应用数学和力学，第2卷第2期（1981年4月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

多层压紧平板具有逐渐改变的导热系数的热传导问题

刘　先　志

（济南山东工学院，1980年12月8日收到）

摘　要

对于处理挤紧的多层异质平板集块的热传导问题，迄今都习惯于求解这种集块中每层的热传导问题，并以每两层邻界面上的温度互等和热流量互等作为两个必须同时被满足的条件．本文基于当多层异质平板的导热系数具有一个这样的连续改变规律，致使可以进行统体的一次解析，以示在这种情势下可以采用此法，以代替迄今沿用的费时的逐层运算．

一、前　　言

在实际中，热传导是一个有广泛意义的问题，例如，隔热，防寒，电器机具的绝缘和冷却，有如砖瓦等建筑材料的烧成，水结冰和冰溶化，食品工业中的冷藏和罐头的蒸煮，各种化学反应等等不一而足，其中无不出热传导的问题．

为此，常用的微分方程自是

$$\rho c_0\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial v}{\partial z}\right) \tag{1.1}$$

其中，ρ——介质的密度，c_0——介质的比热，k——介质的导热系数，v——温度，x、y、z——空间自主变量，t——时间

在物理化学和例如木材的烘干过程中[1][2]，常把k视为介质或介质中某部分介质的扩散系数，从而（1.1）式也可视为扩散运动的微分方程，其中v是扩散介质的浓度．按不同的情况，在热传导和扩散过程中都可出现$k=k(x,y,z,t)$、$k=k(x,y,z)$、$k=k(v)$和$k=k(t)$等特殊情况；对于这些情况，（1.1）式可能得到相应的简化．

在解（1.1）式时，令$k=\text{const}$就已积累了丰硕的探索成果．在处理（1.1）式时，首要的困难在于如何对待k这个相当复杂的物理量[4]．众所共知，例如，在气体、液体、非金属的非晶体介质、非金属的晶体及金属诸合金等等介质里，热导系数k都有其不同的性质；约言之，在气体中，k依温度的升高而变大；在液体中，基本上则是，低温区里的k是依温度的升高而变大，但在高温区里又随温度升高而变小．对于非晶体的非金属介质，k依温度上升而增长．对于非金属的晶体与各种合金，k都依温度的增长而有所下降．

上边所提及的是属于我们平常生活中的温度量级；就此也可提及一个有意义的现象．虽然我们一般尚不会接触到它；那就是在接近绝对零度的区域里，导电阻力是趋于消失，而导热系数却不趋于消失，虽然我们在平常的温度里常能把导电系数和导热系数连系在一个公式里，从而很便利地利用这个公式来间接地测出导热系数，因为直接准确地测量热导系数是非常困难和不经济的．

此外，尚须提及，金属中的杂质能干扰物质的格子结构（the Lattice Structure of Substance）；例如，在 0°C，0.1% 的杂质（impurity）就能使铜、铝、镍及铁的热传导系数约降低 2 % 到 3 %[4]，这就意味着，若在需要时，依现在的工业制造技术能力，我们满能以一定的杂质作用规律来制造一种合金，使其热传导系数能依空间坐标起某个规律的改变以适应多种多样的要求．

二、接近实际情势把热导系数看为依空间起改变的一种设想

在实际中，确实经常出现给求解（1.1）式造成困难的多种情况，其中 k 都不是常量．对待这个困难，人们大半仍用常量去近似的处理，就连相差多少也难估计，因为对于热传导问题，作实验是很困难的，只有"掩耳盗铃"，不了了之．

如图 1 所示的安排在实际中是不罕见的，其中多层具有不同导热系数的平板是被挤紧，俾可消除层间的过渡阻力．

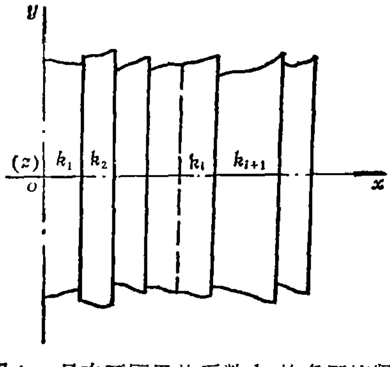

图 1 具有不同导热系数 k_i 的多层挤紧平板，$-\infty\leqslant y\leqslant\infty$；$-\infty\leqslant z\leqslant\infty$．

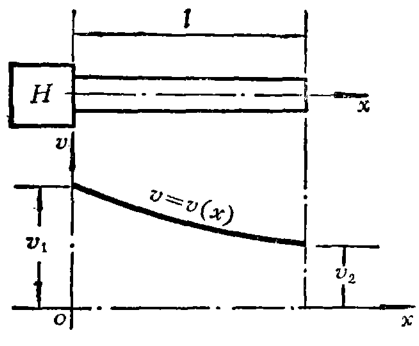

图 2 同一物料，温度沿 x 轴逐渐下降，H 是热源，有一定的幅射损失．

在组合固体[2][5]（Composite Solid）里，各层的导热系数是不同的，它们之间的级别和排列是与隔热绝缘及导热很有关系的，我们在此不深入顾及和讨论，但其间可有一定的规律．对于图 1 所举情况的处理，每多不免繁琐，逐层求解方程 $\rho_i c_i \frac{\partial v_i}{\partial t} = k_i \frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2}$，再配合介质层间的条件

$$v_i = v_{i+1} \text{ 和 } k_i \frac{\partial v_i}{\partial x} = k_{i+1} \frac{\partial v_{i+1}}{\partial x}$$ 去逐层求解[2][3]．

另一种情况是如图 2 所示，沿传热杆的温度逐渐下降．因此可以设想，由于 $v=v(x)$，就必然导致 $k=k(x)$．对于这些经常发生的导热实际，我们也不可再视其中的导热系数是个

常量，例如在轴承中由润滑生热到冷却过程的问题.

总括上面的情况，对于或许尚侧重于物理数学来说，可拟取

$$k=k_0e^{\alpha x}, \qquad (\alpha \gtreqless 0) \tag{2.1}$$

其中 k_0 是个常数，$|\alpha|$ 是个微量，它依材料和其他条件有所改变. 引用 $\alpha \gtrless 0$ 时须依据介质导热系数是随温度增长还是减弱而定. 从而 (1.1) 式可以一般地写成

$$\rho c_0\frac{\partial v}{\partial t}=k_0e^{\alpha x}\left\{\alpha\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\} \tag{2.2}$$

若 α 选择的适当，可能出现实际情况所需要的准确解，也可能出现近似解和定性性的趋势解. 这些解对初步探索非常量导热系数问题还是需要的.

三、特殊微分方程通解的第一部份

在本节里，以木材为例，顺纤维方向的导热系数均约为垂直于纤维方向上的两倍[6]. 我们可以作如图 3 的安排和图 4 的近似连续假设. 对于实线阶梯自然可用组合固体导热法逐层计算，那就非常麻烦，今试改用虚线表示的近似曲线 $k(x)$ 作统体的一次分析，以资省力. 自可基于选择木材以使其密度和比热很接近于常值. 若取 $k=k_0e^{\alpha x}$ 及解型

$$v=\Phi(x)\Psi(t) \tag{3.1}$$

则自 (2.2) 式导得

$$\rho_0c_0\Phi\frac{d\Psi}{dt}=k_0\left\{\frac{d^2\Phi}{dx^2}+\alpha\frac{d\Phi}{dx}\right\}e^{\alpha x}\Psi \tag{3.2}$$

再引进待定常数 λ，就把上式拆成

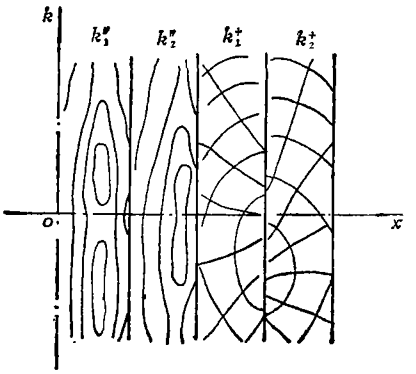

图 3 顺纤维与垂直于纤维木板压紧串列组合. 这种组合也可用人工特制

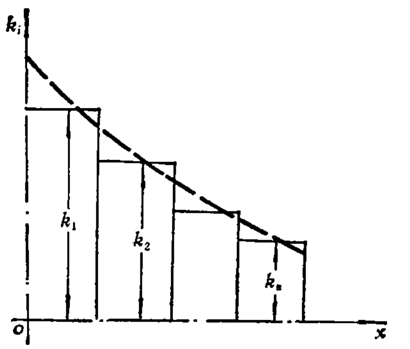

图 4 导热系数依 x 起改变. 虚线表示近似连续的 $k(x)$，实线是阶梯的 $k_i(x)$.

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2\Phi}{dx^2}+\alpha\frac{d\Phi}{dx}+\frac{\lambda}{k_0}e^{-\alpha x}\Phi=0\\&\frac{d\Psi}{dt}+\frac{\lambda}{\rho_0c_0}\Psi=0\end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

尚可把 (3.3) 式的第一式写成

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2}+P\frac{d\Phi}{dx}+Q\Phi=0, \quad P=\alpha, \quad Q=\frac{\lambda}{k_0}e^{-\alpha x} \tag{3.4}$$

为了变换上式的自主变量，可引用$\frac{d\Phi}{dx}=\frac{d\Phi}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$和$\frac{d^2\Phi}{dx^2}=\frac{d^2\Phi}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\frac{d\Phi}{dz}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}$

而得
$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2\Phi}{dz^2}+P_1\frac{d\Phi}{dz}+Q_1\Phi=0\\&P_1=\left(\frac{d^2z}{dx^2}+\alpha\frac{dz}{dx}\right)\Big/\left(\frac{dz}{dx}\right)^2,\ Q_1=\lambda e^{-\alpha x}\Big/k_0\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\end{aligned}\right\}\tag{3.5}$$

为简便计，可选$P_1=0$，亦即$\left(\frac{d}{dx}+\alpha\right)\frac{dz}{dx}=0$，再以$v=\frac{dz}{dx}$而导得$\frac{dz}{dx}=\Omega e^{-\alpha x}$；为方便计可取$\Omega=1$，而用

$$z=-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}\qquad\left(x=0,\ z=-\frac{1}{\alpha};\ x=l,\ z=-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha l}\right)\tag{3.6}$$

从而把（3.4）式的第一式化为

$$\mu z\frac{d^2\Phi}{dz^2}-\Phi=0,\ (\mu=k_0\alpha/\lambda)\tag{3.7}$$

试用级数求解上式，其中按此法的惯用符号$P(z)=0$，$Q(z)=-z/\mu$，$p_0=P(0)=0$，$q_0=Q(0)=0$，从而得指数方程（indicial equation）

$$c^2+(p_0-1)c+q_0=0\tag{3.8}$$

其两根是$c_1=0$，$c_2=1$　据此可取解型

$$\Phi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}g_nz^{n+c},\ g_0\neq0\tag{3.9}$$

从而自（3.8）式推得

$$\mu z\frac{d^2\Phi}{dz^2}-\Phi=(c-1)c\mu g_0z^{c-1}+\sum_{n=1}^{\infty}(n+c-1)(n+c)\mu g_nz^{n+c-1}-\sum_{n=1}^{\infty}g_{n-1}z^{n+c-1}\tag{3.10}$$

于是自上式看清，勿须先选定c或g_0的数值，除保留右边的第一项外，已可使其他诸项全部消失．为此，对于区间$n\geqq1$，我们可先要求$(n+c-1)(n+c)\mu g_n-g_{n-1}=0$，亦即

$$g_n=\frac{g_{n-1}}{(n+c-1)(n+c)\mu},\qquad(n\geqq1)\tag{3.11}$$

从而自可利用

$$g_{n-1}=\frac{g_{n-2}}{\mu(n+c-2)(n+c-1)},\quad g_{n-2}=\frac{g_{n-3}}{\mu(n+c-3)(n+c-2)},\ \cdots\cdots,$$

而得

$$\left.\begin{aligned}&g_n=\frac{g_0}{\mu^nA_{n+c}A_{n+c-1}},\qquad(n\geqq1)\\&A_{n+c}=(n+c)(n+c-1)(n+c-2)\cdots(c+2)(c+1)c\\&A_{n+c-1}=(n+c-1)(n+c-2)(n+c-3)\cdots(c+1)c(c-1)\end{aligned}\right\}\tag{3.12}$$

于是我们就借助于（3.9）式的拟设而推出了通解的第一部份

$$\Phi_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g_0}{\mu^n A_{n+c}A_{n+c-1}}z^{n+c} \tag{3.13}$$

四、本问题通解的第二部份

由于微分方程是二阶的，其解应有两个积分常数，因此我们尚须求其通解的第二部分．自（3.10）式看出，对于函数

$$\Phi_1=g_0z^c+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_0}{\mu^n A_{n+1}A_{n+c-1}}z^{n+c}$$

我们就可写出

$$\mu z\frac{d^2\Phi_1}{dz^2}-\Phi_1=(c-1)c\mu g_0 z^{c-1} \tag{4.1}$$

关系（3.13）显示，我们现在尚不能选定 $c=1$，因为因子（$c-1$）出现于级数 Φ_1 的分母的一些项里；但我们满可以用（$c-1$）h 来代替任意常数 g_0，其中 h 是另一个常数．这样就能把级数分母中的烦麻因子（$c-1$）消掉．此外，可改用 Φ_c 代替原来的 Φ_1，以示区别，从而（4.1）式可写成

$$\mu z\frac{d^2\Phi_c}{dz^2}-\Phi_c=(c-1)^2c\mu h z^{c-1} \tag{4.2}$$

显然，上式右边的式值有一个双零解 $c=1$；并因我们又能有 $\frac{\partial}{\partial c}z^c=z^c\log z$，从而

$$\mu z\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{\partial\Phi_c}{\partial c}\right)-\frac{\partial\Phi_c}{\partial c}=\mu h(c-1)z^{c-1}\{3c-1+(c-1)c\log z\} \tag{4.3}$$

所以 $(\Phi_c)_{c=0}$ 或 $(\Phi_c)_{c=1}$ 和 $\left(\frac{\partial\Phi_c}{\partial c}\right)_{c=1}$ 都是原微分方程 $\mu z\frac{d^2\Phi}{dz^2}-\Phi=0$ 的解．

现在让我们前进寻找新解

$$\Phi_1=\left(\frac{\partial\Phi_c}{\partial c}\right)_{c=1} \tag{4.4}$$

的确切结构；为此，我们可先把

$$\Phi_c=(c-1)hz^c+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(c-1)h}{\mu^n A_{n+c}A_{n+c-1}}z^{n+c}$$

改写成

$$\Phi_c=(c-1)hz^c+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{hz^{n+c}}{\mu^n A_{n+c}A'_{n+c-1}}$$

其中

$$A'_{n+c-1}=\frac{A_{n+c-1}}{c-1}=(n+c-1)(n+c-2)(n+c-3)\cdots(c+1)c$$

从而，就已经把出现在分母里的因子（$c-1$）消除了．于是先导得

$$\frac{\partial \Phi_c}{\partial c}=\Phi_c \log z+hz+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{hz^{n+c}}{\mu^n}\frac{\partial}{\partial c}\left[\frac{1}{A_{n+c}A'_{n+c-1}}\right]$$

更由于

$$\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{A_{n+c}A'_{n+c-1}}\right)=-\frac{A'_{n+c-1}\dfrac{\partial}{\partial c}A_{n+c}+A_{n+c}\dfrac{\partial}{\partial c}A'_{n+c-1}}{A^2_{n+c}A'^2_{n+c-1}}$$

$$\frac{\partial}{\partial c}A_{n+c}=\left(\frac{1}{n+c}+\frac{1}{n+c-1}+\frac{1}{n+c-2}+\cdots+\frac{1}{c+2}+\frac{1}{c+1}+\frac{1}{c}\right)A_{n+c}$$

$$\frac{\partial}{\partial c}A'_{n+c-1}=\left(\frac{1}{n+c-1}+\frac{1}{n+c-2}+\frac{1}{n+c-3}+\cdots+\frac{1}{c+2}+\frac{1}{c+1}+\frac{1}{c}\right)A'_{n+c-1}$$

$$\lim_{c=1}A_{n+1}=(n+1)!,\quad \lim_{c=1}A'_{n+c-1}=n!$$

$$H_{n+1}=\lim_{c=1}\left(\frac{1}{n+c}+\frac{1}{n+c-1}+\frac{1}{n+c-2}+\cdots+\frac{1}{c+1}+\frac{1}{c}\right)=\sum_{n=0}^{n}\frac{1}{n+1}$$

$$H_n=\lim_{c=1}\left(\frac{1}{n+c-1}+\frac{1}{n+c-2}+\frac{1}{n+c-3}+\cdots+\frac{1}{c+1}+\frac{1}{c}\right)=\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{n}$$

所以肯定

$$\left[\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{A_{n+c}A'_{n+c-1}}\right)\right]_{c=1}=-\frac{H_n+H_{n+1}}{n!\,(n+1)!}$$

于是导得

$$(\Phi_c)_{c=1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h}{\mu^n(n+1)!\,n!}z^{n+1}$$

$$\Phi_2=\left(\frac{\partial \Phi_c}{\partial c}\right)_{c=1}=\log z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{hz^{n+1}}{\mu^n(n+1)!\,n!}+hz-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n+H_{n+1}}{\mu^n(n+1)!\,n!}hz^{n+1}$$

或归集成

$$\Phi_2=h\left\{z+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log z-H_n-H_{n+1}}{\mu^n(n+1)!\,n!}z^{n+1}\right\} \tag{4.5}$$

五、本 文 课 题 的 通 解

经过前几节的分析，于是可写出本课题的通解如下：

$\Phi=(\Phi_1)_{c=1}+\Phi_2$

$$=g_0\left\{z+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{\mu^n A_{n+1}A_n}\right\}+h\left\{z+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log z-H_{n+1}-H_n}{\mu^n(n+1)!\,n!}z^{n+1}\right\} \tag{5.1}$$

再利用 $g_0=h(c-1)$，则自

$$\Phi_1 = h(c-1)z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h}{\mu^n A_{n+c} A'_{n+c-1}} z^{n+c}$$

$$(A_{n+c})_{c=1} = [(n+c)(n+c-1)\cdots(c+1)c]_{c=1} = (n+1)!$$

$$(A'_{n+c-1})_{c=1} = [(n+c-1)(n+c-2)\cdots(c+1)c]_{c=1} = n!$$

就可导得

$$(\Phi_1)_{c=1} = (\Phi_c)_{c=1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{hz^{n+1}}{\mu^n (n+1)!n!} \tag{5.2}$$

从而有通解 $\Phi = A(\Phi_1)_{c=1} + B\Phi_2$

$$\Phi = A\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{\mu^n(n+1)!n!} + B\left[z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log z - H_n - H_{n+1}}{\mu^n(n+1)!n!} z^{n+1}\right] \tag{5.3}$$

曾把 h 并入常数 A 和 B 之内了.

最后，由 $d\Psi/dt + \lambda\Psi/\rho c_0 = 0$ 解得

$$\Psi = De^{-\lambda t/\rho c_0} \tag{5.4}$$

D 是积分常数. 于是获得通解

$$v(z,t) = \Phi(z)\Psi(t)$$

$$= D\left\{A\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{\mu^n(n+1)!n!} + B\left(z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log z - H_n - H_{n+1}}{\mu^n(n+1)!n!} z^{n+1}\right)\right\} \cdot e^{-\lambda t/\rho c_0}$$

$$(z = -e^{-\alpha x}/\alpha) \tag{5.5}$$

六、用边界条件推算常数λ

在本节里，我们取一简例来推求待定常数λ，为此，取物体的几何形状是：$0 \leqslant x \leqslant l$，$-\infty \leqslant y \leqslant \infty$，$z$ 可以是任意的，但其两端平面是绝热的，边界条件和起始条件是

$$\left.\begin{aligned} v(x,0) &= F(x) \\ v(0,t) &= v(l,t) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{6.1}$$

于是，当 $t=0$，则自 (5.5) 式得出

$$v(z,0) = D\left\{A\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{\mu^n(n+1)!n!} + B\left(z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log z - H_n - H_{n+1}}{\mu^n(n+1)!n!} z^{n+1}\right)\right\} \tag{6.2}$$

由于当 $x=0$，$z=-1/\alpha$，$v(0,0)=0$，所以自

$$0 = A\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1/\alpha)^{n+1}}{\mu^n(n+1)!n!} + B\left[-1/\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(-1/\alpha) - H_n - H_{n+1}}{\mu^n(n+1)!n!} (-1/\alpha)^{n+1}\right]$$

得出

$$\frac{A}{B} = \frac{-\dfrac{1}{\alpha} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(-1/\alpha) - H_n - H_{n+1}}{\mu^n(n+1)!n!}\left(-\frac{1}{\alpha}\right)^{n+1}}{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1/\alpha)^{n+1}/\mu^n(n+1)!n!} \tag{6.3}$$

再由于当 $x=l$, $z=-e^{-\alpha l}/\alpha$, $v(l, 0)=0$，从而导得

$$A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-e^{-\alpha l}/\alpha)^{n+1}}{\mu^n(n+1)!n!}+B\left[-\frac{e^{-\alpha}}{\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log(-e^{-\alpha l}/\alpha)-H_n-H_{n+1}}{\mu^n(n+1)!n!}\left(-\frac{e^{-\alpha l}}{\alpha}\right)^{n+1}\right]=0 \quad (6.4)$$

把 (6.3) 式和 (6.4) 式合并，即得

$$\left\{-\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log\left(-\frac{1}{\alpha}\right)-H_n-H_{n+1}}{\mu^n(n+1)!n!}\left(-\frac{1}{\alpha}\right)^{n+1}\right\}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-e^{-\alpha l}/\alpha)^{n+1}}{\mu^n(n+1)!n!}$$

$$+\left\{-\frac{e^{-\alpha l}}{\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log\left(-\frac{e^{-\alpha l}}{\alpha}\right)-H_n-H_{n+1}}{\mu^n(n+1)!n!}\left(-\frac{e^{-\alpha l}}{\alpha}\right)^{n+1}\right\}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1/\alpha)^{n+1}}{\mu^n(n+1)!n!}=0$$

(6.5)

在上式里，$\mu=k_0\alpha/\lambda$，λ 值就在式中．虽然 (6.5) 式相当冗杂，但由于其各项的分母中有 $(n+1)!n!$，所以级数收敛很快，从而就在不太大的 n 之下，解出 λ 值的近似解．据此，本文课题的解就可完成，当然，数字运算可能是相当大量的．

参 考 文 献

1. Moelwyn-Hughes, E. A., *Physical Chemistry*, Pergamon-Press, Oxford, (1961).
2. Ingersoll, L. R., Zobel, O.J. and Ingersoll, A. C., *Heat Conduction*, The University of Wisconsin Press. (1954).
3. Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C., *Conduction of Heat in Solids*, Oxford. (1948).
4. Jakob, M., *Heat Transfer*, I, John Wiley & Sons, I. C., (1950).
5. Pfriem, H., Beitrag zur Theorie der Wärmeleitung bei bei periodisch verschiedener (quasistationärer) Temperaturfelder, Ing-Archiv, 1935, Ⅵ. Band.
6. "Hütte" des Ingenieurs Taschenbuch, 26 Auflage, P 494

Heat Conduction Problem for Tightly Compressed Adjacent Layers of Plane Plates with Gradually Varying Heat Conduction Coefficients

Liu Hsien-chih

(Shantung Institute of Technology, Jinan)

Abstract

According to the conventional usage, in dealing with the heat conduction problem fo. composite blocks with many tightly compressed plate layers of different heat conduction coefficients, we solve them layer by layer but submitting to the intermediate heat transfer requirements As well-known, this method is rather a tedious and annoying manipulation

In the present paper, we have considered such heat conduction coefficients instead of varying abruptly but gradually from layer to layer in order to make it possible to treat such problem as a whole even though in some cases it is inevitable to yield only approximate results This defect may be offsetted by the time saving gain, since the heat conduction problem is anyhow in most cases unable to obtain very satisfactory accuracy