应用数学和力学，第1卷第1期（1980年5月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆交通学院出版

变分转化分析(I)

吴学谋 （武汉中国科学院数学物理研究所）

（1979年11月1日收到）

摘　要

本文从转化的观点讨论算子变分，提出了一些新的概念，揭示了一些新的联系。有关的问题与概念有：凸算子，互易集与互易原理，H广义解，算子微分方程等。

变分原理与变分方法是数学、力学、物理与控制理论的许多问题的分析的一种基本概念与方法。变分关系的转化则是这些原理与方法中最基本的形式与过程，对转化关系的进一步分析有助于揭示一些更内在的联系。本文从转化的观点来分析算子变分的一些性质，提炼了一些新的概念，推广了古典变分法与非线性泛函分析的一些结果，包括一类算子微分方程的解法以及在传统泛函形式下未述及的一些内容。

一、算子变分的一些转化关系

非线性泛函已把微积分的许多概念与结果推广于非线性算子（见[1，2，5，6]），为变分原理与变分方法的算子形式的研究提供了基础。下面研究一些新的形式。

线性空间可以不同的方式引入拓扑结构、距离度量或范数，例如可用有限备的半序线性空间或Riesz空间的元素（族）来刻划邻近、距离或范数[3,4]，因而对一般线性空间之间的算子可按传统非线性泛函的方式定义弱微分（Gateaux型微分），微分（强微分，Fréchet型微分），导数和各阶广义算子变分（Fréchet广义变分，见[2]，291页）。

设E_x，E_y为赋半序范线性空间，$B\subset E_x$为一开集或区域，f：$B\to E_y$，$x_0\in B$，$h_i\in E_x$，$h\in E_x$，则用$D^nf(x_0,\ h_1,\ \cdots,\ h_n)$，$d^nf(x_0,\ h_1,\ \cdots,\ h_n)$，$f^{(n)}(x_0)$，$\delta_h^nf(x_0)$分别表示$n$阶弱微分，$n$阶微分，$n$阶导算子，$n$阶（广义的）算子变分，它们都是一些（可能很复杂的新型的）算子，例如$f^{(n)}(x_0)$：$B'\to E_y$，是线性的，$B'\subset E_x^n$，等等。已知当微分存在时，弱微分与变分也存在，而且三者相等。对于Banach空间，弱微分存在并连续，则微分存在[6]。导算子一般也有强弱之分，但据上面所述，在不太强的条件下，它们大都相等。若强的$f^{(n)}(x_0)$存在，则有

$$d^nf(x_0,\ h,\ \cdots,\ h)=D^nf(x_0,\ h,\ \cdots,\ h)=\delta_h^nf(x_0)=f^{(n)}(x_0)h^n$$

这里$h^n=(h,\ \cdots,\ h)\in E_x^n$是$h$的$n$重组合。驻值点$x_0$分几种情况：$Df(x_0,\ h)=\theta_y$，$df(x_0,\ h)=\theta_y$，$\delta_hf(x_0)=\theta_y$，$f'(x_0)=\theta_{xy}$，分别叫做（相对于$h$）弱驻值、强驻值、变分驻值、导驻值。在不加区分时，简称驻值，这里θ_y是E_y的零点，θ_{xy}是E_{xy}的零点，而E_{xy}是由E_x到E_y的线性算子形成的线性（赋范或赋半序范）空间。

当 E_y 本身是半序线性空间（例如Riesz空间，见[2,3]）时，若存在 $\varepsilon>0$，对 $|\lambda|<\varepsilon$，有 $f(x_0+\lambda h)\geqslant f(x_0)$（相应地 $f(x_0+\lambda h)\leqslant f(x_0)$），则称算子 f 在 $x=x_0$ 处具有相对于 h 的局部极小（极大）。极大与极小混称极值。这时可以把古典极值原理与非线性泛函的极值原理（它们都限于泛函）推广于下。

算子极值原理　若 E_x 为赋半序范空间或线性拓扑空间，E_y 为 Riesz 空间，$B\subset E_x$ 为某一集合，f：$B(x_0,\ \varepsilon_0)=\{x_0+\lambda h|h\in B,\ |\lambda|<\varepsilon_0\}\to E_y$，当 $Df(x_0,\ h)$ 存在时，为了 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处具局部极值（相对于 h 或 B），必须它是 f 的弱驻值点（相对于 h 或 B），而当 $\delta_h^2 f(x_0)$ 存在时，为了 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处具局部极小（极大，相对于 h 或 B），必须 $\delta_h^2 f(x_0)\geqslant 0$（相应地 $\leqslant 0$）。□

证法类似于古典分析及非线性泛函的作法，主要要求在 E_y 中 λy 是保序的，并由 $a\geqslant b$，$b\geqslant a$ 导致 $a=b$，同时要求 E_y 有极限概念，而 E_y 为 Riesz 空间正合乎这些要求。算子极值原理除把泛函推广于算子外，并提出 h 与 B 的相对性，这有利于条件极值问题的分析。

若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，即 $f'(x_0)$ 存在，则由算子极值原理知 x_0 成为局部极值点（相对于 B）的必要条件是 $f'(x_0)h=\theta_y$，$h\in B$，若 B 使得 $g\in E_{xy}$ 由 $g(x)=\theta_y$，$x\in B$，导致 $g\equiv\theta_{xy}$，则称 B 为完全的，这时有

变分转化关系（Ⅰ）　若 E_x 为赋半序范空间或线性拓扑空间，E_y 为 Riesz 空间，$B\subset E$ 为完全集，f：$B(x_0,\ \varepsilon_0)\to E_y$，$f'(x_0)$ 存在。若 f 于 x_0 处为局部极值点，它必是弱驻值点、强驻值点和导驻值点。□

因此极值问题和变分问题 $\delta_h f(x_0)=\theta_y$ 以广义的 Euler—Lagrange 方程 $f'(x_0)=\theta_{xy}$ 为必要条件。这一结果统一概括了古典微分学与变分学的有关定理。

对于一般的线性拓扑空间或赋半序范空间 E_y，$f'(x)$ 存在时，定义互易算子 $f_*(x)=f_*(x,\ a)=f(x)-f'(x)(x-a)$，$a\in E_x$，对于 $M\subset E_x$，满足关系 $f'(x)M=\theta_y$ 的 x 形成的集 $M_*=M_*(f)=\{x|f'(x)h=\theta_y,\ h\in M\}$ 叫做 M 相对于 f 的互易集，互易算子与互易集的概念并不依赖于 E_y 有否序结构，而只要有一定的拓扑结构或收敛概念使 $f'(x)$ 有意义即可。

变分转化关系（Ⅱ）（驻值互易原理）　若 f：$B(x_0,\ \varepsilon_0)\to E_y$ 于 x_0 处对 B 取弱驻值，而 $x_0-a\in B$，则 $x_0\in B_*(f)$，并且 $f_*(x_0)=f(x_0)$。若 f' 在 x_0 处的 h 方向连续，并且这方向上的 x_0 邻域属 $B_*(f)$，则 x_0 是 f_* 的相对于 h 的弱驻值点。□

证明　因 $Df(x_0,\ k)=\theta_y$，$k\in B$，而 $x_0-a\in B$，故 $Df(x_0,\ x_0-a)=\theta_y$，$x_0\in B_*(f)$，因此 $f'(x_0)(x_0-a)=\theta_y$，所以这时由互易算子的定义得 $f_*(x_0)=f(x_0)$，另外

$$\frac{f_*(x_0+\lambda h)-f_*(x_0)}{\lambda}=\frac{f(x_0+\lambda h)-f(x_0)}{\lambda}-f'(x_0+\lambda h)h$$
$$-f'(x_0+\lambda h)(x_0-a)/\lambda$$

由于对充分小的 λ，$x_0+\lambda h\in B_*(f)$，而 $x_0-a\in B$，故根据互易集的定义得知上式右边最后一项为 θ_y，而当 $\lambda\to 0$ 时，右边第一项变为 $Df(x_0,\ h)$，而第二项则变为 $-f'(x_0)h$，即 $-Df(x_0,\ h)$，所以得到关系式 $Df_*(x_0,\ h)=\theta_y$，证毕。

实际上 f_* 也是相对于任何 αh，$|\alpha|<\infty$，于 x_0 取弱驻值。若 $\{\alpha h\}$ 形成完全集，则 x_0 是 f_* 的导驻值点：$f_*'(x_0)=\theta_{xy}$，简单说，变分转化关系（Ⅱ）指出，算子的相对驻值与互易算子对互易集的驻值相同，这是古典变分互易定理的一种推广，这里不必考虑序结构，而且是对算子来分析的，但失掉了极值的互易性（极大与极小的相反性）。

若 E_y 有半序结构，f 的定义域为凸的，并且 f' 存在，当$f(x)\geqslant f(x')+f'(x')(x-x')$成立时，称算子 f 为凸的。凸算子的另一定义是条件

$$f(\alpha x+(1-\alpha)x')\leqslant \alpha f(x)+(1-\alpha)f(x'),\quad 0\leqslant\alpha\leqslant 1$$

这时可证 f 在任意点沿任何方向能弱微分，这条件又导致 $f(x)\geqslant f(x')+Df(x',\ x-x')$，它也可作为凸算子的一种定义。当导算子存在时三定义等价。

若 E_x 为线性拓扑空间，E_y 为局部凸线性拓扑空间，则 Taylor 公式是成立的：

设 B 在 E_x 中为开集，$x+\lambda h\in B$，$0\leqslant\lambda\leqslant 1$，若对于 f：$B\to E_y$，$f^{(n)}$存在并连续，则

$$f(x+h)=f(x)+\frac{f'(x)h}{1!}+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x)h^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$+\int_0^1\frac{(1-\lambda)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x+\lambda h)h^n d\lambda$$

当E_x，E_y 为Banach 空间时，Taylor 公式的论述见[5]及有关著作，其证明一是要保证$f^{(n)}$能定义并可赋予有关性质（例如连续性），另一是要求 E_y 有足够多的线性泛函的存在，这涉及 Hahn Banach 定理的推广，而上述关于 E_x，E_y 的条件正满足要求。

当E_x，E_y满足 Taylor 公式成立的要求时，若算子 f 二阶导存在连续，并且对任何h，$f''(x+\lambda h)h^2\geqslant 0$，$0\leqslant\lambda\leqslant 1$，则 f 必是凸算子。这由 Taylor 二级展开中积分项$\geqslant 0$即知。

变分转化关系（Ⅲ）（极值互易原理） 若E_x为赋半序范空间或线性拓扑空间，E_y 为 Riesz 空间，f：$D\to E_y$ 为凸，D 为 E_x 中凸开集，设B 为 E_x 中某子集，则对 $x_*\in B_*(f)$，$x\in B+x_*$有$f(x)\geqslant f(x_*)$，因而x_*必是 f 在 $B+x_*$ 中的最小点。若 $x_*\in B_*(f)$，$x\in B+a$，则必 $f(x)\geqslant f_*(x_*)$。若 x_0 是 f 相对于 $x\in B+a$ 的极值点，则必 $x_0\in B_*(f)$，并且是f 在 $B+a$ 中的极小点，是 f 在$B_*(f)$中的极大点：$f(x)\geqslant f(x_0)=f_*(x_0)\geqslant f_*(x_*)$。□

$f(x_0)=f_*(x_0)$来自变分转化关系（Ⅱ）。$f(x)\geqslant f(x_*)$来自凸性定义和 $B_*(f)$的定义。极值点必是极小点，这来自极值点属 $B_*(f)$而后利用$f(x)\geqslant f(x_*)$的关系，而$x_0\in B_*(f)$则由 f 的极值性导出。$f(x)\geqslant f_*(x_*)$来自 $f(x)\geqslant f(x_*)+f'(x_*)(x-x_*)$，最后一项为 $f'(x_*)(x-a)-f'(x_*-a)$，当$x_*\in B_*(f)$，$x-a\in B$时$f'(x_*)(x-a)=\theta_y$。证毕。

古典互易定理一般限于有限维空间或 Hilbert 空间，而且 B 限于有限维子空间。互易集概念的引用，更加简明地披露一些内在关系。

设 E_x，E_y 为赋半序范空间或线性拓扑空间，H：$E_x^2\to E_y$ 称为对称线性的是指 $H(x,\ x')=H(x',\ x)$，$H(\alpha x_1+\beta x_2,\ x')=\alpha H(x_1,\ x')+\beta H(x_2,\ x')$，并且 H 对各分量是连续的。设$B\subset E_x$，A：$B\to E_x$称为齐次可加的，指$A(x_1+x_2)=Ax_1+Ax_2$，$A(\lambda x)=\lambda Ax$，λ为系数域之元素。称A对H为对称的，若 $H(Ax,\ x')=H(x,\ Ax')$。

变分转化关系（Ⅳ） 设E_x，E_y 如上述，H为对称线性，A为齐次可加并对H对称，则对

$$f(x)=H(Ax,\ x)-2H(g,\ x)+g_0:\ B\to E_y$$

有

$$\delta_h f(x)=Df(x,\ h)=2H(Ax-g,\ h)=f'(x)h$$

因而若 x_0 为 f 对 h 之驻值，$\delta_h f(x_0)=\theta_y$，则 x_0 是方程$Ax=g$ 的 H广义解：$H(Ax-g,$

$h)=\theta_y$，反之亦然。□

实际上，经简单计算，$f(x+\lambda h)-f(x)=2\lambda H(Ax-g,h)+\lambda^2 H(Ah,\ h)$。当 E_y 为 Riesz 空间时，算子 A 称为对 H 正定的，若 $H(Ax,\ x)\geqslant \alpha H(x,\ x)$，这里 $\alpha>0$ 为常数。当 $\alpha=0$ 时称 A 为对 H 为正的。

这时容易证得

变分转化关系(Ⅳ*)　在(Ⅳ)条件下

$$f_*(x)=2H(Ax-g,\ a)-H(Ax,\ x)+g_0$$

而当 A 对 H 为正算子时，$f(x)$即为凸算子，因而对 f 与 f_* 可用驻值或极值互易原理。□

证明　因 $f_*(x)=f(x)-\delta_h f(x)$，$h=x-a$，故

$$\begin{aligned}f_*(x)&=H(Ax-2g,\ x)-H(2Ax-2g,\ x-a)+g_0\\&=2H(Ax-g,\ a)-H(Ax,\ x)+g_0。\end{aligned}$$

另外，若A为正，则$H(A(x+x'),\ x+x')\geqslant 0$

展开得

$$H(Ax,\ x)+H(Ax',\ x)+H(Ax,\ x')+H(Ax',\ x')\geqslant 0$$

因此

$$H(Ax'-2g,\ x')\geqslant H(Ax-2g,\ x)+H(2Ax-2g,\ x'-x)$$

因此有 $f(x')\geqslant f(x)+Df(x,\ x'-x)$，故 f 为凸算子。证完。

对 f 和 f_* 用驻值互易原理和极值互易原理得知下列定理成立。

定理 1　设 E_x，E_y为赋半序范空间或线性拓扑空间，H：$E_x^2\to E_y$ 为对称线性，A：$D\to E_x$ 为齐次可加，$D\subset E_x$。当 x_0 是 $Ax=g$ 对 $h\in K$ 的 H 广义解时，则 x_0 是 $f(x)=H(Ax-2g,\ x)+g_0$ 对$x\in K(x_0,\ \varepsilon_0)$的驻值点，也是$f_*(x)=2H(Ax-g,a)-H(Ax,x)+g_0$ 对 $x\in B_*(f)$的驻值点，这里 $B=K(x_0,\ \varepsilon_0)-a$. 反之，若 x_0 是 $f(x)$ 对 $x\in K(x_0,\ \varepsilon_0)$的驻值点，则必是$f_*(x)$对 $x\in B_*(f)$的驻值点，而且是 $Ax=g$ 对于 $h\in K$的H广义解。在所有情况都有 $f(x_0)=f_*(x_0)$。□

定理 2　E_x，E_y等如定理 1，并且 E_y 为 Riesz空间。设A对H为正。当 x_0 是 $Ax=g$ 对 $h\in K$ 的H广义解时，则 x_0 是 $f(x)$对 $x\in K(x_0,\ \varepsilon_0)$的极小点，也是$f_*(x)$对 $x\in B_*(f)$的极大点，并对任何 $x\in B+a$，$x_*\in B_*(f)$有 $f(x)\geqslant f(x_0)=f_*(x_0)\geqslant f_*(x_*)$。反之，若 x_0 是 $f(x)$对$x\in K(x_0,\ \varepsilon_0)$的驻值或极值点，则必是$f(x)$的相对极小点和 $f_*(x)$在 $x\in B_*(f)$中的极大点，同时是方程 $Ax=g$ 对 $h\in K$ 的 H 广义解，并有不等式 $f(x)\geqslant f(x_0)=f_*(x_0)\geqslant f_*(x_*)$，这里 $x\in K(x_0,\ \varepsilon_0)$，$x_*\in B_*(f)$。□

这些结果是传统二次泛函变分定理[7]的推广。由于在传统工作中A的正性与 f 的凸性的关系没有得到揭示，所以，即使对 Hilbert 空间的二次泛函，这里的结果也比传统的定理包含更多的内容。

有限单元法的基础是 Ritz 方法，其推广则是 Галёркин 方法，而 $Ax=g$ 相对于$h\in K$的H广义解的概念可看成 Галёркин 方法进一步的推广，定理 1 与定理 2 揭示了这种广义的 Галёркин 方法与变分原理的联系。

二、偏变分与Noether型定理

可以按通常的方式引入偏变分、偏微分、偏导算子的概念，例如若 $(x_1,\ x_2)$ 在开集直

积$U_1\times U_2$中，固定x_2，f：$U_1\times U_2\to E_y$就转化成一个变量x_1的算子，f_1：$U_1\to E_y$，叫偏算子，它以x_2为参量，这时的变分即为偏变分。若$U_i\subset E_{x_i}$，则偏导算子f_1'：$U_1\times U_2\to E_{x_1y}$，$E_{x_1y}$表示$E_{x_1}\to E_y$的线性算子族。类似说法见[5]。

对于空间E_{x_i}，E_y，一般要求是赋半序范空间或线性拓扑空间或Banach空间，当要用到序关系时，一般我们要求是Riesz空间。映射或算子的n阶导存在并连续则称属于$C^{(n)}$类。

记$E_x=E_x'\times E_x''$，$E_x'=E_{x1}'\times\cdots\times E_{xn}'$，$E_x''=E_{x1}''\times\cdots\times E_{xm}''$，$h=(h',\ h'')\in E_x$，$h'=(h_1',\ \cdots,\ h_n')\in E_x'$，$h''=(h_1'',\ \cdots,\ h_m'')\in E_x''$，$h_i'\in E_{xi}'$，$h_j''\in E_{xj}''$．$U=U'\times U''$，$U'=U_1'\times\cdots\times U_n'$，$U''=U_1''\times\cdots\times U_m''$，其中$U_i'\subset E_{xi}'$，$U_j''\subset E_{xj}''$为开集。$f$：$U\to E_y$，相应的全变分与偏变分记为$Df(x,\ h)$，$D'f(x,\ h')$，$D''f(x,\ h'')$，$D_i'f(x,\ h_i')$，$D_j''f(x,\ h_j'')$．

变分转化关系（Ⅴ） $f\in C^{(p)}$的充要条件是其偏映射（即一部分分量固定的映射）属$C^{(p)}$．另外

$Df(x,\ h)=D'f(x,h')+D''f(x,\ h'')=\sum\limits_i D_i'f(x,\ h_i')+\sum\limits_j D_j''f(x,h_j'')$因而$Df(x,\ h)=\theta_y$，$D'f(x,\ h')=\theta_y$，$D''f(x,\ h'')=\theta_y$三者泛等价，即其中之一成立，其余二者相互等价。□

证明的方法类似多变量微分学的处理，类似说法见[5]第8页。但是从算子变分的观点来看，关系（Ⅴ）可看成传统的Noether定理的一种模型，后者是一系列力学与物理问题分析的有力工具。$Df(x,\ h)=\theta_y$相当于无穷小对称变换下的不变性，它包括场分量的变换与基底空间的变换的不变性，前者相当于Euler-Lagrange方程，相当于$D'f(x,\ h')=\theta_y$，而后者相当于一种守恒律$D''f(x,\ h'')=\theta_y$，只不过对具体问题表现形式更确切一些。

设一个物理系统的描述可由函数系$\varphi_i(x)$给出，叫做场分量。x的变域是m维空间中的集合，叫基空间，若场方程能由作用的变分原理导出：$D'f(x,\ h')=\theta_y$，$f(\varphi)=\int_D L(\varphi,x)dx$，$L$为Lagrange函数，$D$为基空间中的某一区域，$\varphi$是$\varphi_i$的一些偏导数的组合。当$\varphi_i$直到$p-1$阶导数的变分在$D$之边界为零，$p$是$\varphi$中涉及的最高导数的阶，则利用分部积分法可以使得

$$Df(\varphi,\delta\varphi)=\int_D\sum\ [L]_i\delta\varphi_i dx=0$$

当诸φ_i为动力变量时，上式导致$[L]_i=0$，后者即为场的本构方程或运动方程，也即Euler-Lagrange方程，是$f'(\varphi)=0$的另一种形式。

在对称变换中不只由φ变到$\varphi+\delta\varphi$，而且基空间变量x也变到$x+\delta x$。若它们均有l个无穷小参数$\delta\varepsilon^k(k=1,\ \cdots,\ l)$，$\delta x_j=\sum A_k^j\delta\varepsilon^k$，$\delta\varphi_i=\sum B_{ik}\delta\varepsilon^k$，这时$f(\varphi)$变成$f(\varphi,\ x)$了，记$u=(\varphi,\ x)$，则经过计算有

$$Df(u,\delta u)=\int_D\{\sum[L]_i\delta\varphi_i+\sum(L)_k\delta\varepsilon^k\}dx$$

这里$(L)_k$是L，A_k^j，B_{ik}，φ_i及其偏导数的某种组合：

$$(L)_k=\sum_j\frac{\partial}{\partial x_j}P_k^j,\quad P_k^j=LA_k^j-\sum_i F_i\partial L/\partial(\partial\varphi_i/\partial x_j)$$

$$F_i=\sum_{\sigma} A_k^{\sigma}(\partial\varphi_i/\partial x_{\sigma})-B_{ik}$$

详细计算见[8]等。但是这些结果可导出以古典的 Noether 定理为特例的变分关系，它是与（V）相似的：

变分转化关系(Ⅴ*) 在前述条件下，$Df(u,\ \delta u)=0$，$\{[L]_i=0\}$，$\{(L)_k=0\}$ 三者泛等价。□

$(L)_k=0$ 一般可转化成某些守恒律。在这类Euler-Lagrange 方程与守恒律的推导中，与关系(Ⅴ)中不同的在于h'或h''的分量之间有微积关系，因而可利用分部积分而归约为相对少的分量。这是特殊形式的变分问题有利于具体深化的结果。

关系(Ⅴ)(Ⅴ*)从某种意义讲是全变分与偏变分的关系，是形系统的极值与影系统的极值的关系。类似的变分转化关系有泛系分析中的优化投影原理[9,10]，它描述了形系统的优化以一定的影系统的优化为必要条件，由它可以概括自动控制的 Понтрягин 原理与 Bellman 原理。

三、赋 范 环 微 积

可交换的 Banach 代数叫赋范环（见[2]），其中的变分与微分有一些特别有意义的性质。

设E_x为赋范环，其到自身的线性算子空间E_{xx}可以在E_x中表示，类似地，$E_{xx\cdots x}$（下标排n次可简记为E_{x^n}）也可在E_x中表示，正如普通的乘法起到算子的作用一样。这时，若f：$E_x\to E_x$或f：$D\to E_x$，$D\subset E_x$为开集，$f^{(n)}(x_0)$存在时，它仍可看成E_x中的元素（在同构的意义下），而对$h\in E_x$，h^n也属于E_x，指数n可看成乘法的归约，也可看成（$h,h,\cdots,h$）$\in E_x^n$。因而$f^{(n)}(x_0)h^n$就是E_x中的乘积，它代表$\delta_h^n f(x_0)$，$D^n f(x_0,\ h,\ \cdots,h)$，或$d^n f(x_0,\ h,\ \cdots,\ h)$（后二者也可写成$D^n f(x_0,\ h^n)$和$d^n f(x_0,\ h^n)$）。

设E_x为自由的，其基记为$u(i)$。定义

$$\Delta_i f(x)=Df(x,u(i))=\lim_{\lambda\to 0}[f(x+\lambda u(i))-f(x)]/\lambda$$

$$\Delta_{ij}^2 f(x)=\Delta_i g(x),\qquad g(x)=\Delta_j f(x)$$

类似定义Δ_σ^n，σ是$i\in I$的某一n组排列$\sigma=i_1i_2\cdots i_n(i_l\in I)$．并记$u(\sigma)=u(i_1)u(i_2)\cdots u(i_n)$。

在E_x中的曲线及曲线积分按传统非线性泛函分析方式定义（见[6]§2)。

变分转化关系(Ⅵ) 设σ，σ^*为任二n元排列，σ，$\sigma^*\in I^n$，$f^{(n)}(x)$存在，则

$$u(\sigma^*)\Delta_\sigma^n f(x)=u(\sigma)\Delta_{\sigma^*}^n f(x)=f^{(n)}(x)u(\sigma\sigma^*)=f^{(n)}(x)u(\sigma^*\sigma)$$

因而要解算子方程组 $Q_t f(x)=\theta_x$，$Q_t=\sum_{\sigma(t)} C_{\sigma(t)}\Delta_{\sigma(t)}^{n(t)}$，只要选择赋范环$E_x$使得

$\Sigma C_{\sigma(t)}u(\sigma(t))=\theta_x$ 即可，这里$\sigma(t)\in I^{n(t)}$，这时只要$n(t)$阶可导的f都是解。□

证明 因为$\Delta_\sigma^n f(x)=f^{(n)}(x)u(\sigma)$，$\Delta_{\sigma^*}^n f(x)=f^{(n)}(x)u(\sigma^*)$，所以可直接证所需的等式。方程可解性由

$$Q_t f(x)=\sum C_{\sigma(t)}\Delta_{\sigma(t)}^{n(t)}f(x)=\sum C_{\sigma(t)}\ f^{(n(t))}(x)\ u(\sigma(t))$$

$$=f^{(n(t))}(x)\sum C_{\sigma(t)}\,u(\sigma(t))=\theta_x$$

导出。证完。

变分转化关系（Ⅵ）表示求导的方向独立性，实际上是关系（Ⅴ）的一种变型。

当$f(x)$按基分解时：$f(x)=\Sigma f_i(x)u(i)$，算子方程组也可按基分解成很复杂的形式。

定理 3 若D为单连通区域，E_x为有限维，f'在D中存在连续，则f的各阶原算子$F_{(n)}$（$F_{(n)}^{(n)}=f$）存在，因而f必为位型算子。□

因为$u(j)\Delta_i f(x)=u(i)\Delta_j f(x)$，$f(x)$的线积分可证与路径无关，而由Гаврин定理（[6]85页），知f为位型算子且$F_{(1)}$存在，而后用归纳法可证$F_{(n)}$存在。

本文对力学及有关问题的应用将另作报导。

参 考 文 献

1. 关肇直，拓扑空间概论，科学出版社（1958）。
2. 关肇直，泛函分析讲义，高等教育出版社（1958）。
3. 李国平、吴学谋，数学中的转化概念（Ⅰ），武汉大学学报，2,(1975)，33—50.
4. 李国平、吴学谋，数学中的一些转化概念，科学通报，4，(1979)，145—148.
5. Lang, S., Introduction to Differentiable Manifolds, Interscience Publishers,(1962).
6. Вайнберг, М. М., Вариационные методы Исследования Нелинейных Операторов, Гостехиздат (1956)
7. Михлин, С. Г., Проблема Минимума Квадратичного Функционала, Гостехиздат (1952).
8. Bogoliubov, N. N., Shirkov, D. V., Introduction to the Theory of Quantized Fields, Interscience Publishers(1959).
9. 吴学谋，泛系分析的研究与应用(Ⅰ)，武汉大学学报，3(1978)，87—105；1(1979)，113—125
10. 吴学谋，乏晰性、可靠性与泛系分析(Ⅰ)(Ⅱ)(Ⅲ)，华中工学院学报，3(1978)，56—67；4，(1978)，44—54；武汉钢铁学院学报，1，(1979)，7—16.

Variation Transformation Analysis(Ⅰ)

Wu Xue mou

(Wuhan Institute of Mathematical Physics, Academia Sinica)

Abstract

This paper is concerned with operator variation from the transformation point of view, and presents some new concepts and new relations. Related problems and concepts include: convex operator, reciprocity set and reciprocity principles, H-generalized solution and operator-differential equation, etc.