

# 平面应变条件下裂纹尖端附近的 弹塑性近似分析\*

薛大为 (北京工业学院)

(1979年11月6日收到)

## 摘 要

本文给出了平面应变条件下裂纹尖端附近的弹塑性的应力、应变和位移的解析近似解, 其特例即 Irwin 的弹性主项解, 从而使弹塑性断裂力学分析所需的一切场量都可以从文中得到。

## 一、引 言

现代断裂力学认为, 裂纹的扩展导致断裂的发生, 为要从力学角度深入了解断裂机理, 裂纹前缘的弹塑性分析是很重要的。虽然国内外对此课题都很重视, 但由于问题的求解是困难的, 因此尚未得到圆满解决。在这方面, 陈箴<sup>[1]</sup>改进了塑性区修正法, 把材料的硬化效应考虑在内; Hutchinson<sup>[2,3]</sup>和 Rice、Rosengren<sup>[4]</sup>建立了 Hehcky 材料的弹塑性分析的基本方程, 并得到了一些数字结果; Uhlmann、Knesl、Kuna 和 Bilek<sup>[5]</sup>根据文献[4]的方程, 对未知函数作了 Fourier 展开, 取五项建立了问题的近似解。上述工作, 丰富了弹塑性断裂力学成果。

本文对实用上有重要意义的平面应变条件下裂纹尖端附近的应力场、应变场和位移场, 给出了一组近似解析解, 其特例即熟知的 Irwin 弹性主项解, 从而使弹塑性断裂力学分析所需要的一切场量都可以很方便地从文中得到。

## 二、近 似 解 的 导 出

采用塑性力学中通用的不可压缩假定, 文献[4]导出了下述基本方程和边界条件:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= (1+n)r^{-\frac{n}{1+n}} \left[ f(\theta) + \frac{1+n}{2+n} f''(\theta) \right] \\ \sigma_\theta &= r^{-\frac{n}{1+n}} f(\theta) \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{1+n}{2+n} r^{-\frac{n}{1+n}} f'(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (2.1-2.3)$$

\* 本文曾于1978年在中国金属学会断裂学科学术报告会上宣读。

$$\left. \begin{aligned} u_r &= -r^{\frac{n}{1+n}} g'(\theta) \\ u_\theta &= \frac{1+2n}{1+n} r^{\frac{n}{1+n}} g(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (2.4-2.5)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\theta &= -\varepsilon_r = -\frac{n}{1+n} r^{-\frac{1}{1+n}} g'(\theta) \\ \varepsilon_{r\theta} &= -\frac{1}{2} r^{-\frac{1}{1+n}} \left[ \frac{1+2n}{(1+n)^2} g(\theta) + g''(\theta) \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.6-2.7)$$

$$\left. \begin{aligned} \left[ f'' + \frac{n(2+n)}{(1+n)^2} f \right] \left[ g'' + \frac{1+2n}{(1+n)^2} g \right] &= -\frac{4n}{(1+n)^2} g' f' \\ \left[ f'' + \frac{n(2+n)}{(1+n)^2} f \right]^2 + \frac{4}{(1+n)^2} f'^2 & \\ = \frac{4\tau_0^2}{\nu_0^2 n} \frac{(2+n)^2}{(1+n)^4} \left\{ \frac{4n^2}{(1+n)^2} g'^2 + \left[ g'' + \frac{1+2n}{(1+n)^2} g \right]^2 \right\}^n & \end{aligned} \right\} \quad (2.8-2.9)$$

$$f(0) = 1 \quad (2.10)$$

$$f'(0) = f''(0) = 0 \quad (2.11)$$

$$f'(\pi) = 0 \quad (2.12)$$

其中:  $\tau_0, \nu_0$  分别为剪切屈服应力及应变,  $n$  为硬化指数,  $(r, \theta)$  为以裂纹延长线为极轴、裂纹尖点为极点的极坐标(图 1).  $f(0)$  之值可任选, 以适应关于函数  $f$  的四阶微分方程.

根据问题的上述提法, 可作下述分析:

在  $\theta=0$  线上, 由于问题具有对称性, 故

$$\varepsilon_{r\theta}|_{\theta=0} = u_\theta|_{\theta=0} = 0$$

因而由(2.5)及(2.7), 有

$$g(0) = g''(0) = 0 \quad (2.13)$$

由上式显见,  $g(\theta)$  能展为

$$g(\theta) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \sin k_i \theta \quad (2.14)$$

其中  $A_i$  为常数.

将(2.8)改写成

$$f'' + \frac{n(2+n)}{(1+n)^2} f + \frac{4n}{(1+n)^2} \frac{g'}{g'' + \frac{1+2n}{(1+n)^2} g} f' = 0 \quad (2.15)$$

并将(2.14)代入, 得

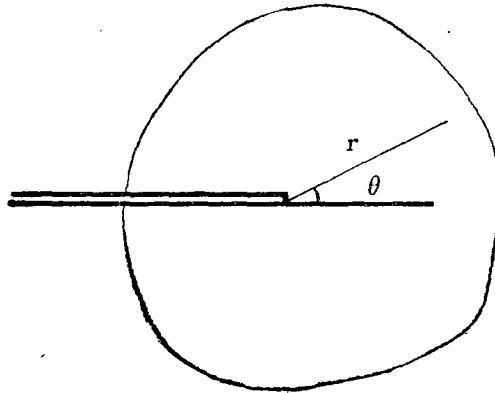


图 1

$$f'' + \frac{n(2+n)}{(1+n)^2} f' + \frac{4n}{(1+n)^2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{\infty} A_i k_i \cos k_i \theta}{\sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{1+2n}{(1+n)^2} - k_i^2 \right] A_i \sin k_i \theta} f' = 0 \quad (2.16)$$

这一变系数常微分方程是太复杂了, 以致于用现有的一般函数和特殊函数都无法求得其通解, 即或用将 $f'$ 也展为级数这一最后的手段, 也难以归纳出适用的规律. 注意到函数 $f$ 只能精确到一个常数乘子以及 $g'' + \frac{1+2n}{(1+n)^2} g$ 和 $f'$ 在 $\theta=0$ 处均为零引起的上述方程的奇性, 我们可以看到, 现实的途径是使 $f'$ 表示成

$$f' = \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{1+2n}{(1+n)^2} - k_i^2 \right] A_i \sin k_i \theta \quad (2.17)$$

的形式. 将(2.17)代入(2.16), 我们就立即看到, 方程

$$\left[ \frac{1+2n}{(1+n)^2} - k_i^2 \right] k_i^2 - \frac{n(2+n)}{(1+n)^2} \left[ \frac{1+2n}{(1+n)^2} - k_i^2 \right] + \frac{4n}{(1+n)^2} k_i^2 = 0 \quad (2.18)$$

必须成立. 上式是关于 $k_i$ 的四次代数方程, 它只有四个根

$$k_i^2 = \frac{1}{2(1+n)^2} \left[ 1 + 8n + n^2 \pm \sqrt{n^4 + 8n^3 + 46n^2 + 8n + 1} \right] \quad (2.19)$$

对于材料的任何硬化指数 $n$ , 由上式所表达的 $k_i^2$ 值恒不为负. 因此, 一定存在四个 $k$ 值, 其中两个 $k$ 值与另两个 $k$ 值分别反号. 但注意到(2.14), 反号的 $k$ 值没有意义, 因为, 这仅是改变了常数 $A_i$ 的符号而已. 因此, 我们只有两个 $k$ 值, 即 $k_1$ 和 $k_2$ , 它们由(2.19)决定.

根据(2.17)式积分得到的函数 $f$ 的表达式, 因要满足(2.16), 故其中积分常数已令其为零. 又由于只有两个 $k$ 值, 故

$$f = - \left[ \frac{1+2n}{(1+n)^2} - k_1^2 \right] \frac{A_1}{k_1} \cos k_1 \theta - \left[ \frac{1+2n}{(1+n)^2} - k_2^2 \right] \frac{A_2}{k_2} \cos k_2 \theta \quad (2.20)$$

$$g = A_1 \sin k_1 \theta + A_2 \sin k_2 \theta \quad (2.21)$$

可以看到, 由(2.20)式表达的函数 $f$ , 不论 $n$ 为何值, 均满足了边界条件(2.11). 为满足边界条件(2.12), 只需确定适当的 $A_1$ 与 $A_2$ 的比值, 由此得到 $A_1 = -3A_2$ . 由(2.20)式可见, 边界条件(2.10)也是可以满足的. 这样, 只有方程(2.9)尚待满足, 一旦(2.9)被满足, 即是求得了问题的主项解.

值得指出的是, 如果令 $n=1$ , 亦即讨论线弹性解, 则由(14)得

$$k_1 = \frac{1}{2}, \quad k_2 = \frac{3}{2} \quad (2.22)$$

将(2.20) (2.21) 及 (2.22) 一并代入(2.9), 立即可以看到(2.9)是满足的. 这样, 我们就从另一途径得到了与Irwin根据 Westergaard函数求得的完全相同的弹性主项解. 为了用本文途径写出Irwin解, 只需进行 $J$ 积分计算并用 $J$ 积分与 $K_{II}$ 的众所周知的关系式以定出常数乘子. 由于Irwin解是众所周知的, 故不再叙述了.

当 $n$ 取不为1的其它数值时, (2.19) (2.20) (2.21)三式, 未能满足方程(2.9). 例如, 取 $n=0$ 的理想塑性材料<sup>1)</sup>, 就不能满足(2.9). 因此, (2.19) (2.20) (2.21)所对应的弹塑性

<sup>1)</sup> 在 $n=0$ 时,  $\sigma_{ij}$ 与 $r$ 无关, 因此文献[2, 3, 4]所述理论已失去了主项解的意义.

解的意义, 似乎就有疑问了.

但我们注意到, (2.9)式所表达的材料幂硬化律, 只不过是一种由实验归纳得出的经验公式, 它可以代之以其它形式, 例如折线模式, 也就是说(2.9)式不一定必须严格满足; 又注意到, 在目前弹塑性解析解尚感缺乏的情况下, 工程上在进行弹塑性分析时, 除了根据塑性区修正法外, 不得不放弃弹塑性分析而只根据弹性解来处理问题, 那我们这个解的实用意义就是显然的. 这是因为, 本文的解, 至少包含了通用的 Irwin解在内作为特殊情况. 正是由于存在着要满足(2.9)的考虑, 所以, 我们认为本文的解是近似的. 但可以认为, 本文得到的解仍有充足的理论根据, 并且由于它的结构简单而便于推广使用.

陈镜<sup>[1]</sup>根据文献[2,3,4]的理论, 算得了颇有意义的乘子, 这结果使本文的计算工作量得以减少. 设用 $D_1$ 代表这个乘子

$$D_1 = \left( \frac{1}{1+n} \frac{1}{\pi} \right)^{\frac{n}{1+n}} (\sigma_y^*)^{\frac{1-n}{1+n}} K_1^{\frac{2n}{1+n}} \quad (2.23)$$

其中,  $\sigma_y^*$ 代表平面应变时材料的屈伏极限, 则我们可立即列出弹塑性应力主项解的近似表达式如下:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta &= D_1 r^{-\frac{n}{1+n}} \left\{ \frac{3}{4k_1} \left[ \frac{1+2n}{(1+n)^2} - k_1^2 \right] \cos k_1 \theta \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4k_2} \left[ \frac{1+2n}{(1+n)^2} - k_2^2 \right] \cos k_2 \theta \right\} \\ \sigma_r &= (1+n) D_1 r^{-\frac{n}{1+n}} \left\{ \frac{3}{4} \left[ \frac{1+2n}{(1+n)^2} - k_1^2 \right] \right. \\ &\quad \cdot \left( \frac{1}{k_1} - \frac{1+n}{2+n} k_1 \right) \cos k_1 \theta - \frac{1}{4} \left[ \frac{1+2n}{(1+n)^2} - k_2^2 \right] \\ &\quad \cdot \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1+n}{2+n} k_2 \right) \cos k_2 \theta \left. \right\} \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1+n}{2+n} D_1 r^{-\frac{n}{1+n}} \left\{ \frac{3}{4} \left[ \frac{1+2n}{(1+n)^2} - k_1^2 \right] \sin k_1 \theta \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \left[ \frac{1+2n}{(1+n)^2} - k_2^2 \right] \sin k_2 \theta \right\} \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

根据[6]

$$J = \frac{1}{1+n} \sigma(a) \delta(a) = \frac{K_1^2 (1-\nu^2)}{E} \quad (2.25)$$

及(2.5)(2.24)第一式, 可解得 $g(\theta)$ 的乘子. 注意 $\delta(a) = 2u_n(\pi)$ 以及 $A_1 = -3A_2$ , 如令

$$D_2 = \frac{2(1+n)^2 (1-\nu^2) K_1}{E D_1 \left\{ \frac{3}{k_1} \left[ \frac{1+2n}{(1+n)^2} - k_1^2 \right] - \frac{1}{k_2} \left[ \frac{1+2n}{(1+n)^2} - k_2^2 \right] \right\} (1+2n) (3 \sin k_1 \pi - \sin k_2 \pi)} \quad (2.26)$$

则各位移分量和应变分量可表达如下:

$$\left. \begin{aligned} u_r &= -D_2 r^{-\frac{n}{1+n}} (3k_1 \cos k_1 \theta - k_2 \cos k_2 \theta) \\ u_\theta &= \frac{1+2n}{1+n} D_2 r^{-\frac{n}{1+n}} (3 \sin k_1 \theta - \sin k_2 \theta) \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\theta &= -\varepsilon_r = \frac{n}{1+n} D_2 r^{-\frac{1}{1+n}} (3k_1 \cos k_1 \theta - k_2 \cos k_2 \theta) \\ \varepsilon_{r\theta} &= -\frac{D_2}{2} r^{-\frac{1}{1+n}} \left\{ \left[ \frac{3(1+2n)}{(1+n)^2} - 3k_1^2 \right] \sin k_1 \theta \right. \\ &\quad \left. - \left[ \frac{1+2n}{(1+n)^2} - k_2^2 \right] \sin k_2 \theta \right\} \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

### 三、讨 论

1. 文献[2, 3, 4]采用了不可压缩条件. 如果不作此限制, 则应再引入一个势函数  $\omega$

$$\omega = r^{\frac{1+2n}{1+n}} \varphi(\theta)$$

使位移分量表示成

$$\begin{aligned} u_r &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{\partial \omega}{\partial r} = -r^{-\frac{n}{1+n}} g'(\theta) + \frac{1+2n}{1+n} r^{-\frac{n}{1+n}} \varphi(\theta) \\ u_\theta &= \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} = \frac{1+2n}{1+n} r^{-\frac{n}{1+n}} g(\theta) + r^{-\frac{n}{1+n}} \varphi'(\theta) \end{aligned}$$

的形式. 其中  $\varphi(\theta)$  为另一角因子. 这样作虽有理论意义, 但得出的结果较繁, 因此从略.

2. 本文所得弹性近似解的精确程度到底如何, 因无严格理论解存在因此无法判断 (如果有简单又严格的理论解, 那本文结果也就意义不大了). 但我们认为, 本文的结果较诸文献[5]要好, 因为文献[5]的分析方法是只作了取五项的通常采用的展开, 又没有进行误差的理论分析. 相比之下, 本文的论证严格些. 文献[5]认为其数字误差当  $0.05 \leq n \leq 0.5$  时约10%左右. 根据钢铁研究院潘灏同志按本文公式及文献[5]公式算得的部分数字结果, 可列表如下 (对于  $f''(0)$  的值按归一化方案<sup>1)</sup>算出, 此值可以代表解的精确程度):

表1  $f''(0)$  的 值

文 别 \ 几 值	0.100000	0.200000	0.300000	0.400000	0.500000
本 文	-0.557933	-0.607744	-0.649130	-0.682004	-0.706976
文 献(5)	-0.677749	-0.627814	-0.596275	-0.585556	-0.602082

由上表可见, 本文结果是可取的.

3. 由已得到的场量公式, 我们可以得到许多有意义的结果. 例如, 根据 Mises 屈伏准

<sup>1)</sup> 即(2.10)式成立的方案. 对潘灏同志提供计算结果作者表示感谢.

则, 我们可得弹塑性分界面的表达式为:

$$\begin{aligned}
 D_1^2 r^{-\frac{2n}{1+n}} & \left\{ \frac{3}{4} \frac{1+n}{2+n} k_1 \left[ \frac{1+2n}{(1+n)^2} - k_1^2 \right] \cos k_1 \theta \right. \\
 & - \frac{1}{4} \frac{1+n}{2+n} k_2 \left[ \frac{1+2n}{(1+n)^2} - k_2^2 \right] \cos k_2 \theta \\
 & - \frac{3n}{4} \left[ \frac{1+2n}{(1+n)^2} - k_1^2 \right] \left[ \frac{1}{k_1} - \frac{1+n}{2+n} k_1 \right] \cos k_1 \theta \\
 & + \frac{n}{4} \left[ \frac{1+2n}{(1+n)^2} - k_2^2 \right] \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1+n}{2+n} k_2 \right) \cos k_2 \theta \left. \right\}^2 \\
 & + 4D_1^2 r^{-\frac{2n}{1+n}} \left( \frac{1+n}{2+n} \right)^2 \left\{ \frac{3}{4} \left[ \frac{1+2n}{(1+n)^2} - k_1^2 \right] \sin k_1 \theta \right. \\
 & \left. - \frac{1}{4} \left[ \frac{1+2n}{(1+n)^2} - k_2^2 \right] \sin k_2 \theta \right\}^2 = \frac{4}{3} \sigma_s^2 \quad (2.29)
 \end{aligned}$$

由此即可绘出弹塑性分界面的形状. 又例如, 由(2.24)式可见, 在裂纹尖端 ( $c=0$ 面上) 附近,  $\sigma_r$ 和 $\sigma_\theta$ 都是拉应力, 因而根据平面应变的条件, 这地区的材料处于三向受拉状态. 这就说明材料在断裂时常呈较大程度的脆性的根源所在, 从而为线弹性的断裂力学分析提供了根据.

4. 本文的分析方法可以毫无困难地用到分析平面应力条件下的弹塑性断裂力学中去.

### 参 考 文 献

1. 陈篪, 考虑到硬化的塑性区修正, 金属断裂研究文集, 北京, (1978).
2. Hutchinson, J. W., Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material, *J. Mech. Phys. Sol.*, 16, (1) (1968).
3. Hutchinson, J. W., Plastic stress and strain fields at a crack tip, *J. Mech. Phys. Sol.*, 16, (5) (1968).
4. Rice J. R., Rosengren, G. F., Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material, *J. Mech. Phys. Sol.*, 16, (1) (1968).
5. Uhlmann, W. Knesl, Z. Kuna, M. Bilek, Z. Approximate representation of elastic-plastic small scale yielding solution for crack problems, *Int. J. Fract.*, 12, (3) (1976), 507—509
6. 钢铁研究院金属物理室, 《工程断裂力学》, 国防工业出版社, 北京, (1977).

---

## An Asymptotic Elastic Plastic Analysis in Plane Strain Deformation near a Crack Tip

Hsueh Dah-wei  
(Peking Institute of Technology)

### Abstract

In this Paper, an asymptotic elastoplastic analysis in plane strain deformation near a crack tip is established. The special case of which is the well-known Irwin's solution in elastic material.