应用数学和力学，第2卷第2期（1981年4月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

钱氏定理在有限变形极矩弹性力学广义变分原理的应用

陈至达

（重庆中国矿业学院，1980年1月23日收到）

摘　要

应用Lagrange乘子法和钱伟长证明的两类广义变分原理的等价定理，在本文中导出有限变形极矩弹性力学的广义变分原理．文中采用了在拖带坐标系描述法建立的有限变形应变张量（称为Biot有限变形应变定义的准确形式）和应变速率定义与拖带系应力张量构成完整的数学描述．

一、引　言

近年来，线性与非线性弹性力学的广义变分原理的研究成果在Nemat-Nasser[1]（1972）一文中曾作了系统评述，但该文叙述的条理性并不十分清楚，而且有限变形的应变与应力所采用的度量在实用并不方便．最近，钱伟长[2]指出，广义变分原理的泛函可以系统地采用Lagrange乘子法，并证明两类广义变分原理的等价定理，建立了广义变分原理的健全数学基础．

在[2]文中证明了下列定理：

“由最小位能原理导出的完全广义变分原理和由最小余能原理导出的广义变分原理是等价的．”

由于这个结果对于广义变分原理发展认识之价值，我们称之为钱氏定理．这个基本定理不论对小变形或大变形、以及有体矩存在的极矩弹性力学（Polar Elasticity）也是适用的．

极矩弹性力学（或称非对称弹性力学）的最小势能与余能定理在Nowacki[3]（1972）提出的线性极矩弹性力学中曾有叙述．本文则在作者的工作[4]（1979）的基础上应用钱伟长所证明的定理导出非对称弹性力学的广义变分原理，对于大变形或小变形普遍适用．

大变形的变分原理除了采用古典的Green应变度量以外，还有其他的度量，如Biot的大量工作（近期的研究参见[5](1978)）．Fraeijs de Veubeke[6]（1972）由位移梯度的转动与变形之极化分解定理（Polar decomposition theorem）出发建立了大位移新的变分原理．作者在[7]文中，则由Weyl的直和分解原理建立新的应变张量，因为提出将转动和变形在大位移过程分离，而由此定义大变形的应变度量，首先得力于Biot的研究，故我们称新的有限变形应变定义为Biot有限变形应变定义的准确形式．

二、有限变形极矩弹性力学的基本方程

因为作用在变形体上的力可能是保守力或非保守力，非保守力之功不仅决定于其最终值还和力作用途径有关．再之，当构件大变形时，外力方向可以有任意变动形式；而且还可能出现失稳状态．因此，对于大位移大变形问题，我们最好采用变形体的瞬时位形为参考基态；以嵌含在变形体中的拖带系定义的应力与应变张量为基础进行讨论[4][7]．又因为在任意变形状态，拖带坐标系一般成为曲线坐标系，所以应力平衡方程也必须以一般曲线参考系为基准．这样，我们是以虚功率（virtual power）来表达变分原理的．

在非对称弹性力学中，由于体矩的存在，应力张量是非对称的．我们可以将应力分量 σ^i_j（或 σ^{ij}）分为反称部份 $\underset{a}{\sigma}{}^i_j$ 与对称部份 $\underset{s}{\sigma}{}^i_j$：

$$\sigma^i_j=\underset{a}{\sigma}{}^i_j+\underset{s}{\sigma}{}^i_j=\frac{1}{2}(\sigma^i_j-\sigma^{T\,i}_{\ j})+\frac{1}{2}(\sigma^i_j+\sigma^{T\,i}_{\ j}),\quad i,j=1,2,3 \tag{2.1}$$

T 表示转置张量．

设 ρ 为拖带系中单元体的质量，**F** 为单位质量体力矢量，**m** 为单位质量体矩矢量．我们有下列基本方程(证明见[4]文)：

应力与体力的平衡方程(静力平衡)：

$$\sigma^{ij}\|_j+\rho F^i=0,\qquad 或\quad \sigma^j_i\|_j+\rho F_i=0 \tag{2.2}$$

$\|_j$ 表示在变形后拖带对拖带坐标 x^j 的协变微分．

应力与体矩的平衡方程

$$(\sigma^i_j-\sigma^{T\,i}_{\ j})+\rho m^i_j=0 \tag{2.3}$$

m^i_j 是根据矢量 **m** 定义的二阶混合张量分量．

设 v 为变形体中一点相对于固定系的速度矢量，**L** 为在变形体中一点的转轴方位单位矢量，$\dot{\vartheta}$ 为在一点的平均整旋角速度，$\dot{X}^i_j$ 为应变速率；在变形体中一点的推广 Euler 运动学公式为

$$v^i\|_j=L^i_j\dot{\vartheta}+\dot{X}^i_j \tag{2.4}$$

其中应变速率

$$\dot{X}^i_j=\frac{1}{2}(v^i\|_j+v^{Ti}\|_j) \tag{2.5}$$

在弹性体边界面上，我们将它分为二部份：S_p+S_u．在 S_p 上，外力 $\bar{p}_i$ 为已知；在 S_u 上，位移 $\bar{u}_i$ 为已知，

$$在\ S_p\ 上：\qquad p_i=\sigma^j_i n_j=\bar{p}_i \tag{2.6}$$

$$在\ S_u\ 上：\qquad u_i=\bar{u}_i \tag{2.7}$$

n_i 为表面外法线矢量的一阶协变分量．

可以证明存在有应变能密度函数 $A(X)$（X 表示应变张量），使得下式关系成立

$$\underset{s}{\sigma}{}^i_j=\frac{\partial A}{\partial X^j_i},\quad \underset{s}{\sigma}{}^i_j=f(X) \tag{2.8}$$

假设上式之反逆关系存在，我们可以解得

$$X^i_j = g(\underset{s}{\sigma}) \tag{2.9}$$

($\underset{s}{\sigma}$ 表示应力张量的对称成分）．以应力为独立变量可以构成余能密度函数$B(\underset{s}{\sigma})$：

$$B(\underset{s}{\sigma}) = \underset{s}{\sigma}^j_i X^i_j - A(X) \tag{2.10}$$

于是有

$$X^i_j = \frac{\partial B}{\partial \underset{s}{\sigma}^j_i} \tag{2.11}$$

因为 X^i_j 是对称的，$\underset{a}{\sigma}^j_i X^i_j = 0$，式（2.10）可以写成

$$\sigma^j_i X^i_j = A(X) + B(\sigma) \tag{2.12}$$

以 δ 为变分记号，则

$$\delta(\sigma^j_i X^i_j) = \sigma^j_i \delta X^i_j + X^i_j \delta\sigma^j_i \tag{2.13}$$

$$\delta(\sigma^j_i \dot{X}^i_j) = \sigma^j_i \delta\dot{X}^i_j + \dot{X}^i_j \delta\sigma^j_i \tag{2.14}$$

我们称式（2.13）为 $\sigma^j_i X^i_j$ 之全量变分形式，称式（2.14）为增量变分形式．有限变形的增量变分实质上将非线性过程线性化．

三、有限变形极矩弹性力学的广义变分原理

在弹性体界面 S 内区域 τ，当应力处于某一阶段的平衡状态，如应变有微小增量 $\dot{X}^i_j dt$，t并不一定代表时间，也可以是变形系统的一个特征参数．则在 τ 内变形能的增加率为

$$\dot{\Phi} \equiv \int_\tau \sigma^j_i \dot{X}^i_j d\tau \tag{3.1}$$

积分号下之 τ 指体积积分．而表面力、体力与体矩之功率为（积分号下之 S 指面积分）：

$$\dot{W} \equiv \oint_s p_i v^i ds + \int_\tau \rho F_i v^i d\tau + \int_\tau \frac{1}{2} \rho m^j_i L^i_j \dot{\vartheta} d\tau \tag{3.2}$$

今定义泛函 $\dot{\pi}$，令

$$\dot{\pi} = \dot{\Phi} - \dot{W} = \int_\tau \sigma^j_i X^i_j d\tau - \left[\oint_s p_i v^i ds + \int_\tau \rho F_i v^i d\tau + \int_\tau \frac{1}{2} \rho m^j_i L^i_j \dot{\vartheta} d\tau \right] \tag{3.3}$$

在给定条件下，凡是一切可能存在的变形状态之中，真实的变形状态满足：（Ⅰ）应力一体力平衡方程（2.2），（Ⅱ）应力一体矩平衡方程（2.3），（Ⅲ）应变速率与平均整旋角速度的相容条件（2.4），（Ⅳ）力的边界条件（2.6），（Ⅴ）位移的边界条件（2.7）者，乃使得泛函 $\dot{\pi}$ 之一次变分取驻值．

采用 Lagrange 乘子法[2]，将求泛函 $\dot{\pi}$ 在条件（Ⅰ）至（Ⅴ）的极值问题化为求下列广义泛函 $\dot{\bar{\pi}}$ 的极值问题，令

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\pi}} = & \int_\tau \sigma^j_i \dot{X}^i_j d\tau - \left[\oint_s p_i v^i ds + \int_\tau \rho F_i v^i d\tau + \int_\tau \frac{1}{2} \rho m^j_i L^i_j \dot{\vartheta} d\tau \right] + \int_\tau [\sigma^j_i \|_j + \rho F_i] \alpha^i d\tau \\ & + \int_\tau [(\sigma^j_i - \sigma^{Tj}_i) + \rho m^j_i] \beta^i_j d\tau + \int_\tau [\dot{X}^i_j - v^i\|_j - L^i_j \dot{\vartheta}] \gamma^j_i d\tau + \int_{S_v} (v^i - \bar{v}^i) \lambda_i ds \\ & + \int_{S_p} (p_i - \bar{p}_i) \mu^i ds \end{aligned} \tag{3.4}$$

α^i、β^j_i、γ^j_i、λ_i、μ_i 为 Lagrange 乘子.

$\dot{\pi}$ 的变分 $\delta\dot{\pi}$ 可以分成二部份：一部份以位移几何量的独立变分 δv^i、$\delta \dot{X}^j_i$、$\delta\dot{\vartheta}$ 为基础，一部份以力的量的独立变分 δp^i、δF_i、$\delta\sigma^j_i$、δm^j_i 为基础.这样，有

$$\begin{aligned}\delta\dot{\pi}=&\left\{\int_\tau \sigma^j_i\delta\dot{X}^i_j d\tau-\int_{S_p}\bar{p}_i\delta v^i ds-\int_\tau \rho F_i\delta v^i d\tau-\int_\tau \frac{1}{2}\rho m^j_i\delta(L^i_j\dot{\vartheta})d\tau\right.\\&+\int_\tau[\dot{X}^j_i-v^j\|_i-L^j_i\dot{\vartheta}]\delta\gamma^i_j d\tau+\int_\tau[\delta\dot{X}^j_i-\delta v^j\|_i+\delta(L^j_i\dot{\vartheta})]\gamma^i_j d\tau+\int_{S_v}\delta v^i\lambda_i ds\\&\left.+\int_{S_v}(v^i-\bar{v}^i)\delta\lambda_i ds\right\}+\left\{\int_\tau \dot{X}^j_i\delta\sigma^i_j d\tau-\int_{S_v}\bar{v}^i\delta p_i ds-\int_\tau\rho v^i\delta F_i d\tau\right.\\&-\int_\tau\frac{1}{2}\rho L^j_i\dot{\vartheta}\delta m^i_j d\tau+\int_\tau[\sigma^j_i\|_j+\rho F_i]\delta\alpha^i d\tau+\int_\tau[\delta\sigma^j_i\|_j+\rho\delta F_i]\alpha^i d\tau\\&+\int_\tau[\sigma^j_i-\sigma^{Tj}_i+\rho m^j_i]\delta\beta^i_j d\tau+\int_\tau[\delta\sigma^j_i-\delta\sigma^{Tj}_i+\rho\delta m^j_i]\beta^i_j d\tau+\int_{S_p}\mu^i\delta p_i ds+\\&\left.+\int_{S_p}(p_i-\bar{p}_i)\ \delta\mu^i ds\right\}\end{aligned}\tag{3.5}$$

等号右边的第一括弧内之量记为 $\delta\dot{\pi}_u$，第二括弧内之量记为 $\delta\dot{\pi}_c$，于是有

$$\delta\dot{\pi}=\delta\dot{\pi}_u+\delta\dot{\pi}_c\tag{3.6}$$

$\delta\dot{\pi}_u$ 与 $\delta\dot{\pi}_c$ 实际上是有限变形过程中，以瞬时位形为基准的位能原理与余能原理的功率形式表达式.

必须注意的是对变分 $\delta(L^j_i\dot{\vartheta})$ 的二种意见，一者认为 $\delta(L^j_i\dot{\vartheta})=(\delta L^j_i)\dot{\vartheta}+L^j_i\delta\dot{\vartheta}$，另一者认为 $\delta(L^j_i\dot{\vartheta})=L^j_i\delta\dot{\vartheta}$. 后者是合理的，因为就一个可变形微圆体（粒子）而言，它赋有的转动能量是与转轴方位无关. 因此，在变分原理中转轴方位 L^j_i 之变分不给考虑.

运用散度定理，$\delta\dot{\pi}_c$ 与 $\delta\dot{\pi}_u$ 均可以变型 今先考察 $\delta\dot{\pi}_u$，因

$$\int_\tau \delta v^j\|_i\gamma^i_j d\tau=\int_\tau(\delta v^j\gamma^i_j)\|_i d\tau-\int_\tau\delta v^j\cdot\gamma^i_j\|_i d\tau=\oint_{S_v+S_p}\delta v^j\cdot\gamma^i_j n_i ds-\int_\tau\delta v^j\cdot\gamma^i_j\|_i d\tau\tag{3.7}$$

将上式代入 $\delta\dot{\pi}_u$ 表达式，并注意 $L^j_i=-L^i_j$，整理后得

$$\begin{aligned}\delta\dot{\pi}_u=&\int_\tau(\sigma^j_i+\gamma^j_i)\delta\dot{X}^i_j d\tau+\int_\tau[\dot{X}^j_i-v^j\|_i+L^j_i\dot{\vartheta}]\delta\gamma^i_j d\tau+\int_\tau(\gamma^i_j\|_i-\rho F_j)\delta v^j d\tau\\&+\frac{1}{2}\int_\tau(\gamma^j_i-\gamma^{Tj}_i-\rho m^j_i)L^i_j\delta\dot{\vartheta}d\tau+\int_{S_v}(\lambda_j-\gamma^i_j n_i)\delta v^j ds-\int_{S_p}(\gamma^i_j n_i+\bar{p}_j)\delta v^j ds\\&+\int_{S}(v^i-\bar{v}^i)\delta\lambda_i ds\end{aligned}\tag{3.8}$$

如取 δv^i、$\delta\dot{X}^j_i$、$\delta\dot{\vartheta}$、$\delta\lambda_i$、$\delta\gamma^j_i$ 为独立变量，当 $\delta\dot{\pi}_u=0$，我们得出泛函 $\dot{\pi}_u$ 取驻值的条件：

$$\left.\begin{array}{lll}(a) & \gamma^j_i=-\sigma^j_i,\quad \lambda_j=\gamma^i_j n_i & \\ (b) & \dot{X}^j_i-v^j\|_i+L^j_i\dot{\vartheta}=0 & 在\tau内\\ (c) & \gamma^i_j\|_i-\rho F_j=0,\quad \gamma^j_i-\gamma^{Tj}_i-\rho m^j_i=0 & 在\tau内\\ (d) & -\gamma^i_j n_i=\bar{p}_j & 在S_p上\\ (e) & v^i=\bar{v}^i & 在S_v上\end{array}\right\}\tag{3.9}$$

由 (a) 解出 Lagrange 乘子 λ_i、γ^i_j，再代入 (c)、(d) 诸式，我们立即可以看出真实的变形状态满足（Ⅰ）－（Ⅴ）条件者使得 $\delta\dot{\pi}_u=0$

另一方面，考察 $\delta\dot{\pi}_c$，因

$$\int_\tau \delta\sigma^i_j\|_i\alpha^j d\tau=\int_\tau(\delta\sigma^i_j\alpha^j)\|_i d\tau-\int_\tau\delta\sigma^i_j\cdot\alpha^j\|_i d\tau=\oint_{S_u+S_p}\alpha^j\delta\sigma^i_j n_i ds-\int_\tau\delta\sigma^i_j\cdot\alpha^j\|_i d\tau \tag{3.10}$$

将上式代入 $\delta\dot{\pi}_c$ 表达式，并注意如 β^i_j 满足条件：$\beta^i_j=-\beta^j_i$，$\delta\dot{\pi}_c$ 可以化成

$$\begin{aligned}\delta\dot{\pi}_c=&\int_\tau[\sigma^i_j\|_i+\rho F_j]\delta\alpha^j d\tau+\int_\tau[\sigma^i_j-\sigma^{T}{}^i_j+\rho m^i_j]\delta\beta^j_i d\tau+\int_\tau[\dot{X}^i_j-\alpha^j\|_i+2\beta^j_i]\delta\sigma^i_j d\tau\\&+\int_\tau\rho(\beta^j_i-\frac{1}{2}L^j_i\dot{\vartheta})\delta m^i_j d\tau+\int_\tau\rho(\alpha^j-v^j)\delta F_j d\tau+\int_{S_v}(\alpha^j-\bar{v}^j)\delta p_j ds\\&+\int_{S_p}(\alpha^j+\mu^j)\delta p_j ds+\int_{S_p}(p_i-\bar{p}_i)\delta\mu^i dS\end{aligned} \tag{3.11}$$

如取 $\delta\sigma^i_j$、δm^i_j、δF_j、、δp_i、$\delta\alpha^j$、$\delta\beta^j_i$ 为独立变量，当 $\delta\dot{\pi}_c=0$，我们可以确定泛函 $\dot{\pi}_c$ 为驻值的条件：

(a) $\alpha^j=v^j$，$\beta^j_i=\frac{1}{2}L^j_i\dot{\vartheta}$，$\mu^j=-\alpha^j$

(b) $\sigma^i_j\|_i+\rho F_j=0$，$\sigma^i_j-\sigma^{T}{}^i_j+\rho m^i_j=0$　　在τ内

(c) $\dot{X}^i_j-\alpha^j\|_i+2\beta^j_i=0$　　在τ内

(d) $\alpha^j-\bar{v}^j=0$　　在S_v上

(e) $p_i=\bar{p}_i$　　在S_p上

由 (a) 解出 Lagrange 乘子 α^j、β^j_i，再代入 (c) 与 (d) 式，我们立刻看出 $\delta\dot{\pi}_c=0$，与 $\delta\dot{\pi}_u=0$ 为驻值的条件完全相同.

当变形状态为真实的，则有

$$\delta\dot{\pi}=\delta\dot{\pi}_u+\delta\dot{\pi}_c=0,\quad \delta\dot{\pi}_u=-\delta\dot{\pi}_c$$

以上结果推广了钱伟长定理到有限变形非对称弹性力学的增量形式，证明了下列结论：

“在有体矩存在的有限变形过程中，在任一瞬时平衡状态，以位移几何量为独立变分量和以力的量为独立变分量导出的两个广义变分原理的增量形式是等价的.”

上述变分原理是从弹性体的虚功率原理为出发点，对材料物性方程并没有限制条件，所以对于应力—应变关系成物理线性与非线性的物质都适用.

当一根铁棒磁化时，实验证明有力矩效应，这种效应是由于磁矩产生的，有关这类问题的变分原理就要考虑到体矩作用问题（如磁弹性波）. 它的应用有待进一步研究.

本文所述原理对于解决大位移大变形问题的增量有限元逐步迫近法是十分有用的.

参 考 文 献

1. Nemat-Nasser, S., General variation principles in nonlinear and linear elasticity with applications, *Mechanics Today*, 1, (1972), 214-258.
2. 钱伟长，弹性理论中广义变分原理的研究及其在有限元计算中的应用，清华大学科学报告，TH 78011，1978年.
3. Nowacki, W., Theory of micropolar elasticity, *CISM, Udine*, (1972), § 3.2.
4. 陈至达，连续介质有限变形力学几何场论（弹性有限变形能量原理），清华大学学报，19卷，第4期，1979年.
5. Biot, M. A., Variational irreversible thermodynamics of physical-chemical solids with finite deformation, *Int. J. Solids Structures*, 14, 4 (1978).881-903.
6. Fraeijs de veubeke, B. M., A new variational principle for finite elastic displacements, *Int. J. ENG. Sci*, 10, 9 (1972) 754-764.
7. 陈至达 连续介质有限变形力学几何场论（几何理论），力学学报，2期，107-117页，1979年.

Application of Chien's Theorem to the Establishing of General Variational Principle in Polar Elasticity of Finite Deformation

Chen Zhi-da

(China Institute of Mining Technology, Chongqing)

Abstract

Variational principles of minimum potential energy and complementary energy of linear polar elasticity has been formulated by Nowacki [3]. As it has been proved by Chien Wei-zang, that the two generalized variational principles are equivalent in functionals; we now apply this important statement Chien's theorem, and Lagrange's method of multipliers to the establishing of generalized variational principle in polar elasticity for finite deformation. The fundamental equations of mechanics of finite deformation used are of which has been established in the author's paper [7]、[4].