

研究金属中激波构造与衰减的 一个物理模型

段 祝 平

(北京中国科学院力学研究所, 1980年5月1日收到)

摘 要

本文给出了研究金属中激波构造与衰减的一个物理模型. 为了建立高速形变下材料的本构方程和研究激波过渡带的构造, 需要考虑二个独立的理论方面. 首先, 将比内能分解成弹性压缩能和弹性形变能, 而将形变能作为弹性应变和熵的函数展开到三阶项, 其中考虑了热与机械能的耦合效应. 其次, 从位错动力学角度建议了一个塑性松弛函数以便描述高温、高压下塑性流动的特性. 另外, 本文给出了一个常微分方程组用以计算定态激波过渡带中各状态变量的分布以及激波的厚度. 倘若假定在激波上熵的跳跃可以忽略, 并用 Hugoniot 压缩模量代替等熵压缩模量, 可以获得一个分析解. 最后, 本文还提出了求解平板对称碰撞中激波波头衰减的一个近似方法.

一、引 言

过去二十年中, 对高速变形下材料动力学性能的研究取得了显著的进展. 在这一领域中, 平板撞击试验和一维波技术被广泛地用来研究各种有兴趣的课题, 诸如高压固体状态方程, 动高压相变、弹塑性物质的本构方程以及动态断裂等等, 其中, 关于平面激波的大量研究工作已在文献 [1]、[2] 中作了详细总结. 在决定固体状态方程时, 根据流体动力学模型, 作了下列基本假定:

- 1) 激波看成是数学上的一个强间断面, 不具有内部结构;
- 2) 激波是定态的, 其速度与幅度均为常数, 换言之, 不考虑激波的发展过程;
- 3) 邻近激波波阵面的物质, 经过激波绝热压缩, 处于热力学平衡状态;
- 4) 忽略剪切强度效应, 波后物质处于各向同性静水压缩状态;
- 5) 波后质点速度, 可以用声学近似加以计算, 有时, 取自由表面速度的一半.

显而易见, 这一模型不能反映高速变形下材料塑性流动的特征, 除非真正发生了从固态到液态的相变. 因此, 为了预示激波剖面的详细过程以及激波从不定常运动到定常运动的演化过程, 就必须建立一个满意的关于热弹塑性物质的本构理论. 事实上, 根据应变率无关理论已建立了流体弹塑性模型, 并成功地解释了双波结构以及波的相互作用机理. 然而, 在平板撞击试验中用高分辨的激光干涉仪测量自由表面的速度发现了两个重要现象, 它们是无法用应变率无关理论解释的. 这两个现象是 (1) 弹性先驱波幅度随着传播距离的衰减, 首先

在 Armco 铁中发现 [3]; (2) 初始扰动的有限上升时间以及前驱波后的应力松弛. 为了解释这种现象, Taylor^[3] 首先成功地利用位错动力学知识引进了一个塑性势函数. 其后, 由于理论上的简洁和实验在一定程度上的困难吸引了不少作者在这一领域内的工作, 可以例举的如 Gilman^{[4], [5]}, Johnson 和 Barker^[6], Herrmann^{[7], [8]} 等等. 后来, Lee^{[9], [10]} 和 Clifton^{[11], [12]} 又各自独立地提出了满足自相容条件的有限变形理论来描写弹塑性波或粘弹塑性波的理论. 在文献 [11] 中, Clifton 利用他给出的模型详细地计算了 6061-T6 铝中应力波的剖面. 但是, 所有这些工作都只限于低压或中压波, 迄今为止, 除范良藻和段祝平^[13] 提出过一个简单的模型估算过 40 万大气压力范围内铝的激波结构外, 没有一个作者详细地研究过高压单一激波的结构及其演化过程. 本文在文献 [13] 的基础上, 对这一问题作了进一步讨论.

从能量守恒出发, 给出了一维本构方程的统一描述. 因为存在着许多物理因素, 如升热和机械变形的耦合效应、有限变形的几何描述带来的复杂性, 高温、高压下位错运动和增殖的机理, 使我们的问题变得十分复杂. 众所周知, 材料的弹性性质和塑性性质是控制材料高速变形的二个不同机制. 一般说, 弹性变形所需要的时间远比塑性流动即位错越过障碍达到晶界的时间短得多. 这样, 合理地可以把弹性变形看成是一个瞬态反映而塑性流动是一种明显的与时间有关的过程. 这里, 热力学效应起着明显的影响. 一方面, 塑性流动引起了机械能的耗散. 塑性功部份地变成热, 部份地变成一种潜能储藏在有位错结构的晶格中. 热能引起了温升, 改变了材料的热弹性性能. 另一方面, 温度的增加使位错运动变得容易而压力的增加却使位错运动变得困难. 这种耦合效应在构作本构关系和研究波的增、衰规律时起着重要的作用. 为了研究这一问题, 采取两个不同的步骤. 首先将内能作为特性函数, 将其分解成弹性压缩能和弹性变形能, 而后者可以展开到弹性剪切应变不变量和熵的三阶量. 可以证明, 三阶弹性模数对波传播的影响是重要的, 因而不可忽略. 其次, 本文提出了一个塑性松弛函数用以描述位错在高温、高压下的增殖和运动, 其中从 Orowan 公式和 Gilman^[14] 提出的位错增殖率公式导出了一个可动位错密度依赖于塑性应变的公式.

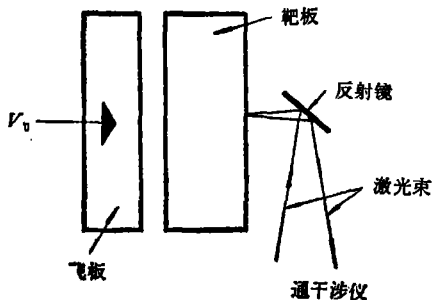


图1 平板冲击试验与自由端速度测量

平板对称撞击试验主要由两个相同的平板组成. 一个飞板, 由压缩空气炮加速到某一个确定的速度去撞击另一相同的靶板, 如图 1 所示. 飞片的速度很高, 在靶板中只出现单一的激波. 我们所感兴趣的问题是: 在平板冲击试验中, 在靶板中传播的激波从不定常运动到定常运动需要经历多少时间? 诚然, 这个时间极其短暂并且明显地依赖于塑性特征松弛时间. 另一个有兴趣的问题是定态激波的结构及其厚度估计. 在激波过渡带中的每一个物质微元开

始经受着一个瞬态弹性压缩, 处于三维应力状态, 这时法向应力和侧向应力不等, 激波后的剪应力极大, 和平均静水压同一个量级. 由剪应力引起的剪应变伴随着位错的迅速运动和增殖, 这样导致了宏观的塑性流动使应力发生松弛. 在这一过程中, 剪应力迅速下降, 平均静水压增加, 直到应力松弛过程停止发生, 材料达到了热力学的平衡状态, 这种状态可以用 R-H 曲线上的一个点表示. 由此可知定常激波过渡带中, 状态变数的分布主要决定于高温、

高压下位错运动与增殖引起的应力松弛过程.

二、基本方程

2.1 运动方程和连续性条件

这一节, 我们限于讨论一维运动. 每个质点可用其参考构形 X 加以标志, 它可以取在未变形状态. 该质点在时刻 t 的构形用 x 表示. 因此, 一维运动可以定义为

$$x = x(X, t) \quad (2.1)$$

其中, X 是质点的拉格朗日坐标, x 是欧拉坐标. 质点的位移和速度可分别定义为

$$u = u(X, t) = x - X, \quad v = \dot{x} = \frac{\partial u(X, t)}{\partial t} \quad (2.2, a, b)$$

假定 (2.1) 表示的运动是连续和单值的, (2.1) 可以改写为

$$X = X(x, t) \quad (2.3)$$

由于运动的对称性, Cauchy 应力张量和速度应变张量取如下简单形式

$$\sigma = (\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ \cdot & \sigma & 0 \\ \cdot & \cdot & \sigma \end{pmatrix}, \quad \dot{\epsilon} = (\dot{\epsilon}_{ij}) = \begin{pmatrix} \dot{\epsilon} & 0 & 0 \\ \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} \quad (2.4, a, b)$$

其中以压应力和压应变为正, σ 表示侧应力, 速度应变 $\dot{\epsilon}$ 可定义为

$$\dot{\epsilon} = - \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \quad (2.5)$$

应当指出, 当位移和应变是有限而不是微小时, 有必要区分物质点的当时位置 x 与其参考位置 X . 利用式 (2.1), 可以把诸如应力, 速度应变表示为 (X, t) 的函数. 如 Lee^[10] 和 Clifton^[12] 所指, 如将应变定义为

$$e = \int_{X=const} \dot{\epsilon}(X, t) dt \quad (2.6)$$

则 e 就是自然对数应变. 然而, 在固体力学中, 用拉格朗日坐标是较为方便的, 现在我们引进工程应变与应变率

$$\epsilon = - \frac{\partial u(X, t)}{\partial X} = 1 - \frac{\rho_0}{\rho} = 1 - \frac{V}{V_0} \quad (2.7)$$

$$\dot{\epsilon} = - \frac{\partial v(X, t)}{\partial X} = - \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial X} = \frac{\rho_0}{\rho} \dot{\epsilon} = \frac{V}{V_0} \dot{\epsilon} \quad (2.8)$$

这样, 我们得如下关系

$$\dot{\epsilon} = \frac{\rho}{\rho_0} \dot{\epsilon} = \frac{\dot{\epsilon}}{1 - \epsilon}, \quad e = - \ln(1 - \epsilon) \quad (2.9)$$

为了建立有限应变下的一维理论, 采用类似于 Herrmann^[15] 所作的假定: 总的速度应变可以分解为弹性速度应变部份和塑性速度应变部份, 而且塑性速度应变是体积不可压的, 即有

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon} &= \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p, \quad \dot{\epsilon}_i = \dot{\epsilon}_i^e + \dot{\epsilon}_i^p = 0 \\ \dot{\epsilon}^p + 2\dot{\epsilon}_i^p &= 0, \quad \dot{\epsilon}^e + 2\dot{\epsilon}_i^e = \dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_v = \frac{V}{V} \end{aligned} \right\} \quad (2.10, a, b, c, d)$$

其中斜标 i 表示侧向应变分量, $\dot{\epsilon}_v$ 表示体积膨胀率. 这样, 平均静水压 P , 最大剪应力 τ . 弹性剪切速度应变 $\dot{\gamma}^e$ 和塑性剪切速度应变 $\dot{\gamma}^p$ 各自定义为

$$P = \frac{1}{3}(\sigma + 2\sigma_i), \quad \tau = \frac{1}{2}(\sigma - \sigma_i) \quad (2.11, a, b)$$

或者

$$\sigma = P + \frac{4}{3}\tau, \quad \sigma_i = P - \frac{2}{3}\tau \quad (2.12, a, b)$$

且有

$$\dot{\gamma}^e = \dot{\epsilon}^e - \dot{\epsilon}_i^e, \quad \dot{\gamma}^p = \dot{\epsilon}^p - \dot{\epsilon}_i^p \quad (2.13, a, b)$$

从 (2.10) 和上式可得

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}^e &= \frac{1}{3}\dot{\epsilon}_v + \frac{2}{3}\dot{\gamma}^e, & \dot{\epsilon}_i^e &= \frac{1}{3}\dot{\epsilon}_v - \frac{1}{3}\dot{\gamma}^e \\ \dot{\epsilon}^p &= \frac{2}{3}\dot{\epsilon}_v - \frac{2}{3}\dot{\gamma}^e, & \dot{\epsilon}_i^p &= -\frac{1}{3}\dot{\epsilon}_v + \frac{1}{3}\dot{\gamma}^e \end{aligned} \right\} \quad (2.14, a, b, c, d)$$

而且弹性剪应变与塑性剪应变可定义为

$$\gamma^e = \int_{X=\text{const}} \dot{\gamma}^e(X, t) dt, \quad \gamma^p = \int_{X=\text{const}} \dot{\gamma}^p(X, t) dt \quad (2.15, a, b)$$

这样, 所有速度应变分量都可以用 $\dot{\epsilon}_v$ 和 $\dot{\gamma}^e$ 表示.

一维条件下的运动方程具有形式

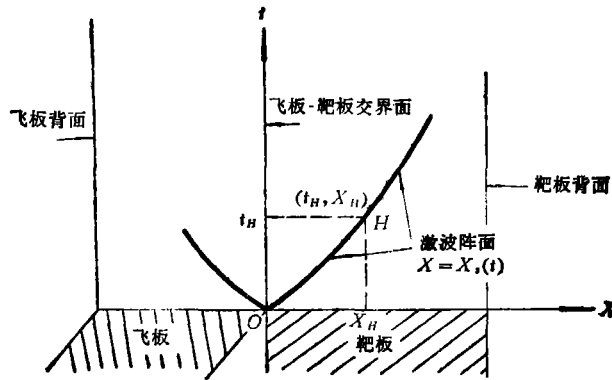


图 (2) 激波从不定常运动到定常运动的演化

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial X} = 0 \quad (2.16)$$

其中 σ 是 X 方向的应力. 此外, 连续性条件要求

$$\frac{\partial v}{\partial X} + \frac{\partial \epsilon}{\partial t} = 0 \quad (2.17)$$

假定在 $X-t$ 平面中, 激波轨迹可以用

$$X = X_s(t) \quad (2.18)$$

表示, 如图(2)所示, 这样, 相对于未变形构形的激波速度可以表示为

$$U_s(t) = \frac{dX_s(t)}{dt} = \dot{X}_s(t) \quad (2.19)$$

在波阵面上, 表示线动量与质量守恒的方程(2.16)和(2.17)被下列跳跃条件所代替

$$[v] = U_s[e], \quad [\sigma] = \rho_0 U_s[v] \quad (2.20, a, b)$$

由此

$$U_s = \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{[\sigma]}{[e]} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.21)$$

其中, 弧号[]表示跨过激波的跳跃. 显然, 上述方程(2.16)和(2.17)不足以求解一个波动问题, 必须考虑本构方程和能量守恒条件.

2.2 能量守恒与本构方程

在引进能量守恒方程与本构关系时, 选择体应变 e_v , 弹性剪切应变 γ^e 和比熵 S 作为独立的状态变量是合理的, 这样比内能 E , 平均压力 P 剪应力 τ 以及温度 T 可以表示成 e_v , γ^e 和 S 的函数

$$\left. \begin{aligned} E &= E(e_v, \gamma^e, S), \quad P = P(e_v, \gamma^e, S) \\ \tau &= \tau(e_v, \gamma^e, S), \quad T = T(e_v, \gamma^e, S) \end{aligned} \right\} \quad (2.22, a, b, c, d)$$

因为塑性流动具有一种特殊的不可逆性质, 一般地不可能用通常的不可逆热力学来描述. Farren 和 Taylor⁽¹⁶⁾, Quinney 和 Taylor⁽¹⁷⁾ 通过实验表明, 塑性功有一部分变成热, 引起温升, 有部份变成位错的结构热储藏在晶格中. 塑性功耗散成热的部份大约占 90%. 如果忽略热传导效应, 热力学第一定律可表示成

$$\rho \dot{E}_i = \sigma_{ij} \dot{e}_{ij} = \sigma_{ij} \dot{e}_{ij}^e + (1 - \eta) \sigma_{ij} \dot{e}_{ij}^p + \eta \sigma_{ij} \dot{e}_{ij}^p \quad (2.23)$$

其中 E_i 表示总比能, $\dot{W}^e = \sigma_{ij} \dot{e}_{ij}^e$ 表示弹性功率, $\dot{W}^p = \sigma_{ij} \dot{e}_{ij}^p$ 表示塑性功率, η 表示塑性功转化成热的百分比. $\dot{\epsilon} = (\dot{e}_{ij})$ 表示三维条件下的速度应变张量, 它定义为

$$\dot{e}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.24)$$

按照热力学第二定律, 塑性流动引起了物质比熵 S 的增加, 满足

$$\rho T \dot{S} = \eta \dot{W}^p = \eta \sigma_{ij} \dot{e}_{ij}^p \quad (2.25)$$

且有

$$\rho \dot{E}_d = (1 - \eta) \dot{W}^p = (1 - \eta) \sigma_{ij} \dot{e}_{ij}^p \quad (2.26)$$

其中, E_d 表示位错的储能, 这样总比能 E_i 可以分解为

$$E_i = E_d + E \quad (2.27)$$

其中 E 指通常的弹性能和热能.

将(2.12, a, b), (2.15, a, b, c, d), (2.25)和(2.16)代入(2.23)且利用(2.27)式, 可得

$$\rho \dot{E} = P \dot{e}_v + \frac{4}{3} \tau \dot{\gamma}^e + \rho T \dot{S} \quad (2.28)$$

由于 E 仅仅是 e_v , γ^e 和 S 的函数, 故有

$$\left(P - \rho \frac{\partial E}{\partial e_v} \right) \dot{e}_v + \left(\frac{4}{3} \tau - \rho \frac{\partial E}{\partial \gamma^e} \right) \dot{\gamma}^e + \rho \left(T - \frac{\partial E}{\partial S} \right) \dot{S} = 0 \quad (2.29)$$

但体应变 e_v , 弹性剪应变 γ^e 和熵 S 是独立的, 故可得到三个基本关系

$$P = \rho \frac{\partial E}{\partial e_v}, \quad \tau = \frac{3}{4} \rho \frac{\partial E}{\partial \gamma^e}, \quad T = \frac{\partial E}{\partial S} \quad (2.30, a, b, c)$$

为方便起见, 引进一组符号

$$\left. \begin{aligned} E_{11} &= \frac{\partial^2 E}{\partial e_v^2}, & E_{12} &= \frac{\partial^2 E}{\partial e_v \partial \gamma^e}, & E_{13} &= \frac{\partial^2 E}{\partial \gamma^e \partial S} \\ E_{21} &= \frac{\partial^2 E}{\partial \gamma^e \partial e_v}, & E_{22} &= \frac{\partial^2 E}{\partial \gamma^e}, & E_{23} &= \frac{\partial^2 E}{\partial \gamma^e \partial S} \\ E_{31} &= \frac{\partial^2 E}{\partial S \partial e_v}, & E_{32} &= \frac{\partial^2 E}{\partial S \partial \gamma^e}, & E_{33} &= \frac{\partial^2 E}{\partial S^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.31a-i)$$

从 (2.31, a-i) 和 (2.9), 可得

$$\frac{\dot{P}}{\rho} = \left(\frac{\partial E}{\partial e_v} + E_{11} \right) \dot{e}_v + E_{12} \dot{\gamma}^e + E_{13} \dot{S} \quad (2.32)$$

$$\frac{4}{3} \frac{\tau}{\rho} = \left(\frac{\partial E}{\partial \gamma^e} + E_{21} \right) \dot{e}_v + E_{22} \dot{\gamma}^e + E_{23} \dot{S} \quad (2.33)$$

若 $E_{12} \approx 0$, 则可知弹性剪切应变和熵的变化可以引起平均压力 P 的变化, 同时, 弹性体积应变的变化能引起剪应力的变化. 从方程 (2.12), (2.32) 和 (2.33), 可得

$$\frac{1}{\rho} \dot{\sigma} = \left(\frac{\partial E}{\partial e_v} + \frac{\partial E}{\partial \gamma^e} + E_{11} + E_{21} \right) \dot{e}_v + (E_{12} + E_{22}) \dot{\gamma}^e + (E_{13} + E_{31}) \dot{S} \quad (2.34)$$

现在, 可将方程 (2.32) (2.33) 与流体弹塑性模型作一比较. 为了描写材料的热弹性性质, Wilkins¹⁸ 首先采用三维形式的广义虎克定律

$$\left. \begin{aligned} \dot{\sigma}_{,i} &= \dot{P} \delta_{,i} + \dot{S}_{,i} \\ \dot{P} &= K \frac{\dot{\rho}}{\rho} = K \dot{e}_v \\ \dot{S}_{,i} &= 2G \dot{\epsilon}_{,i}^e \end{aligned} \right\} \quad (2.35, a, b, c)$$

其中 $\delta_{,i}$ 是 Kronecker δ , $\sigma_{,i}$ 是 Cauchy 应力张量, $S_{,i}$ 是应力偏量张量, $\epsilon_{,i}^e$ 是弹性速度应变偏量张量. K 是体积模量, G 是剪切模量. 在一维应变条件下, 上述方程可简化为

$$\dot{\sigma} = K \dot{e}_v + \frac{4}{3} G \dot{\gamma}^e \quad (2.36)$$

这样, 如只假定体积模量 K 是体应变的函数, 为了满足 (2.36) 的全微分条件, 必须有

$$\frac{\partial K}{\partial \gamma^e} = \frac{4}{3} \frac{\partial G}{\partial e_v} \quad (2.37)$$

故必须假定剪切模量 G 与体应变或平均压力无关. 这一点和 Bridgman¹⁹ 的实验是不符合的. Bridgman 通过大量实验表明了, 在中等压力范围内, G 与 P 成线性关系. 后来, Broberg²⁰ 首经建议

$$G = G(0) \frac{K(P)}{K(0) + G(0) \ln(1 + \alpha P)} \quad (2.38)$$

作为一个近似. 其中系数 α 是材料常数. 但即使假定了 G 与 P 的关系, 但不假定 K 与 ν 的依赖关系, 自相容条件 (2.37) 仍然不能被满足. 这样, 我们可以从 Bridgman 的试验得到一个很重要的结论: 剪切模量随平均静水压的变化, 反映了材料在高压下的剪胀性, 其充要条件是 $E_{12} \neq 0$. 这样本构关系 (2.34) 比 (2.36) 更加合理.

2.3 内能 E 的确定与一维本构关系

由 (2.32)–(2.34) 可知, E 作为热力学的一个特性函数在构作本构关系 (2.34) 时, 起决定作用. 与纯流体热弹性模型相比, E 的确定更加复杂了. 通常假定将 E 分解为两部分:

$$E = \tilde{E}(e_\nu, S) + \tilde{E}^*(e_\nu, J_{\nu^0}^{\text{II}}, J_{\nu^0}^{\text{III}}, S) \quad (2.39)$$

其中 \tilde{E} 是由各向同性弹性压缩产生的热弹性压缩能, \tilde{E}^* 是形变能. 设

$$\tilde{\Gamma} = (\gamma_{ij}^e) = \left(\int_{x=\text{const}} \dot{\gamma}_{ij}^e dt \right)$$

表示弹性应变偏量, $J_{\nu^0}^{\text{II}}$ 和 $J_{\nu^0}^{\text{III}}$ 是 $\tilde{\Gamma}$ 的第二和第三不变量. 从材料的对称性而言, \tilde{E}^* 只和 $J_{\nu^0}^{\text{II}}$, $J_{\nu^0}^{\text{III}}$ 有关. 由张量分析, 有

$$J_{\nu^0}^{\text{II}} = \frac{1}{2} \delta_{ij}^e \gamma_{ij}^e, \gamma_{ij}^e, \quad J_{\nu^0}^{\text{III}} = \det(\tilde{\Gamma}) \quad (2.40, a, b)$$

其中 δ_{ij}^e 是四阶 Kronecker δ 记号, $\det(\gamma_{ij}^e)$ 表示 $\tilde{\Gamma}$ 的行列式. 显然, 当材料只经受各向同性压缩时, 即 $\tilde{\Gamma} \equiv 0$, 我们有 $\tilde{E}^* \equiv 0$. 这意味着 $\tilde{E} = \tilde{E}(e_\nu, S)$ 恰好表示了物质在各向同性压缩下的比内能. 如取 Debye 理论给出的最简单形式

$$\tilde{E} = E_K(V) + 3NkTD(\Theta/T) \quad (2.41, a)$$

$$S = 4NkD(\Theta/T) - 3Nk \ln(1 - e^{-\Theta/T}) \quad (2.41, b)$$

且有

$$D(x) = \frac{3}{x^3} \int_0^x \frac{t^3}{e^t - 1} dt \quad x = \Theta/T \quad (2.41, c)$$

其中 Debye Θ 只是比容 V 的函数, $D = D(x)$ 是 Debye 函数. k 是 Boltzman 常数, N 是单位质量内的原子数. $E_K(V)$ 是 0°K 时的比能. 这样, 从 (2.41, a)–(2.41, b) 可以定出 $\tilde{E} = \tilde{E}(V, S)$.

从理论确定 \tilde{E}^* 是很困难的. 按照 Clifton [11], 可以给出 \tilde{E}^* 的一个近似表达式. 因为, $J_{\nu^0}^{\text{II}}$ 和 $J_{\nu^0}^{\text{III}}$ 和体应变 e_ν 相比分别是二阶和三阶小量, 故将 \tilde{E}^* 用 Taylor 级数展开到三阶项:

$$\tilde{E}^* = AJ_{\nu^0}^{\text{II}} + Be_\nu J_{\nu^0}^{\text{II}} + CJ_{\nu^0}^{\text{III}} + DSJ_{\nu^0}^{\text{III}} + O(e_\nu^4) \quad (2.42)$$

其中 A, B, C 和 D 是四个待定常数.

在一维应变下, 根据 (2.13, a) 式速度应变偏量 $\dot{\tilde{\Gamma}}$ 可以写成

$$\dot{\tilde{\Gamma}} = (\dot{\gamma}_{ij}^e) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\dot{\gamma}^e & 0 & 0 \\ \bullet & -\frac{1}{3}\dot{\gamma}^e & 0 \\ \bullet & \bullet & -\frac{1}{3}\dot{\gamma}^e \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

因此按(2.40, a, b)有

$$J_{\gamma^e}^* = -\frac{1}{3}(\gamma^e)^2, \quad J_{\gamma^e}^* = \frac{2}{27}(\gamma^e)^3 \quad (2.44, a, b)$$

将上式代入(2.42)可得

$$\tilde{E}^* = -\frac{1}{3}(A + Be_{\nu} + DS)\gamma^e + \frac{2}{27}C\gamma^e + O(e^2) \quad (2.44, c)$$

其中常数 A 很容易决定, 因为在无穷小应变下剪切模量 G_0 可定义为

$$G_0 = \left(\frac{\partial \tau}{\partial \gamma^e} \right)_{\gamma^e = e_{\nu} = 0} = \frac{3}{4} \rho_0 (\tilde{E}_{22}^*)_{\gamma^e = e_{\nu} = 0} \quad (2.45)$$

利用(2.42)代入上式, 得

$$A = -2 \frac{G_0}{\rho_0} = -2C_{s0}^2, \quad C_{s0} = \sqrt{\frac{G_0}{\rho_0}} \quad (2.46)$$

其余的三阶弹性剪切模量 B 、 C 、 D 可以通过高压下纵波速度和剪切波速度的超声测量来决定, Thurston 和 Brugger [21], Smith 等 [22] 文章中作了介绍, 详细的内容可参阅 Clifton [11], 这里不作进一步说明.

联立(2.4, c)和(2.41, a, b, c), 可得到比内能 E 的一个具体表达式

$$E = \tilde{E}(V, S) + \frac{2}{3}C_{s0}^2\gamma^e - \frac{1}{3}(Be_{\nu} + DS)\gamma^e + \frac{2}{27}C\gamma^e + O(e^2) \quad (2.47)$$

将该式代入(2.31, a)–(2.31, i), 并设 $U(\varepsilon, S) = \tilde{E}(V_0(1-\varepsilon), S)$ 可得

$$E_1 = \frac{\partial E}{\partial e_{\nu}} = (1-\varepsilon) \frac{\partial U}{\partial \varepsilon} - \frac{2}{3}B\gamma^e, \quad E_2 = \frac{\partial E}{\partial \gamma^e} = \frac{4}{3}C_{s0}^2\gamma^e - \frac{2}{3}(Be_{\nu} + DS)\gamma^e + \frac{2}{9}C\gamma^e$$

$$E_3 = \frac{\partial E}{\partial S} = \frac{\partial U}{\partial S} - \frac{D}{3}\gamma^e \quad (2.48, a, b, c)$$

以及

$$\left. \begin{aligned} E_{11} &= -(1-\varepsilon) \frac{\partial U}{\partial \varepsilon} + (1-\varepsilon)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon^2} & E_{12} &= -\frac{2}{3}B\gamma^e \\ E_{13} &= (1-\varepsilon) \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon \partial S} & E_{22} &= \frac{4}{3}C_{s0}^2 + \frac{2}{3}B \ln(1-\varepsilon) - \frac{2}{3}DS + \frac{4}{9}C\gamma^e \\ E_{23} &= -\frac{2}{3}D\gamma^e & E_{33} &= \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} \end{aligned} \right\} (2.49, a-f)$$

利用关系(2.7)–(2.9, a, b)且将(2.48, a, b, c)和(2.49, a–f)代入(2.34), 经过适当运算可得一维应变下的本构方程的基本形式:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= \frac{1}{\rho_0 \left[\frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon^2} + \frac{4C_{s0}^2(1-\ln(1-\varepsilon) - \frac{2}{3}e^P)}{3(1-\varepsilon)^2} \right] (1+\Phi)} \dot{\sigma} \\ &+ \frac{2C_{s0}^2(1+\Psi)}{\left[\frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon^2} + \frac{4C_{s0}^2(1-\ln(1-\varepsilon) - \frac{2}{3}e^P)}{3(1-\varepsilon)^2} \right] (1-\varepsilon)(1+\Phi)} \dot{e}^P \\ &+ \frac{1-\varepsilon}{(\varepsilon-1)} \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon \partial S} + \frac{2}{3}D \ln(1-\varepsilon) + De^P \\ &+ \frac{1-\varepsilon}{(\varepsilon-1)} \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon^2} + \frac{4C_{s0}^2(1-\ln(1-\varepsilon) - \frac{2}{3}e^P)}{3(1-\varepsilon)} \dot{S} \end{aligned} \quad (2.50)$$

其中 Φ 与 Ψ 是两个与三阶弹性模量有关的函数

$$\Phi = \frac{(2B - \frac{4C}{9})\ln(1-\varepsilon) - 2\left(\frac{C}{3} - B\right)e^P - \frac{2}{3}DS + DS e^P + \left(\frac{2}{9}C - B\right)\ln^2(1-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon^2} + \frac{4}{3}C_{s0}^2 \left[1 - \ln(1-\varepsilon)\right]} + \frac{2\left(\frac{C}{3} - B\right)e^P \ln(1-\varepsilon) + \frac{2}{3}DS \ln(1-\varepsilon) + \left(\frac{C}{2} - \frac{3}{4}B\right)e^{P^2} - \frac{3}{2}e^P}{(2.51)}$$

$$\Psi = \frac{1}{C_{s0}^2} \left[\left(B - \frac{C}{3}\right)\ln(1-\varepsilon) + \left(\frac{3}{4}B - \frac{1}{2}C\right)e^P - \frac{D}{2}S \right] \quad (2.52)$$

熵的变化率 \dot{S} 可以通过(2.25)及(2.47)表示出来

$$\dot{S} = \frac{2\eta\tau}{\rho T} \dot{\varepsilon}^P = \frac{\eta \left[\ln(1-\varepsilon) + \frac{3}{2}e^P \right] \left[2C_{s0}^2 + \left(B - \frac{C}{3}\right)\ln(1-\varepsilon) - DS - \frac{C}{2}e^P \right]}{\frac{D}{3} \left[\ln(1-\varepsilon) + \frac{3}{2}e^P \right]^2 - \frac{\partial U}{\partial S}} \dot{\varepsilon}^P \quad (2.53, a)$$

应当指出, 方程(2.50)是适用于任意应变条件下的基本方程, 其中 Φ 与 Ψ 是依赖于三阶弹性剪切常数的修正因子. 这样, 在本构方程中, 其系数不但和密度即体应变、温度有关, 而且依赖于塑性应变, 即使不考虑三阶弹性模量的影响, 方程的系数也依赖于塑性变形. 只有采用微小变形假定时, 方程才会变成

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{\rho_0 \left[\frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon^2} + \frac{4}{3}C_{s0}^2 \right]} \dot{\sigma} + \frac{2C_{s0}^2}{\left[\frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon^2} + \frac{4}{3}C_{s0}^2 \right]} \dot{\varepsilon}^P \quad (2.53, b)$$

这时, 方程的系数只依赖于应变 ε 了. 为了考虑三阶弹性模量的影响, 我们讨论一简单情况, 即在激波波头的情况. 由于在激波波头上, 不发生塑性变形, 这时有

$$\Phi \Big|_{e^P=S=0} = \frac{\left(\frac{2}{9}C - B\right) \left[\ln(1-\varepsilon) - 2 \right] \ln(1-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon^2} + \frac{4}{3}C_{s0}^2 \left[1 - \ln(1-\varepsilon) \right]}$$

$$\Psi \Big|_{e^P=S=0} = \frac{B - \frac{C}{3} \ln(1-\varepsilon)}{C_{s0}^2}$$

对绝大多数金属, 剪切模量随压力增加而增加, 因此容易证明三阶弹性模量 B 和 C 满足 $B < 0$, $C > 0$, 而且要比 C_{s0}^2 大得多, 如根据 Clifton [11] 对 6061-T6 铝的数据有 $B \sim -113.23 \text{ (mm}/\mu\text{sec)}^2$, $C \sim 142.80 \text{ (mm}/\mu\text{sec)}^2$, 但 $C_{s0}^2 \sim 9.73 \text{ (mm}/\text{sec)}^2$. 这样, 在有限应变下, 三阶弹性模量对波传播的影响显然是不能忽略的.

2.4 瞬态应力应变关系

这里, 讨论一个重要的概念, 即瞬态应力应变曲线. 可以严格证明^[23], 在激波上, 熵的跳跃是应变间断的三阶量. 在激波波头上, 弹性应变率变成无穷, 这样, 从方程(2.50)可知, 瞬态应力-应变曲线满足

$$\frac{d\sigma^{(s)}}{d\varepsilon} = \rho_0 \left[\frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon^2} + \frac{4C_{sv}^2(1-\ln(1-\varepsilon))}{3(1-\varepsilon)^2} \right] [1 + \Phi(\varepsilon, 0, 0)], \quad \sigma^{(s)}(0) = 0 \quad (2.54)$$

该方程的积分可得到通过(0,0)一点的瞬态应力—应变曲线

$$\begin{aligned} \sigma^{(s)} &= \rho_0 \left(\frac{\partial U}{\partial \varepsilon} \right)_{s_0} - \frac{4G_0 \ln(1-\varepsilon)}{3(1-\varepsilon)} + \frac{\left(\frac{2}{9}C - \frac{4}{3}B \right) \rho_0}{1-\varepsilon} \ln^2(1-\varepsilon) \\ &= P_{s_0}(\varepsilon) - \frac{4G_0 \ln(1-\varepsilon)}{3(1-\varepsilon)} + \frac{\left(\frac{2}{9}C - \frac{4}{3}B \right) \rho_0 \ln^2(1-\varepsilon)}{1-\varepsilon} \end{aligned} \quad (2.55)$$

其中 $P_{s_0} = \rho_0 \frac{\partial U}{\partial \varepsilon}$ 是等熵压力, 上式右端的第二项是由二阶弹性模量引起的压力增加, 第三项由三阶弹性模量引起的压力增加. 为了能完全确定瞬态应力—应变曲线, 必须确定等熵压力 $P_{s_0}(\varepsilon)$. 这里, 有几种近似的方法 (除通过 Debye 公式 (2.41, a, b, c) 进行理论计算外).

1. 建议一种近似的高压状态方程, 通过此状态方程去计算 $P_{s_0} \sim \varepsilon$ 曲线. 通常在高压段, 采用 Mie-Grüneisen 型方程⁽¹⁾⁽²⁾

$$P = P_K(V) + \frac{\Gamma(V)}{V} (\tilde{E} - E_K(V)) \quad (2.56)$$

或者

$$P = P_H(V) + \frac{\Gamma(V)}{V} (\tilde{E} - E_H(V)) \quad (3.57)$$

其中 $P_K(V)$ 是在 0°K 时的压力-比容关系, E_K 是 0°K 时的比内能. P_H 和 E_H 是在 $R-H$ 曲线上的相应量. $\Gamma(V)$ 是 Grüneisen 系数, 只是比容 V 的函数. 利用该状态方程, 容易证明等熵压力 $P_{s_0}(\varepsilon)$ 由下式给出

$$P_{s_0} = \exp\left(\int_{V_0}^V A(x) dx\right) \int_{V_0}^V B(x) \exp\left(-\int_{V_0}^x A(t) dt\right) dx \quad (2.58)$$

$$\text{其中 } A(x) = -\frac{\Gamma(x)}{x} \left[1 + \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{P} \right) \right], \quad B(x) = \frac{\Gamma(x)}{x} \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{\Gamma(x)} P_H(x) - E_H(x) \right) \quad (2.59)$$

由于在 Hugoniot 曲线上的压力 P_H 和 E_H 可以通过激波参数 (激波速度 U_H 和质点速度 v_P) 来确定. 对大多数材料, 实验证明, 激波速度 U_H 和质点速度满足线性关系

$$U_H = C_0 + S_0 v_P \quad (2.59)$$

其中 C_0 和 S_0 是材料常数. 将 (2.59) 代入 (2.20) 且设 E_0 为零, 可得

$$P_H = \frac{\rho_0 C_0^2 \varepsilon}{(1 - S_0 \varepsilon)^2}, \quad E_H = \frac{C_0^2 \varepsilon}{2(1 - S_0 \varepsilon)^2}$$

$$\text{且 } K_H = \frac{dP_H}{d\varepsilon} = \frac{C_0^2(1 + S_0 \varepsilon)}{(1 - S_0 \varepsilon)^3} \quad (2.60, a, b, c)$$

其中 ρ_0 是初始密度, 将 (2.60, a, b, c) 代入 (2.58) 便可以获得等熵压力 P_{s_0} 和比容的关系.

2. 用激波绝热压缩曲线 $P_H \sim \varepsilon$ 近似代替等熵压缩曲线 $P_{s_0} \sim \varepsilon$. 如 Herrmann [8] 所指出的, 当体应变达到 10% 时, 这种代替产生的误差不超过 1%. 利用 (2.60, a) 和 (2.55), 瞬态应力—应变曲线可近似地表示成

$$\sigma^{(t)} = \frac{\rho_0 C_0^2 \varepsilon}{(1 - S_0 \varepsilon)^2} - \frac{4G_0}{3} \frac{\ln(1 - \varepsilon)}{1 - \varepsilon} + \rho_0 \left(\frac{2}{9} C - \frac{4}{3} B \right) \frac{\ln^2(1 - \varepsilon)}{1 - \varepsilon} \quad (2.61)$$

3. 在低压段, 可以用等温压缩模量 K_T 代替等熵压缩模量 K_S . Duvall [23] 已证明,

$$K_S = K_T + \frac{T}{C_V} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V^2 \quad (2.62)$$

其中 C_V 是等容比热, 而且在低压段, 可证明 $K_T \gg \frac{T}{C_V} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V^2$, 因此用等温压缩模量代替等熵模量是合理的, 这时, 同样可以给出瞬态曲线 (2.55).

三、应力松弛函数

虽然, 位错动力学在解释弹性前驱波的衰减时获得了成功, 但迄今为止, 位错在高速冲击下的性质了解甚微. 好在如 Lindholm [24] 指出, 波的剖面对松弛函数的具体形式并不敏感. 为此, 我们只得把低压下获得关于位错的知识类推到高压情形中去.

首先, 按 Orowan 公式, 塑性应变率 $\dot{\varepsilon}^P$ 可以定义为

$$\dot{\varepsilon}^P = \phi b N \bar{V}_\alpha \quad (3.1)$$

其中 ϕ 是取向因子, b 是相应于 Burger 矢量的晶格常数, N 是可动位错密度, \bar{V}_α 是平均位错速度. 在一维冲击压缩下, 最大剪应力平面与波的传播方向成 45° 夹角, 且有

$$\dot{\varepsilon}^P = \frac{1}{2} (\dot{e}^P - \dot{e}_i^P) = \frac{3}{4} \dot{e}^P \quad (3.2)$$

假定, 在激波加载下, 所有位错全部可动, 其增殖率服从 Gilman [14] 提出的法则:

$$\dot{N} = \alpha N - \beta N^2 \quad (3.3)$$

其中 α 是增殖系数, β 为位错的湮灭系数. 当且仅当 $N = \frac{\alpha}{\beta}$ 时, $\dot{N} = 0$. 这时, 我们称位错

达到了“饱和”, 而称 $N_m = \frac{\alpha}{\beta}$ 是位错的饱和密度. 另一方面, 由 Frank-Read 源机制出发, 可以推断 [13] 增殖系数 α 与平均位错速度成正比, 与位错节点间距离成反比. 故 (3.3) 可以变为

$$\dot{N} = \lambda \bar{V}_d N \left\{ 1 - \frac{N}{N_m} \right\} \quad (3.4)$$

其中 λ 是某一物理常数. 联立 (3.1) 与 (3.3), (3.4) 可得到

$$\frac{dN}{de^P} = \frac{3\lambda}{4\phi b} \left(1 - \frac{N}{N_m} \right) = k \left(1 - \frac{N}{N_m} \right), \quad N|_{e^P=0} = N_0 \quad (3.5)$$

其中 N_0 是初始位错密度, 积分 (3.5) 导致

$$N = N_m \left[1 - \left(1 - \frac{N_0}{N_m} \right) \exp(-ke^P) \right], \quad k = \frac{3\lambda}{4\phi b} \quad (3.6)$$

该关系把可动位错密度与宏观塑性应变 e^P 联系起来。

现在讨论位错的运动。为了确定 \bar{V}_d 与应力, 应变的关系, 已建议了各种模型, 如 Gills 等^[26], Gilman^[4], Taylor^[3], Johnson 和 Barker^[6], Clifton^[11] 等等, 尤其是, Clifton 已明确指出, 位错的运动在低应力情形下由热激活机制来控制, 在高应力作用下由线性或非线性阻尼机制所控制。但所有这些建议的模型都没有考虑压力对位错运动的影响。这里, 我们根据粘性阻尼机制, 假定在高温、高压下位错的运动服从^[20]

$$\bar{V}_d = \bar{V}_d^* \left\{ \frac{\tau}{\tau_s(P, T)} - 1 - H^* e^P \right\} \quad (3.7)$$

其中, \bar{V}_d^* 是位错运动的一个特征速度, 和粘性阻尼系数有关, $\tau_s = \tau_s(P, T)$ 是高温、高压下材料的静态屈服极限, H^* 是加工硬化系数。

高温, 高压下材料屈服性能的实验研究表明, 下述函数可以作为较好的近似式公

$$\tau_s(P, T) = \tau_{s0}(1 + \alpha_s P) \exp\left(-\frac{\beta_s T}{T_{M0}(1 + \zeta_s P)^\delta}\right) \quad (3.8)$$

其中 τ_{s0} 是低压下的 Hugoniot 弹性屈服极限。 $T_M = T_{M0}(1 + \zeta_s P)^\delta$ 为金属在高压下的熔点。 α_s , ζ_s 和 β_s 是三个材料常数。将(3.8)代入(3.7), 并联合(3.6)可以得到如下表达式

$$\dot{e}^P = \eta^* \left[1 - \left(1 - \frac{N_0}{N_m}\right) e^{-ke^P} \right] \left[\frac{\tau}{\tau_{s0}(1 + \alpha_s P)} \exp\left(\frac{\beta_s T}{T_{M0}(1 + \zeta_s P)^\delta}\right) - 1 - H^* e^P \right] \quad (3.9)$$

其中 $\eta^* = \frac{4}{3} \phi b N_m V_d^*$ 是一个特征松弛参数, 显然是一个控制激波传播和定态激波过渡带性质的十分敏感的参数。

四、金属中定态激波的构造

激波的不定常运动由方程(2.16), (2.17), (2.50), (2.53), 和(3.9)给出。其中有5个未知变量 σ , ε , e^P , v 和 S , 因此该方程组是封闭的。现在引进一组无量纲新变数和无量纲物理参数

$$\begin{aligned} \bar{t} &= \frac{t}{t^*}, \quad \bar{X} = \frac{X}{t^* C_0}, \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\rho_0 C_0^2}, \quad \bar{\tau} = \frac{\tau}{\rho_0 C_0^2}, \quad \bar{P} = \frac{P}{\rho_0 C_0^2} \\ \bar{v} &= \frac{v}{C_0}, \quad \bar{U}_s = \frac{U_s}{C_0^2}, \quad \bar{T} = \frac{T}{D}, \quad \bar{S} = \frac{SD}{C_0^2}, \quad \bar{C}_{s0} = \frac{C_{s0}}{C_0}, \quad \bar{B} = \frac{B}{C_0^2}, \\ \bar{C} &= \frac{C}{C_0^2}, \quad \bar{\tau}_{s0} = \frac{\tau_{s0}}{\rho_0 C_0^2} \end{aligned} \quad (4.1)$$

其中 C_0 取自(2.59)式。 $t^* = 1/\eta^*$ 是一特征松弛时间。将这些无量纲变量代入上述方程, 经过整理可得到高速变形下的一维运动基本方程:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} &= -\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{x}} \\
 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} &= -\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \\
 \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{t}} &= -F(\varepsilon, e^p, S) \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} - G(\varepsilon, e^p, \bar{S}, \bar{\sigma}) \\
 \frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{t}} &= M(\varepsilon, e^p, \bar{S}) \\
 \frac{\partial e^p}{\partial \bar{t}} &= R(\varepsilon, e^p, \bar{\sigma}, S)
 \end{aligned} \right\} (4.2, a-e)$$

其中

$$\left. \begin{aligned}
 F &= \left[\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \varepsilon^2} + \frac{4C_{10}^2 \left(1 - \ln(1-\varepsilon) - \frac{3}{2} e^p \right)}{3(1-\varepsilon)} \right] (1 + \Phi) \\
 G &= \frac{2\bar{C}_{10}^2 (1 + \Psi)}{1-\varepsilon} R(\varepsilon, e^p, \bar{\sigma}, \bar{S}) - \left[\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{S} \partial \varepsilon} + \frac{\frac{2}{3} \ln(1-\varepsilon) + e^p}{1-\varepsilon} \right] M(\varepsilon, e^p, S) \\
 R &= \left[1 - \left(1 - \frac{N_0}{N_m} \right) \exp(-ke^p) \right] \left[\frac{\bar{v}}{\bar{\tau}_i(\bar{P}, \bar{T})} - 1 - H^* e^p \right] \\
 \bar{T} &= \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{S}} - \frac{1}{3} \left[\frac{3}{2} e^p + \ln(1-\varepsilon) \right]^2 \\
 \bar{\tau} &= \frac{1}{1-\varepsilon} \left[\frac{3}{2} e^p + \ln(1-\varepsilon) \right] \left[\frac{\bar{C}}{4} e^p + \frac{1}{2} \bar{S} - \bar{C}_{10}^2 + \left(\frac{\bar{C}}{6} - \frac{\bar{B}}{2} \right) \ln(1-\varepsilon) \right] \\
 \bar{P} &= \bar{\sigma} - \frac{4}{3} \bar{\tau}, \quad M = \frac{2\eta \bar{\tau}}{\bar{T}} R(\varepsilon, e^p, \bar{\sigma}, \bar{S})
 \end{aligned} \right\} (4.2, f-1)$$

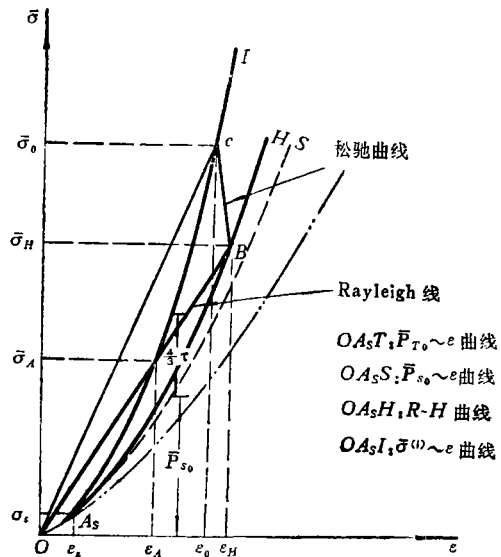
显然, (4.2, a-e)是一组拟线性方程,需要用特征线方法数值求解. 现在,我们集中研究定态激波的问题. 如上面所指,激波当其在 $\bar{X}-\bar{t}$ 平面某一点 (\bar{X}_H, \bar{t}) 演化到定常运动时,就以不变的速度 \bar{U}_H 传播,如图(2)所示. 该速度 \bar{U}_H 可以直接测量. 引进一个新的坐标 $\bar{\xi}$:

$$\bar{\xi} = \bar{X} - \bar{X}_H - \bar{U}_H(\bar{t} - \bar{t}_H)$$

这样,所有量

$$\text{只依赖于 } \bar{\xi} \text{ 且 } \frac{\partial}{\partial \bar{X}} = \frac{d}{d\bar{\xi}}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{t}} = -\bar{U}_H \frac{d}{d\bar{\xi}}.$$

基本方程(4.2, a)-(4.2, e)变为



图(3) 各种应力—应变曲线示意图

$$\frac{d}{d\xi} (\bar{\sigma} - \bar{U}_H \bar{v}) = 0 \quad (4.3, a)$$

$$\frac{d}{d\xi} (\bar{v} - \bar{U}_H \bar{\epsilon}) = 0 \quad (4.3, b)$$

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\xi} - F(\bar{\epsilon}, e^P, \bar{S}, \bar{\sigma}) \frac{d\bar{\epsilon}}{d\xi} = \frac{1}{\bar{U}_H} G(\bar{\epsilon}, e^P, \bar{S}, \bar{\sigma}) \quad (4.3, c)$$

$$\frac{d\bar{S}}{d\xi} = -\frac{1}{\bar{U}_H} M(\bar{\epsilon}, e^P, \bar{S}) \quad (4.3, d)$$

$$\frac{de^P}{d\xi} = -\frac{1}{\bar{U}_H} R(\bar{\epsilon}, e^P, \bar{\sigma}, \bar{S}) \quad (4.3, e)$$

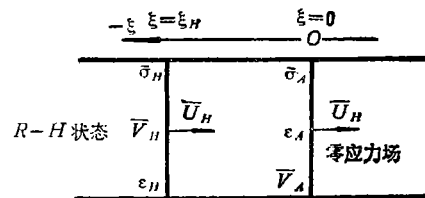
上式的前两个方程可直接积分得到

$$\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_A = \bar{U}_H^2 (\bar{\epsilon} - \bar{\epsilon}_A) = \bar{U}_H (\bar{v} - \bar{v}_A), \quad \xi_H \leq \xi \leq 0 \quad (4.4)$$

其中, $\bar{\sigma}_A$, $\bar{\epsilon}_A$ 和 \bar{v}_A 分别表示在激波波头上的应力、应变和质点速度的瞬态值, 如图(4)所示. ξ_H 表示定态激波的厚度. 从(4.4)可知, 在激波过渡带中, 应力, 应变和质点速度满足线性关系, 可以用 Rayleigh 直线表示, 见图(3)这样, 如果忽略熵变, 求解方程(4.3, a-e)的初始条件是

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_A, \quad \bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}_A, \quad \bar{V} = \bar{V}_A, \quad \bar{S} = e^P = 0 \quad \text{当 } \bar{\xi} = 0 \quad (4.5)$$

由此可见, 只要定出 $\bar{\sigma}_A$ 和 $\bar{\epsilon}_A$, 利用(4.4)便可定解(4.3, a-e)从而计算出激波过渡带的性质. 文献^[13]中给出了计算 $\bar{\sigma}_A$ 和 $\bar{\epsilon}_A$ 的值, 这时利用 Bridgman^[16] 给出的等温压力—比容曲线代替等熵时压力—比容曲线. $\bar{\sigma}_A$ 和 $\bar{\epsilon}_A$ 的值可以通过作图法求得, 在 $(\bar{\sigma}, \bar{\epsilon})$ 平面上, 它表示瞬态应力—应变曲线与 Rayleigh 线的交点. 三种金属在不同激波强度下 $\bar{\sigma}_A$ 和 $\bar{\epsilon}_A$ 的计算值由表 1 给出.



图(4) 定常激波过渡带示意图

表 1 不同材料, 弹性先驱波的跳跃值 $\bar{\sigma}_A$ 和 $\bar{\epsilon}_A$

金属	ρ_0 克/厘米 ³	ν	C_n 10 ³ 厘米/秒	S_0	σ_H	σ_A	F_1 $\times 10^{-2}$	v_A $\times 10^{-2}$	U_H	v_0
铝	2.72	0.26	5.25	1.39	0.400	0.065	3.40	4.76	1.40	0.576
					0.534	0.139	6.10	9.21	1.51	0.734
					0.667	0.192	7.60	12.08	1.59	0.849
铜	8.93	0.34	3.96	1.50	0.286	0.057	3.20	4.27	1.34	0.454
					0.357	0.077	4.00	5.56	1.38	0.506
					0.428	0.092	4.70	6.56	1.40	0.534
铁	7.86	0.25	3.80	1.58	0.881	0.053	2.38	3.55	1.49	0.621
					1.057	0.094	2.55	5.06	1.84	1.061
					1.233	0.128	3.72	6.92	1.86	1.089

如果在激波过渡带中, 忽略熵的变化, 方程组(4.3, a)–(4.3, e)可以化为一个单一的方

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{de^P} &= \frac{2\bar{C}_{s0}^2 [1 + \Psi(3, e^P)]}{(1-\varepsilon) \left[\left(\frac{\partial^2 \bar{U}(\varepsilon, S_0)}{\partial \varepsilon^2} + \frac{4\bar{C}_{s0}^2 (1 - \ln(1-\varepsilon) - \frac{2}{3}e^P)}{3(1-\varepsilon)^2} \right) (1 + \Phi(\varepsilon, e^P)) - \bar{U}_H^2 \right]} \quad (4.6) \\ e^P &= 0 \quad \varepsilon = \varepsilon_A \end{aligned} \right\}$$

程. 这样, 数值求解该方程, 可得到 $e^P \sim \varepsilon$ 关系, 代入(4.3,e)可得到问题的数值解. 如取瞬态应力应变关系(2.61)并且忽略三阶弹性模数的影响, 利用(2.60,b)式, 可以得到一个直接积分

$$\begin{aligned} e^P &= -\frac{2}{3} \ln \frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon_A} + \frac{1}{2\bar{C}_{s0}^2 S_0^2} \ln \frac{1-S_0\varepsilon}{1-S_0\varepsilon_A} + \frac{1}{4} \left(\frac{\bar{U}_H}{\bar{C}_{s0}} \right)^2 (\varepsilon - \varepsilon_A)(\varepsilon + \varepsilon_A - 2) \\ &+ \frac{3-S_0}{2S_0^2 \bar{C}_{s0}^2} \left(\frac{1}{1-S_0\varepsilon} - \frac{1}{1-S_0\varepsilon_A} \right) + \frac{S_0-1}{2\bar{C}_{s0}^2 S_0^2} \left(\frac{1}{(1-S_0\varepsilon)^2} - \frac{1}{(1-S_0\varepsilon_A)^2} \right) \quad (4.8) \end{aligned}$$

这样, 无量纲的激波厚度 $\bar{\xi}_H$ 可以从解(4.8)以及方程(4.3,e)得到

$$|\bar{\xi}_H| = \frac{\bar{U}_H}{2\bar{C}_{s0}^2} \int_{\varepsilon_A}^{\varepsilon_H} \frac{\left[\frac{1+S_0\varepsilon}{(1-S_0\varepsilon)^3} - \bar{U}_H^2 + \frac{4\bar{C}_{s0}^2 (1 - \ln(1-\varepsilon) - \frac{2}{3}e^P)}{3(1-\varepsilon)^2} \right] (1-\varepsilon)}{R^*(\varepsilon)} d\varepsilon \quad (4.9, a)$$

$$R^*(\varepsilon) = R(\varepsilon, \bar{\sigma}, e^P) \left\{ \begin{aligned} &= \left[1 - \left(1 - \frac{N_0}{N_m} \right) e^{-ke^P(\varepsilon)} \right] \left[\frac{\bar{\tau}}{\bar{\tau}_*} - 1 - H^* e^P(\varepsilon) \right] \quad (4.9, b) \\ &e^P = e^P(\varepsilon) \\ &\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_A + \bar{U}_H^2 (\varepsilon - \varepsilon_A) \end{aligned} \right.$$

其中 ε_H 表示在 $R-H$ 曲线上的总应变, 如取线性率(2.59), 则有

$$\varepsilon_H = \frac{\bar{v}_0}{2 + S_0 \bar{v}_0} \quad (4.10)$$

这里, v_0 是飞板的初始速度. 从(4.9,a)可知, 定态激波的宽度不但依赖于材料的热弹性性质, 而且主要依赖于松弛函数的性质. 利用 Johnson 和 Barker^[6] 给出的数据, 范和段^[13] 曾用上述方法估算过铝中当激波压力 σ_H 达到 40 万大气压时定态激波的宽度约为 $5 \times 10^{-3} \text{cm} - 2 \times 10^{-2} \text{cm}$, 这和 Johnson 和 Barkev^[6] 的试验观察是吻合的.

五、激波演化的一点讨论

要弄清激波从不定常运动到定常运动的演化过程就须对方程组(4.2,a)-(4.2,e)进行数值求解, 问题相当复杂, 本节给出一个十分近似的方法去计算激波的衰减过程. 我们仍然假定, 在波头上, 熵的变化可以忽略, 而且限于研究对称碰撞问题, 这时有

$$(\bar{v})_{\bar{x}=0} = \frac{1}{2} \bar{v}_0, \quad \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} \right)_{\bar{x}=0} = 0 \quad (5.1, a, b)$$

按照(2.18)和(2.19), 无量纲的激波轨迹和激波速度为

$$\bar{X} = \bar{X}_*(\bar{t}), \quad \bar{U}_* = \dot{\bar{X}}_*(\bar{t}) \quad (5.2, a, b)$$

设 $\bar{\sigma}^-$, $\bar{\varepsilon}^-$ 和 \bar{v}^- 表示应力、应变和速度的间断量, 因为在波前, 这些量为零, 利用间断条件(2.20,a-b)可得

$$\bar{\sigma}^- = \bar{U}_* \bar{v}^- = \bar{U}_*^2 \bar{\varepsilon}^-, \quad \bar{U}_* = \left(\frac{\bar{\sigma}^-}{\bar{\varepsilon}^-} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.3, a, b)$$

注意到，在波头上，材料只经历瞬态弹性反应，用一个量 ε^- 便能表示其他各量

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^- &= \bar{\sigma}^{(1)}(\varepsilon^-), \quad \bar{U}_s = \left[\frac{\bar{\sigma}^{(1)}(\varepsilon^-)}{\varepsilon^-} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \bar{v}^- = [\bar{\sigma}^{(1)}(\varepsilon^-), \varepsilon^-]^{\frac{1}{2}} \\ \bar{C}^- &= \left[\frac{d\bar{\sigma}^{(1)}(\varepsilon^-)}{d\varepsilon^-} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad G^- = G(\varepsilon^-, 0, \bar{\sigma}^-) \end{aligned} \quad (5.4, a-e)$$

其中 \bar{C}^- 表示声速，而瞬态应力-应变曲线的无量纲形式为

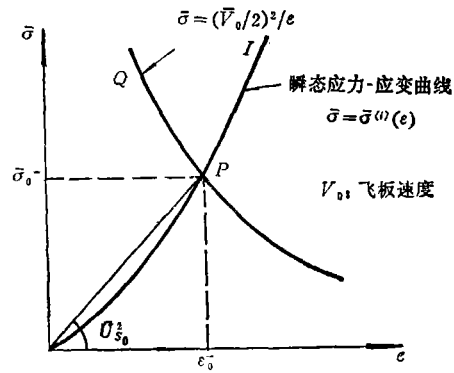
$$\bar{\sigma}^{(1)}(\varepsilon^-) = \bar{P}_{s_0}(\varepsilon^-) - \frac{4\bar{C}_{s_0}^2 \ln(1-\varepsilon^-)}{3(1-\varepsilon^-)} + \left(\frac{2}{9} \bar{C}^- - \frac{4}{3} \bar{B} \right) \frac{\ln^2(1-\varepsilon^-)}{1-\varepsilon^-} \quad (5.5)$$

同样，以激波速度 \bar{U}_s 作为独立变量，可以获得其他的量，设

$$\begin{aligned} \varepsilon^- &= f(\bar{U}_s), \quad \bar{\sigma}^- = g(\bar{U}_s), \quad \bar{v}^- = h(\bar{U}_s), \\ \bar{C}^- &= k(\bar{U}_s), \quad \bar{G}^- = n(\bar{U}_s) \end{aligned} \quad (5.6, a-e)$$

若飞板速度为 $\bar{v}_0 = 2\bar{v}^-$ 已知，则这些间断量在 $\bar{t} = 0$ 时刻的值可以通过图解法给出，在 $(\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon})$ 平面上表示瞬态曲线与双曲线

$$\bar{\sigma} \cdot \bar{\varepsilon} = \frac{\bar{v}_0^2}{4} \text{的交点，见图(5).}$$



图(5) 激波速度、应力和应变初值的图解法

利用场的方程(4.2, a, b)和间断条件容易证明^{[27]-[29]}激波的幅度 ε^- 满足下列方程

$$2 \frac{\delta \varepsilon^-}{\delta \bar{t}} + 3 \frac{\varepsilon^-}{\bar{U}_s} \frac{\delta \bar{U}_s}{\delta \bar{t}} = \frac{1}{\bar{U}_s^2} \left[\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{t}} \right] - \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{t}} \right] \quad (5.7)$$

其中 $\frac{\delta}{\delta \bar{t}} = \frac{\partial}{\partial \bar{t}} + \bar{U}_s \frac{\partial}{\partial \bar{X}}$ 表示 δ -时间导数，即沿激波轨迹取的时间导数 $\left[\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{t}} \right]$ 和 $\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{t}} \right]$ 分别表示应力率与应变率的跳跃。利用(4.2, a-e)及(5.2, a, b)，可得

$$\left[\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{t}} \right] = (\bar{C}^-)^2 \frac{\delta \varepsilon^-}{\delta \bar{t}} + \bar{U}_s \left[\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} \right] \quad (5.8, a)$$

$$\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{t}} \right] = \frac{\delta \varepsilon^-}{\delta \bar{t}} + \frac{\bar{U}_s}{(\bar{C}^-)^2} \left[\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} \right] + \frac{G^-}{(\bar{C}^-)^2} \quad (5.8, b)$$

$$\frac{\delta \bar{U}_s}{\delta \bar{t}} = \frac{\bar{U}_s}{2\varepsilon^-} \left(\frac{\bar{C}^{-2}}{\bar{U}_s^2} - 1 \right) \frac{\delta \varepsilon^-}{\delta \bar{t}} = \frac{\bar{U}_s}{2\varepsilon^-} (\zeta^- - 1) \frac{\delta \varepsilon^-}{\delta \bar{t}}, \quad \zeta^- = \left(\frac{\bar{C}^-}{\bar{U}_s} \right)^2 \quad (5.9)$$

其中 ζ^- 表示瞬态曲线上切线模量与割线模量之比，一般有

$$\zeta^- = \left(\frac{\bar{C}^-}{\bar{U}_s} \right)^2 \geq 1 \quad (5.10)$$

这表明，相对于波后的物质而言，激波是亚音速的。将(5.8, a, b)和(5.9)代入方程(5.7)可以得到关于波幅增、衰的方程

$$\frac{\delta \varepsilon^-}{\delta \bar{t}} = \frac{2\bar{U}_s(\zeta^- - 1) \left[\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} \right] - 2G^-}{\bar{C}^{-2}(3 + \zeta^-)} \quad (5.11)$$

$$\frac{\delta\sigma^-}{\delta\bar{t}} = \frac{2\bar{U}_s(\xi^- - 1)\left[\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{t}}\right] - 2G^-}{(3 + \xi^-)} \quad (5.12)$$

$$\frac{\delta\bar{U}_s}{\delta\bar{t}} = \frac{\bar{U}_s^2(\xi^- - 1)^2\left[\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{t}}\right] - \bar{U}_s(\xi^- - 1)G^-}{e^-C^{-2}(3 + \xi^-)} \quad (5.13)$$

根据初始将条件(5.1, b), 可得

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\delta e^-}{\delta\bar{t}}\right)_{\bar{t}=0} &= -\frac{2G_0^-}{(\bar{C}_0^-)^2(3 + \xi_0^-)} < 0 \\ \left(\frac{\delta\bar{U}_s}{\delta\bar{t}}\right)_{\bar{t}=0} &= -\frac{\bar{U}_{s0}(\xi_0^- - 1)G_0^-}{e_0^-(3 + \xi_0^-)(\bar{C}_0^-)^2} < 0 \\ \left(\frac{\delta\bar{\sigma}}{\delta\bar{t}}\right)_{\bar{t}=0} &= \frac{-2G^-}{3 + \xi_0^-} < 0 \\ \left(\frac{\delta v^-}{\delta\bar{t}}\right)_{\bar{t}=0} &= -\frac{\bar{U}_{s0}(1 + \xi_0^-)G_0^-}{(\bar{C}_0^-)^2(3 + \xi_0^-)} < 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.14, a, b, c, d)$$

其中 e_0^- 、 ξ_0^- 、 \bar{C}_0^- 和 G_0^- 为相应量的初始值. 因此, 我们已经证明, 平板撞击中, 激波的幅值随时间总是衰减的. 同时, 从(5.11)可以得到关于激波幅值增衰的一般结论,

$$(i) \text{ 若 } \bar{U}_s(\xi^- - 1)\left[\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{t}}\right] > G^-, \quad \text{则 } \frac{\delta e^-}{\delta\bar{t}} > 0 \Rightarrow \text{激波幅值是增的;} \quad (5.15)$$

$$(ii) \text{ 若 } \bar{U}_s(\xi^- - 1)\left[\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{t}}\right] < G^-, \quad \text{则 } \frac{\delta e^-}{\delta\bar{t}} < 0 \Rightarrow \text{激波幅值是衰减的;} \quad (5.16)$$

$$(iii) \text{ 若 } \bar{U}_s(\xi^- - 1)\left[\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{t}}\right] = G^-, \quad \text{则 } \frac{\delta e^-}{\delta\bar{t}} = 0 \Rightarrow \text{激波是自持的.} \quad (5.17)$$

我们称满足(5.17)式的加速度跳跃为临界加速度 $\left[\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{t}}\right]_{cr} = \left(\frac{G^-}{\bar{U}_s(\xi^- - 1)}\right)_{e^-} = e_{cr}$,

而 e_{cr} 称为应变的临界幅值, 一旦 e^- 衰减到 e_{cr} , 激波的定常运动便立即建立了起来. 按照前节的分析有

$$e_{cr} = e_A, \quad \bar{U}_s = \bar{U}_H, \quad \left[\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{t}}\right]_{cr} = \frac{G^-(e_A)}{\bar{U}_H(\xi_H^- - 1)} \quad \text{当 } \bar{t} = \bar{t}_H \quad (5.18)$$

当激波的定常运动建立起来后, 有

$$\frac{\delta e^-}{\delta\bar{t}} = \frac{\delta\bar{\sigma}^-}{\delta\bar{t}} = \frac{\delta\bar{U}_s}{\delta\bar{t}} = \frac{\delta v^-}{\delta\bar{t}} = 0 \quad \bar{t} \geq \bar{t}_H \quad (5.19)$$

从(5.11)可知, 一般要得到 $e^- = e^-(\bar{t})$ 的解析解是不可能的, 因为在波头上, $\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{t}}$ 事先不知道, 需由边界条件而定. 但这里可以提供十分简单近似方法. 为此, 设 \bar{U}_s 作为 \bar{t} 函数, 进行 Taylor 级数展开

$$\bar{U}_s = \bar{U}_s(\bar{t}) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \left(\frac{\bar{t}}{\bar{t}_H}\right)^n \quad (5.20)$$

其中, α_n 是待定系数, \bar{t}_H 是激波从不定常运动到定常运动的过渡时刻, 如图(2)所示. 为了简单起见, 作为零次近似, 我们先取级数的前四项

$$\bar{U}_s = \alpha_0 + \alpha_1 \left(\frac{\bar{t}}{\bar{t}_H} \right) + \alpha_2 \left(\frac{\bar{t}}{\bar{t}_H} \right)^2 + \alpha_3 \left(\frac{\bar{t}}{\bar{t}_H} \right)^3 \quad (5.21)$$

为了求出系数 $\alpha_i (i=0, 1, 2, 3)$, 利用下列已知条件

$$\begin{aligned} \bar{U}_s^{(0)}(0) = \bar{U}_{s0} = \frac{\bar{v}_0}{2\varepsilon_0}, \quad \left(\frac{\delta \bar{U}_s^{(0)}}{\delta \bar{t}} \right)_{i=0} = \dot{\bar{U}}_{s0} &\equiv - \frac{\bar{U}_{s0}(\xi_0^+ - 1)C_0^-}{\varepsilon_0(C_0^-)^2(3 + \xi_0^-)} \\ \left(\bar{U}_s^{(0)} \right)_{\bar{t} = \bar{t}_H} = \bar{U}_H = 1 + S_0 \frac{\bar{v}_0}{2}, \quad \left(\frac{\delta \bar{U}_s^{(0)}}{\delta \bar{t}} \right)_{\bar{t} = \bar{t}_H} = 0 \end{aligned} \quad (5.22, a-d)$$

将(5.21)代入上式, 可得

$$\begin{aligned} \alpha_0 = \bar{U}_{s0}, \quad \alpha_1 = \dot{\bar{U}}_{s0}, \quad \alpha_2 = \bar{U}_H - \bar{U}_{s0} - 2\dot{\bar{U}}_{s0}\bar{t}_H \\ \alpha_3 = 2(\bar{U}_{s0} - \bar{U}_H) + \dot{\bar{U}}_{s0}\bar{t}_H \end{aligned} \quad (5.23, a-d)$$

显然, 上述条件还不足以完全决定系数 $\alpha_i (i=0, 1, 2, 3)$, 因为 \bar{t}_H 也是未知的. 如进一步假定系数 α_3 等于零, 从(5.23, d)式可得

$$\bar{t}_H \approx - \frac{\bar{U}_{s0} - \bar{U}_H}{\dot{\bar{U}}_{s0}/2} = \frac{2\varepsilon_0 \bar{U}_{s0}(3 + \xi_0^-)}{\left(1 - \frac{1}{\xi_0^-}\right) \cdot G_0^+} \quad (5.24)$$

这里, $\dot{\bar{U}}_{s0}/2$ 恰好是不定常激波的平均减速度. (5.24) 式可以作为求解时间 \bar{t}_H 的一种近似. 为了求得更精确的解, 我们应当利用其他条件. 为此将零次解代入(5.6, a-e)式, 得到速度、应变、应力等的零次解:

$$\begin{aligned} e^- = f(\bar{U}_s), \quad \sigma^- = g(\bar{U}_s), \quad \bar{v}^- = h(\bar{U}_s) \\ \bar{C}^- = k(\bar{U}_s), \quad \bar{G}^- = n(\bar{U}_s), \quad \xi^- = \frac{k^2(\bar{U}_s)}{\bar{U}_s(\bar{t})} \end{aligned} \quad (5.25, a, f)$$

将(5.25, a-f)代入(5.13)得沿激波的质点加速度的零次解

$$A(\bar{t}, \bar{t}_H) \equiv \left[\frac{\partial \bar{v}^-}{\partial \bar{t}} \right]^{(0)} = \frac{1}{\bar{U}_s(\xi^- - 1)} \left\{ \bar{G}^-(\bar{t}) + \frac{e^- \bar{C}^{-2}(3 + \xi^-)}{\bar{t}_H(\xi^- - 1)\bar{U}_s} \sum_{n=1}^3 n \alpha_n \left(\frac{\bar{t}}{\bar{t}_H} \right)^n \right\} \quad (5.26)$$

将(5.26)代入(5.11)得到一个常微分方程

$$\frac{\delta e^-}{\delta \bar{t}} = \frac{2\bar{U}_s(e^-)[\xi^-(e^-) - 1]A(\bar{t}, \bar{t}_H) - 2\bar{G}^-(e^-)}{[\bar{C}^-(e^-)]^2\{3 + \xi^-(e^-)\}} \quad (5.27)$$

其中存在二个边界条件

$$\begin{aligned} \text{当 } \bar{t} = 0 \quad \text{有 } e^- = e_0^- \\ \text{当 } \bar{t} = \bar{t}_H \quad \text{有 } e^- = e_A \end{aligned} \quad (5.28)$$

这样, 根据方程(5.27)和边界条件(5.28)用逐次迭代方法同时求得一次近似解 e^- 和 \bar{t}_H 的值.

值得指出, 这种方法不但可以用来处理单一激波问题, 而且可以用来研究弹-粘塑性波

的衰减问题, 数值结果将另行讨论。

致谢: 作者感谢钱伟长教授对本文的指教, 他指出, 对激波结构的研究需要用非平衡态热力学方法, 这就为该课题指出了新的方向。作者也衷心感谢副研究员范良藻在本文准备过程中进行的有益讨论。

参 考 文 献

1. Rice, M. H., McQueen, R. G., and Walsh, J. M., *Solid State Phys.*, 6(1958), 1-63.
2. McQueen, R. G., Marsh, S. P., Taylor, J. W., Fritz, J. N., and Carter, W. J., *The Equation of State of Solids from Shock Wave Studies in High-Velocity Impact Phenomena*, Ed. by Kinslow, R., Academic Press Inc. New York(1970).
3. Taylor, J. W., Dislocation dynamics and dynamic yielding, *J. Appl. Phys.*, 36 (1965), 3146-50.
4. Gilman, J. J., Dislocation dynamics and the response of materials to impact, *Appl. Mech. Rev.* 21(1968), 767.
5. Gilman, J. J., Symp. Mechanical Behavior of Materials under Dynamic Loads, San Antonio, Texas(1967).
6. Johnson, J. N. and Barker, L. M., Dislocation and steady plastic wave profiles in 6061-T6 aluminum, *J. Appl. Phys.* 40(1969), 4321.
7. Herrmann, W., Nonlinear stress waves in metals, in wave propagation in solids, Ed. by Miklowitz, J., *ASME*(1969)
8. Herrmann, W., Hick, D. L. and Young, E. G., Attenuation of elastic-plastic stress waves, in Shock Waves and the Mechanical Properties of Solids, Ed. by Burke, J. J., and Weiss, V., Syracuse University Press(1971).
9. Lee, E. H., Elastic-plastic deformation at finite strain. *J. Appl. Mech.*, 36 (1969), 1-6.
10. Lee, E. H., Plastic wave propagation analysis and elastic-plastic theory at finite deformation, in Shock Wave and the Mechanical Properties of Solids, Ed. by Burke, J. J. and Weiss, V., Syracuse University Press.(1971).
11. Clifton, R. J., On the Analysis of Elastic/Visco-Plastic Waves of Finite Uniaxial Strain. Id., New York(1971).
12. Clifton R. J., Plastic Waves: Theory and Experiment, *Mechanics Today*, 1, Ed. by Nemat-Nasser, S., Pergamon Press, Inc.(1972).
13. 范良藻, 段祝平, 固体中的激波构造, 力学 2 (1976) 103-109, 科学出版社.
14. Gilman, J. J., Physical nature of plastic flow and fracture, in Plasticity, Proc. 2nd Symp. on Naval St. Mech., Ed. by Lee, E. H. and Symonds, P. C., Pergamon Press Inc.(1960).
15. Herrmann, W., Some recent results in elastic-plastic wave propagation, in Propagation of Shock Waves in Solids, Ed. by Varley E. *ASME* (1976).
16. Farren, W. S. and Taylor, G. I., The heat developed during plastic extension of metals, *Proc. Roy. Soc. (London)*, A107 (1925), 422-51.
17. Quinney, H. and Taylor, G. I., The latent energy remaining in a metal after cold

- working, *Proc. Roy. Soc. (London)*, A143 (1934), 307-26.
18. Wilkins, M. L., Calculation of elastic-plastic flow in method in *Computational Physics*, Ed. by Alder, Fernbachs, B. and Rotenberg, M., 3. Academic Press, New York (1964).
 19. Bridgman, P. W., *The Physics of High Pressure*, Printed in Great Britain by Strangeways Press, Ltd., (1952).
 20. Broberg, K. B., *Shock Waves in Elastic and Elastic-Plastic Media*, Stockholm (1956).
 21. Thurston, R. A. and Bernstein, B., Third-order constants and the velocity of small amplitude elastic waves in homogeneously stressed media, *Phys. Rev.*, A 1.33 (1964), 1604-10.
 22. Smith, R. T., Stern, R. and Stephens, R. W. B., Third-order elastic moduli of polycrystalline metals from ultrasonic velocity measurements, *Acoust. Soc. Am. J.*, 40 (1966), 1002-08.
 23. Duvall, G. E., Shock wave and equations of state, in *Dynamic Response of Materials to Instant Impulsive Loading*, Ed. by Chou, P. C. and Hopkins, A. K., Printed in U. S. A. (1972).
 24. Lindholm, U. S., Mechanical properties at high rates of strain, *Proc. Conf. on Mech. Prop. Mat. at High Rates of Strain*, (1974), Oxford.
 25. Gillis, P. P., Gilman, J. J. and Taylor, J. W., Stress dependence of dislocation, *Phil. Mag.*, 20(1969), 279-89.
 26. 段祝平 粘塑性材料的本构方程与一维波理论, 中国科学院, 力学所研究报告 (1979) 待发表
 27. Chen, P. J., *Selected Topics in Wave Propagation*, Noordhoff Int. Pub., Leyden (1976).
 28. Herrmann, W. and Nunziato, J. W., Non-linear constitutive equation, in *Dynamic Response of Materials to Instant Impulsive Loading*, Ed. by Chou, P. C. and Hopkins, A. K. (1972).
 29. Nunziato, J. W., Walsh, E. K., Schuler, K. W., and Barker, L. M., Wave propagation in nonlinear viscoelastic solids, in "Handbuch der Physik" Vol. VIa/4 (1974).

A Physical Model of the Structure and Attenuation of Shock Waves in Metals

Duan Zhou-ping

(Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing)

Abstract

In this paper, a physical model of the structure and attenuation of shock waves in metals is presented. In order to establish the constitutive equations of materials under high velocity deformation and to study the structure of transition zone of shock wave, two independent approaches are involved. Firstly, the specific internal energy is decomposed into the elastic compression energy and elastic deformation energy, and the latter is represented by an expansion to third-order terms in elastic strain and entropy, including the coupling effect of heat and mechanical energy. Secondly, a plastic relaxation function describing the behaviour of plastic flow under high temperature and high pressure is suggested from the viewpoint of dislocation dynamics. In addition, a group of ordinary differential equations has been built to determine the thermo-mechanical state variables in the transition zone of a steady shock wave and the thickness of the high pressure shock wave, and an analytical solution of the equations can be found, provided that the entropy change across the shock is assumed to be negligible and Hugoniot compression modulus is used instead of the isentropic compression modulus. A quite approximate method for solving the attenuation of shock wave front has been proposed for the flat-plate symmetric impact problem.