) \tag{2.17}$$

与(2.15)式比较，如果在(2.15)式中，令$m=1, B(n)=\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)_0$，则(2.15)式变成为(2.17)式．因此我们可假设(2.15)式亦适用于层流计算用．这样，对于摩擦应力，不论是层流或者是湍流，将有统一的表达式(2.15)．应当指出的是，对于湍流它是与幂次型速度分布规律相对应的．而层流速度分布规律可以是一般函数形式．

三、层流与湍流进口段效应修正系数的一般表达式

下面给出层流与湍流进口段长度、进口段效应修正系数沿流程(或者Δ)改变的统一表达式．

1. 进口段长度

将(2.15)式变换得

$$\frac{2\tau_w}{\rho u_0^2}=2B(n)\left(\frac{\nu}{u_0\delta}\right)^m=2^{m+1}B(n)\,Re^{-m}\Delta^{-m}U^{-m} \tag{3.1}$$

利用上式(3.1)，(2.2)式改写成为

$$\left[\frac{d\Delta_2}{d\Delta}+\frac{1}{U}\frac{dU}{d\Delta}(2\Delta_2+\Delta_1)\right]\frac{d\Delta}{d\xi}=2^{m+1}B(n)Re^{-m}\Delta^{-m}U^{-m} \tag{3.2}$$

把(2.7)和(2.8)式与(2.5)式及其导数，代入上式(3.2)化简整理得

$$d\xi=\frac{Re^m}{2^{m+1}B(n)}\frac{\Delta^m(C+C_1\Delta+C_2\Delta^2+C_3\Delta^3)}{(1-2A\Delta+B\Delta^2)^{m+1}}d\Delta \tag{3.3}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}C_1&=2A(A+C)-2D\\ C_2&=-3B(A+C)\\ C_3&=B(B+2D)\end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

积分式(3.3)得

$$\xi=\frac{Re^m}{2^{m+1}B(n)}\int_0^\Delta\frac{\Delta^m(C+C_1\Delta+C_2\Delta^2+C_3\Delta^3)}{(1-2A\Delta+B\Delta^2)^{m+1}}d\Delta \tag{3.5}$$

上式适合于层流，也适合于湍流计算用．它是无因次进口段管长随无因次边界层厚度变化的关系式．令$\Delta=1$，求得无因次进口段长度(ξ_e)．

2. 压力损失系数

局部压头损失系数为

$$\lambda_\xi=-\frac{\partial p}{\partial \xi}\Big/\frac{1}{2}\rho u_m^2 \tag{3.6}$$

当$\xi<\xi_e$时，在边界层外侧利用 Bernoulli 方程式有

$$-\frac{\partial p}{\partial \xi}=\rho u_0\frac{du_0}{d\xi}$$

故

$$\lambda_\xi = 2U\frac{dU}{d\xi} = 2U\frac{dU}{d\Delta}\cdot\frac{d\Delta}{d\xi} \tag{3.7}$$

将(2.5)式及其导数$\frac{dU}{d\Delta}$和(3.3)式一并代入(3.7)式得

$$\lambda_\xi = \frac{2^{m+2}B(n)}{Re^m}\frac{A-B\Delta}{\Delta^m(C+C_1\Delta+C_2\Delta^2+C_3\Delta^3)}\frac{1}{(1-2A\Delta+B\Delta^2)^{2-m}} \tag{3.8}$$

当$\xi \geqslant \xi_e$时，$\Delta\equiv 1(\delta=r_0)$，则(2.1)式变为

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\int_0^{r_0}\left(1-\frac{y}{r_0}\right)dy = \frac{\tau_w}{\rho}$$

或为

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \xi} = 4\frac{\tau_w}{\rho} \tag{3.9}$$

故

$$\lambda_\xi = 4\tau_w\Big/\frac{1}{2}\rho u_m^2 = \frac{2^{m+3}\cdot B(n)U^{2-m}(\Delta=1)}{Re^m} \tag{3.10}$$

沿管段全压头损失系数

$$\lambda = \frac{1}{\xi}\frac{p_0-p}{\frac{1}{2}\rho u_m^2} \tag{3.11}$$

当$\xi<\xi_e$时，利用Bernoulli方程式有

$$\frac{p_0-p}{\frac{1}{2}\rho u_m^2} = U^2-1$$

将上式代入(3.11)式，并注意到(2.5)式，则有

$$\lambda = \frac{1}{\xi}\left[\frac{1}{(1-2A\Delta+B\Delta^2)^2}-1\right] \tag{3.12}$$

压力损失系数，当$\xi<\xi_e$时，有

$$\lambda_p = \frac{p_0-p}{\frac{1}{2}\rho u_m^2} = \lambda\xi = \frac{1}{(1-2A\Delta+B\Delta^2)^2}-1 \tag{3.13}$$

当$\xi=\xi_e$时，$\Delta\equiv 1$，则有

$$\lambda_{pe} = \frac{1}{(1-2A+B)^2}-1 \tag{3.14}$$

当$\xi\geqslant\xi_e$时，由于

$$-\frac{\partial p}{\partial \xi} = 4\tau_w = \frac{2^{m+3}B(n)U^{2-m}(\Delta=1)}{Re^m}\frac{1}{2}\rho u_m^2$$

而压力损失

$$\Delta p = (p_0-p_e)+(p_e-p) = \lambda_{pe}\frac{1}{2}\rho u_m^2 + \int_{\xi_e}^{\xi}\left(-\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)d\xi$$

故压力损失系数

$$\lambda_p=\lambda_{pe}+\frac{\int_{\xi_e}^{\xi}\left(-\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)d\xi}{\frac{1}{2}\rho u_m^2}=\frac{2^{m+3}B(n)U^{2-m}(\Delta=1)}{Re^m}\xi+\gamma_e \tag{3.15}$$

其中
$$\gamma_e=\lambda_{pe}-\frac{2^{m+3}B(n)U^{2-m}(\Delta=1)}{Re^m}\xi_e \tag{3.16}$$

如果包括在进口处形成均匀速度 (u_m) 的压力损失$\left(\frac{1}{2}\rho u_m^2\right)$在内，则压力损失系数

$$\lambda_p=\frac{2^{m+3}B(n)U^{2-m}(\Delta=1)}{Re^m}\xi+(\gamma_e+1) \tag{3.17}$$

系数 γ_e 是反映整个进口段的附加压力损失的，称为进口段效应压力损失修正系数（或称进口段附加压力损失系数）. 它实际上是与雷诺数无关的常数.

3. 进口段效应修正系数

当 $\xi\leqslant\xi_e$ 时，压力损失系数可表示成为下面形式

$$\lambda_p=\frac{p_0-p}{\frac{1}{2}\rho u_m^2}=\frac{2^{m+3}\cdot B(n)U^{2-m}(\Delta=1)}{Re^m}\xi+\gamma \tag{3.18}$$

与(3.13)式进行比较，得进口段效应压力损失修正系数

$$\gamma=\left[\frac{1}{(1-2A\Delta+B\Delta^2)^2}-1\right]-\frac{2^{m+3}\cdot B(n)U^{2-m}(\Delta=1)}{Re^m}\xi \tag{3.19}$$

此式是在进口段流动区域，沿途改变的关系式. 当$\xi\geqslant\xi_e$时，有$\Delta\equiv1(\xi=\xi_e)$，则上式(3.19)将变为(3.16)式，即 $\gamma=\gamma_e$.

求进口段效应流量修正系数，由(3.18)式求得压力降

$$p_0-p=\left(\frac{2^{m+3}\cdot B(n)U^{2-m}(\Delta=1)}{Re^m}\xi+\gamma\right)\frac{1}{2}\rho u_m^2$$

或者表示成为

$$p_0-p=C_e 2^{m+2}\cdot B(n)U^{2-m}(\Delta=1)\frac{\rho^{1-m}\mu^m u_m^{2-m}}{d^m}\xi \tag{3.20}$$

其中

$$C_e=1+\gamma\frac{Re^m}{2^{m+3}\cdot B(n)U^{2-m}(\Delta=1)\xi} \tag{3.21}$$

将(3.19)式代入上式(3.21)，化简得

$$C_e=\left[\frac{1}{(1-2A\Delta+B\Delta^2)^2}-1\right]\Big/2^{m+3}\cdot B(n)U^{2-m}(\Delta=1)\frac{\xi}{Re^m} \tag{3.22}$$

当 $\xi\geqslant\xi_e$ 时，$\Delta\equiv1$，由(3.15)式求得压力降

$$p_0-p=C_e2^{m+2}B(n)U^{2-m}(\Delta=1)\frac{\rho^{1-m}\mu^m u_m^{2-m}}{d^m}\xi \tag{3.23}$$

其中

$$C_e=1+\gamma_e\frac{Re^m}{2^{m+3}B(n)U^{2-m}(\Delta=1)\xi} \tag{3.24}$$

将(3.16)式代入上式(3.24)，化简整理得

$$C_e=\frac{\lambda_{pe}}{2^{m+3}B(n)U^{2-m}(\Delta=1)}\frac{Re^m}{\xi}+\left(1-\frac{\xi_e}{\xi}\right) \tag{3.25}$$

前式(3.22)是在进口段流动区域，进口段效应流量修正系数沿途变化的关系式．分析(3.25)式得，当ξ十分大时，即$\xi\gg\xi_e$，则有$C_e\doteq 1$．也就是说，当管道十分长时，进口段效应可以忽略．当ξ接近ξ_e，特别是当$\xi<\xi_e$时，C_e值是显著大于1的．

计及进口段效应，流量的计算，采用下面的方法进行修正．由(3.20)式或者(3.23)式求得平均速度

$$u_m=\frac{d^{\frac{m}{2-m}}\cdot\Delta p^{\frac{1}{2-m}}}{C_e^{\frac{1}{2-m}}\,2^{\frac{2+m}{2-m}}\,B(n)^{\frac{1}{2-m}}\,U(\Delta=1)\,\rho^{\frac{1-m}{2-m}}\,\mu^{\frac{m}{2-m}}\,\xi^{\frac{1}{2-m}}} \tag{3.26}$$

则流量计算公式有

$$Q=\frac{1}{4}\pi d^2\cdot u_m$$

$$=\frac{\pi d^{\frac{4-m}{2-m}}\,\Delta p^{\frac{1}{2-m}}}{C_e^{\frac{1}{2-m}}\,2^{\frac{6-m}{2-m}}\cdot B(n)^{\frac{1}{2-m}}\,U(\Delta=1)\rho^{\frac{1-m}{2-m}}\mu^{\frac{m}{2-m}}\xi^{\frac{1}{2-m}}} \tag{3.27}$$

如果包括进口处损失$\left(\frac{1}{2}\rho u_m^2\right)$在内，则压力差$\Delta p=P_0-p$；其中$P_0$——为进口处前边的压力．

四、算例与实验分析比较

1. 层流进口段

设在进口段层流边界层内流速分布为相似的，则有

$$\frac{u}{u_0}=f(\eta)=2\eta-\eta^2 \tag{4.1}$$

由(2.6)、(2.9)和(2.10)式计算下列各常数

$$A=\frac{1}{3},\quad B=\frac{1}{6},\quad C=\frac{2}{15},\quad D=\frac{1}{20} \tag{4.2}$$

再由(3.4)式算得

$$C_1=\frac{19}{90},\quad C_2=-\frac{7}{30},\quad C_3=\frac{2}{45} \tag{4.3}$$

并且令　　$m=1$，$B(n)=\left(\frac{\partial f}{\partial\eta}\right)_0=2$　　(4.4)

将(4.2)、(4.3)和(4.4)式各有关常数代入(3.5)式，并进行积分得无因次进口段管长沿途改变的关系式

$$\xi=\frac{3}{4}Re\left\{-1.6234+\frac{1}{15}\left[4\Delta+\frac{\frac{17}{2}\Delta+12}{\Delta^2-4\Delta+6}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{37}{4}\sqrt{2}\,\mathrm{tg}^{-1}\frac{2-\Delta}{\sqrt{2}}+\frac{11}{2}\ln(\Delta^2-4\Delta+6)\right]\right\} \tag{4.5}$$

令　$\Delta=1$，求得无因次进口段长度

$$\xi_e=0.0288Re \tag{4.6}$$

在文献［1］中，近似计算得 $\xi_e=0.03Re$.

压力损失系数，当 $\xi\leqslant\xi_e$ 时，将(4.2)式有关常数代入(3.13)式，得

$$\lambda_p=\frac{1}{(1-\frac{2}{3}\Delta+\frac{1}{6}\Delta^2)^2}-1 \tag{4.7}$$

当 $\xi=\xi_e$ 时，$\Delta\equiv1$　则有 $\lambda_{pe}=3$.

当 $\xi\geqslant\xi_e$ 时，由(3.15)与(3.16)式算得压力损失系数

$$\lambda_p=\frac{64}{Re}\xi+1.1568 \tag{4.9}$$

当 $\xi\leqslant\xi_e$ 时，或者由(3.18)和(3.19)式，将压力损失系数表示成为

$$\lambda_p=\frac{64}{Re}\xi+\gamma \tag{4.10}$$

其中

$$\gamma=\frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\Delta+\frac{1}{6}\Delta^2\right)^2}-1-\frac{64}{Re}\xi \tag{4.11}$$

当 $\xi\geqslant\xi_e$ 时，$\Delta\equiv1$，则上式 $\gamma=\gamma_e=1.1568$.

如果包括在进口处形成均匀速度的压力损失 $\left(\frac{1}{2}\rho u_m^2\right)$ 在内，则进口段效应压力损失修正系数有

$$\gamma=\frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\Delta+\frac{1}{6}\Delta^2\right)^2}-\frac{64}{Re}\xi \tag{4.12}$$

当 $\xi\geqslant\xi_e$ 时，$\Delta\equiv1$；则上式 $\gamma=\gamma_e=2.1568$.

进口段效应流量修正系数，当 $\xi\leqslant\xi_e$ 时，由(3.21)和(4.12)式求得

$$C_e=\frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\Delta+\frac{1}{6}\Delta^2\right)^2}\Bigg/\frac{64}{Re}\xi \tag{4.13}$$

当 $\xi=\xi_e$ 时，$\Delta=1$；则有 $C_e=2.1701$.

当 $\xi\geqslant\xi_e$ 时，由(3.25)式（此时 $\lambda_{pe}=4$）求得系数

$$C_e=1+0.0337\frac{Re}{\xi}=1+1.1701\frac{\xi_e}{\xi} \tag{4.14}$$

今将系数 λ_p 随 ξ/Re（或者 Δ）而变化的关系曲线画于图 2 所示．将系 数 γ 和 C_e 随 ξ/Re（或者 Δ）而变化的关系曲线画于图 3 所示．

用液压装置，以油液介质（上稠 50*），分别在不同圆管长度上(不同的雷诺数下)进行实验，将实验值列在表一中，并分别将实验点画在图 3 上．理论值与实验值比较，是基本符合和接近的．

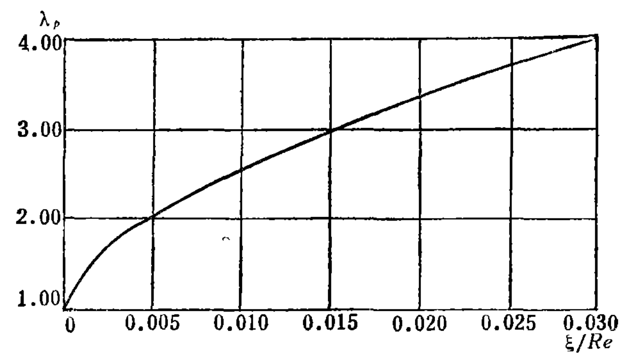
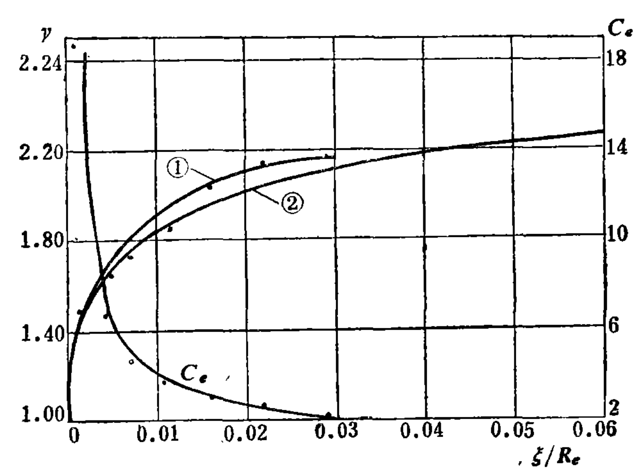


图 2



①：本文的计算曲线

②：公式(4.16)的计算曲线

"•"：实验值

图 3

由(3.21)式求得进口段效应流量修正系数

$$C_e=1+\gamma\Big/64\cdot\frac{\xi}{Re} \tag{4.15}$$

当 $\xi\geqslant\xi_e$ 时，在上式中 γ 取为 $\gamma_e=2.1568$.当$\xi\leqslant\xi_e$时，式中γ取(4.12)式计算值.因而(4.15)式可以取代(4.13)和(4.14)式.

在文献[5]中，按着 *Langhaar* 计算数据[4]，对于进口段效应压力损失修正系数给出如下近似表达式

$$\left.\begin{aligned}&\gamma=1+2.62\left(\frac{\xi}{Re}\right)^{\frac{1}{4}} && \left(当\ \frac{\xi}{Re}\leqslant0.057\right)\\ &\gamma_e=2.28 && \left(当\ \frac{\xi}{Re}\geqslant0.057\right)\end{aligned}\right\} \tag{4.16}$$

将(4.16)式系数γ随ξ/Re而变化的关系曲线，亦画在图3上.

流量计算公式，参见文献[6].

表 1

Δ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
ξ/Re	0.0001	0.0005	0.0013	0.0026	0.0045	0.0072	0.0109	0.0157	0.0216	0.0288
$64\xi/Re$	0.0064	0.0320	0.0832	0.1664	0.2880	0.4608	0.6976	1.0048	1.3824	1.8432
λ_p理论值	1.1438	1.3111	1.5055	1.7313	1.9930	2.2956	2.6439	3.0421	3.4937	4
γ 理论值	1.1374	1.2791	1.4223	1.5649	1.7270	1.8348	1.9463	2.0373	2.1113	2.1568
γ 实验值	—	—	1.4934	—	1.6681	1.7055	1.8497	2.0366	2.1409	2.1658
C_e理论值	178.7	41.53	18.10	10.40	6.997	4.982	3.790	3.028	2.527	2.170
C_e实验值	—	—	18.83	—	6.792	4.701	3.652	3.026	2.549	2.175

2 湍流进口段

设在进口段湍流边界层内流速为幂次型分布

$$\frac{u}{u_0}=f(\eta)=\eta^n \tag{4.17}$$

由(2.6)、(2.7)和(2.8)计算下列各常数

$$\left.\begin{aligned}&A=\frac{n}{n+1}, && B=\frac{n}{n+2}\\ &C=\frac{n}{(n+1)(2n+1)}, && D=\frac{n}{2(n+1)(n+2)}\end{aligned}\right\} \tag{4.18}$$

再由(3.4)式算得

$$\left.\begin{aligned}C_1&=\frac{n(4n^2+6n-1)}{(n+1)(n+2)(2n+1)}\\ C_2&=\frac{-6n^2}{(n+2)(2n+1)}\\ C_3&=\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}\end{aligned}\right\} \tag{4.19}$$

把(4.18)和(4.19)式有关各值代入(3.5)式，并经化简整理得

$$\xi=\frac{nRe^{m}}{2^{m+1}B(n)\,(n+1)\,(n+2)(2n+1)}$$

$$\cdot\int_0^{\Delta}\frac{\Delta^m[(n+2)+(4n^2+6n-1)\Delta-6n(n+1)\Delta^2+n(2n+1)\Delta^3]d\Delta}{\left(1-\frac{2n}{n+1}\Delta+\frac{n}{n-2}\Delta^2\right)^{m+1}} \tag{4.20}$$

因为

$$\frac{\Delta^m[(n+2)+(4n^2+6n-1)\Delta-6n(n+1)\Delta^2+n(2n+1)\Delta^3]}{\left(1-\frac{2n}{n+1}\Delta+\frac{n}{n-2}\Delta^2\right)^{m+1}}$$

$$\doteq\Delta^m[(n+2)+(4n^2+6n-1)\Delta-6n(n+1)\Delta^2+n(2n+1)\Delta^3]\left[1+\frac{5n}{2(n+1)}\Delta\right]$$

$$\doteq\Delta^m(n+2)\left[1+\frac{8n^3+25n^2+20n-2}{2(n+1)\,(n+2)}\Delta+\frac{8n^3+6n^2-17n}{2(n+1)(n+2)}\Delta^2-\frac{26n^3+24n^2-2n}{2(n+1)(n+2)}\Delta^3\right.$$

$$\left.+\frac{5n^2\,(2n+1)}{2(n+1)(n+2)}\Delta^4\right] \tag{4.21}$$

将上式(4.21)代入(4.20)式积分中，再积分得

$$\xi=\frac{n\cdot Re^{m}}{2^{m+1}\cdot B(n)\,(n+1)(2n+1)}\Delta^{m+1}\left[\frac{1}{m+1}+\frac{8n^3+25n^2+20n-2}{2(n+1)(n+2)}\,\frac{1}{m+2}\Delta\right.$$

$$+\frac{8n^3+6n^2-17n}{2(n+1)(n+2)}\,\frac{1}{m+3}\Delta^2-\frac{26n^3+24n^2-2n}{2(n+1)(n+2)}\,\frac{1}{m+4}\Delta^3$$

$$\left.+\frac{10n^3+5n^2}{2(n+1)(n+2)}\,\frac{1}{m+5}\Delta^4\right] \tag{4.22}$$

对于 $n=\frac{1}{7}$ 幂次型速度分布规律，相对应有 $m=\frac{1}{4}$，$B(n)=0.0233$，则由(4.22)式计算得无因次管长随 Δ 而变化的关系式

$$\xi=1.4039Re^{\frac{1}{4}}\,\Delta^{\frac{5}{4}}(1+0.1577\Delta-0.1793\Delta^2-0.0168\Delta^3+0.0064\Delta^4) \tag{4.23}$$

当 $\Delta=1$ 时，得无因次进口段长度

$$\xi_e=1.3590Re^{\frac{1}{4}} \tag{4.24}$$

在文献[2]中，给出了类似结果，并做了较详细的讨论. 各种计算结果比较，亦可参见文献[3]中的内容.

压力损失系数，当 $\xi\leqslant\xi_e$ 时，由(3.13)式得

$$\lambda_p=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\Delta+\frac{1}{15}\Delta^2\right)^2}-1 \tag{4.25}$$

当 $\xi=\xi_e$ 时，$\Delta=1$，则有 $\lambda_{pe}=0.4994$.
当 $\xi\geqslant\xi_e$ 时，由(3.15)和(3.16)式算得

$$\lambda_p=\frac{0.316}{Re^{\frac{1}{4}}}\xi+0.07 \tag{4.26}$$

反映整个进口段效应的压力损失修正系数 $\gamma_e=0.07$. 比层流的要小.

压力损失系数的一般表示式，有

$$\lambda_p=\frac{0.316}{Re^{\frac{1}{4}}}\xi+\gamma \tag{4.27}$$

式中

$$\gamma=\left[\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\Delta+\frac{1}{15}\Delta^2\right)^2}-1\right]-\frac{0.316}{Re^{\frac{1}{4}}}\xi \tag{4.28}$$

当 $\xi\geqslant\xi_e$ 时，$\Delta=1$，则有 $\gamma=\gamma_e=0.07$.

如果包括在进口处形成均匀速度的压力损失 $\left(\frac{1}{2}\rho u_m^2\right)$ 在内，则有

$$\gamma=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\Delta+\frac{1}{15}\Delta^2\right)^2}-\frac{0.316}{Re^{\frac{1}{4}}}\xi \tag{4.29}$$

而 $\gamma_e=1.07$.

进口段效应流量修正系数，当 $\xi\leqslant\xi_e$ 时，可算出有

$$C_e=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\Delta+\frac{1}{15}\Delta^2\right)^2}\Bigg/0.316\frac{\xi}{Re^{\frac{1}{4}}} \tag{4.30}$$

当 $\xi=\xi_e$ 时，$\Delta=1$，则有 $C_e=3.492$.
当 $\xi\geqslant\xi_e$ 时，由(3.25)式算出有

$$C_e=1+3.386\frac{Re^{\frac{1}{4}}}{\xi}=1+2.492\frac{\xi_e}{\xi} \tag{4.31}$$

由(3.21)式求得进口段效应流量修正系数

$$C_e=1+\gamma\Big/0.316\frac{\xi}{Re^{\frac{1}{4}}} \tag{4.32}$$

当 $\xi\geqslant\xi_e$ 时，在上式中 γ 取 $\gamma_e=1.07$. 当 $\xi\leqslant\xi_e$ 时，上式中 γ 按(4.29)式取值.

将圆管湍流进口段各系数沿程变化的计算数值列表于 2 中.

表 2

Δ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$\xi/Re^{\frac{1}{4}}$	0.0800	0.1923	0.3213	0.4615	0.6093	0.7616	0.9153	1.0679	1.2167	1.3590
λ_p	1.0505	1.1018	1.1537	1.2058	1.2577	1.3091	1.3594	1.4082	1.4551	1.4994
γ	1.025	1.041	1.052	1.060	1.065	1.068	1.070	1.070	1.070	1.070
C_e	41.52	18.12	11.37	8.270	6.534	5.439	4.701	4.172	3.784	3.492

系数γ与C_e随着$\xi/Re^{\frac{1}{4}}$(或者Δ)而变化的关系曲线，如图4所示.

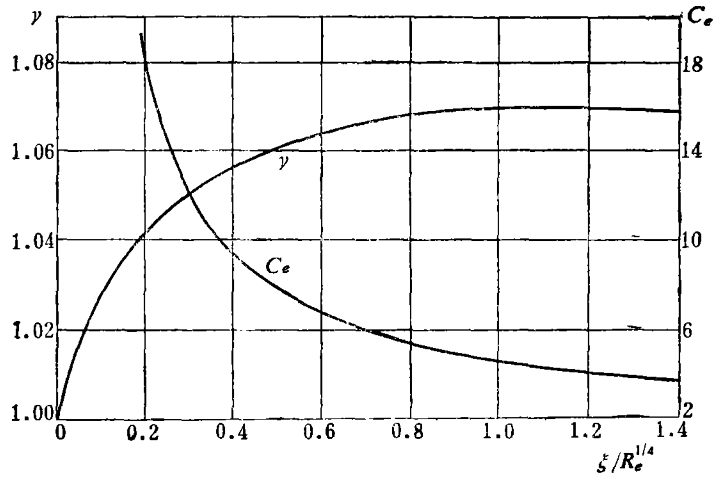


图 4

流量计算公式，由(3.27)式求得

$$Q=2.2544\frac{d^{\frac{19}{7}}\Delta p^{\frac{4}{7}}}{C_e^{\frac{4}{7}}\rho^{\frac{3}{7}}\mu^{\frac{1}{7}}x^{\frac{4}{7}}} \tag{4.33}$$

本文提供这个公式，可用来计算计及湍流进口段效应时的流量.

过去一般认为湍流进口段效应可以忽略. 但计算表明，系数C_e对流量的影响是不小的. 如当圆管长度等于进口段长度时，即$\xi=\xi_e$时，$C_e=3.492$，因而$C_e^{\frac{4}{7}}=2.043$. 可见，$C_e^{\frac{4}{7}}$是大于1的，对流量有显著影响的. 所以对“短圆管”湍流进口段效应也必须加以考虑的. 但是，进口段效应对压力损失的影响，湍流比层流的影响要小的多. 这从对比表1和表2中的系数γ值，即可得到. 另外，从表2中的系数γ值可见，对湍流进口段，当$\Delta\geqslant0.7$时，γ值不再变化. 这表明当$\Delta=0.7$时，完全发展了的时均湍流就已近乎形成.

本文中的实验值由赵彤同志提供，在此致以谢意.

参 考 文 献

1. 王补宣, 力学学报, 1, (1963), 38—52.
2. 王补宣, 高等学校自然科学学报, 机械、动力版, 5, (1965), 482.
3. Wang, J. S. and Tullis, J. P., *J. of Fluids Engng*, **96**, **1**, (1974).
4. Langhaar, *J. Appl. Mech*, 9, 22, (1942).
5. 市川常雄(日), 《液压技术基本理论》, p17, 煤碳工业出版社.
6. 王致清, 哈尔滨工业大学学报, 3, (1980), 26.

Study on Correction Coefficients of Laminar and Turbulent Entrance Region Effect in Round Pipe

Wang Zhi-ging

(Harbin Institute of Technology, Harbin)

Abstract

In this paper, a universal method for calculation of the iulet length and correction coefficient for the pressure losses and the flow in the case of laminar and turbulent flow in a smooth round pipe is put forward.

With the aid of concrete examples, theoretical formulas are presented for calculation of the correction coefficient for pressure losses and flow in the case of laminar and turbulent flow. And a method for calculation of the flow is also presented here in consideration of the inlet effect of turbulent flow.

By comparing the theoretical results with the experimental data, formulas presented in this paper are very simple and reliable.