

动态问题速度有限元法^{*}

杨真荣 (北京中国科学院计算中心)

(1979年11月收到)

摘 要

分析了N. M. Newmark和E. L. Wilson等按位移作变量逐步积分法的主要特点, 提出以速度为变量求解动力学问题的速度元法。

针对无阻尼系统, 构造了一种简化格式, 讨论了稳定性。由于该格式在无阻尼和拟静力阻尼情况下为显式, 每个时刻, 不求解代数方程组, 其计算量与Newmark等方法比较, 显著减少。对非线性动态问题, 该计算格式可作为取得较好迭代初值的一个办法。

文中, 就任意阻尼系统, 列出了速度元法的推广形式。相应非线性情况, 提供了速度增量迭代格式并证明了收敛性。

文末, 附录了典型问题的数值检验结果。

一、引 言

结构系统动力有限元问题

$$\left. \begin{aligned} [M]\{\dot{u}(t, x)\} + [C]\{\dot{u}(t, x)\} + [K]\{u(t, x)\} &= \{P(t, x)\} \\ u(t_0, x) &= u_0(x) \\ \dot{u}(t_0, x) &= \dot{u}_0(x) \\ u(t, x)|_{x=\bar{x}} &= \bar{u}(t, \bar{x}) \\ t &\in [0, T] \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} & t = t_0 = 0, x \in \Omega \\ & \bar{x} \in \partial\Omega \end{aligned} \quad (1.1)$$

给定 T ——积分时段上限, Ω ——求解域, $\partial\Omega$ —— Ω 边界
 $u_0, \dot{u}_0(x)$ ——初始位移和速度
 $x = x_i (i=1, 2, \dots)$ 空间变量或坐标变量
 $P(t, x)$ ——动态外载
 M, K, C ——系统惯性、刚度和阻尼特性。
(以下省略[]和{ })

有着广泛的实际背景。地震等冲击波作用下的结构抗震问题, 新兴的诱震学科与破坏机理研究, 都是值得重视的课题。

采用直接积分法求解方程(1.1), 已有不少工作。在纽马克(Newmark)1959年首先提出的方法^[2]基础上, 威尔逊(Wilson)^[6]、辛基维奇(Zienkiewicz)^[8]和希尔伯(Hilber)^[7]等

作了总结和改进。然而，所有这些方法有如下共同点：

1. 以位移作为基本求解量；
2. 每时段 Δt 内，加速度通常采用线性化逼近；
3. 各时刻 t_n 上，相应数值解边值问题。即等价的（隐式）有限元动态刚度（代数）

方程组^{(11) (14)}

$$\bar{K}(t_n)U^*(t_n, x_i) = \bar{P}(t_n, x_i) \tag{1.2}$$

4. 时间步长 Δt ，通常要求小于系统最小周期的四分之一。即步长较小；
5. 动态问题计算量相对静态问题成百上千倍地增大。

已有的位移——逐步积分格式，若假定

$$\left. \begin{aligned} u_{i+\theta\Delta t} &= u_i + u_i^{(1)}\theta\Delta t + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) u_i^{(2)}\theta^2\Delta t^2 + \beta\theta^2\Delta t^2 u_{i+\theta\Delta t}^{(2)} \\ u_{i+\theta\Delta t}^{(1)} &= u_i^{(1)} + (1-\delta)\theta\Delta t u_i^{(2)} + \delta\theta\Delta t u_{i+\theta\Delta t}^{(2)} \end{aligned} \right\} \tag{1.3}$$

（式中 θ , β 和 δ 为待定参数）则当它们分别取不同数值时，可导出 Newmark 等积分格式。具体见下表。

参 方 法	NEWMARK	CLOUGH	WILSON	滝泽春男
θ	1	1	θ	1
β	β	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	β
δ	δ	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
稳定条件	$\delta \geq \frac{1}{2}$ $\beta \geq \frac{1}{4} \left(\delta + \frac{1}{2}\right)^2$	$\Delta t \leq \frac{T}{10}$	$\theta \geq 1.37$	$\beta \geq \frac{1}{4}$

为了探求节省动态问题逐步积分法的计算量，本文提供以速度为主要求解量的一种方法——简称速度元法。

相应 (1.2) 式，可有

$$\bar{C}(t_n)V^*(t_n, x_i) = \bar{Q}(t_n, x_i) \tag{1.3}$$

其中，对于无阻尼且采用集中质量时， $\bar{C}(t_n)$ 退化为对角阵，在每个时刻 t_n 上呈显式求解。即，不再求解代数方程组。若略去时间步长的高阶项等，可构造如下简化显示格式

$$\left. \begin{aligned} u_n^{(1)} &= aM^{-1}P_n - aM^{-1}K_0 u_{n-2} + u_{n-2}^{(1)} + a u_{n-2}^{(2)} \\ u_n^{(2)} &= M^{-1}(P_n - K_0 u_{n-2} - \Delta t K_0 u_{n-2}^{(1)}) \\ u_n &= u_{n-2} + \Delta t u_{n-2}^{(1)} \end{aligned} \right\} \tag{1.4}$$

式中 $a = \theta\Delta t/6$ ，逼近算子谱半径

$$\rho(\mathcal{A}) = 1 + O(\Delta t) \tag{1.5}$$

稳定条件是

$$\Delta t\omega < \sqrt{3} \tag{1.6}$$

简化速度元法与位移逐步积分法相对比, 特点如下

1. 每个时刻主要求解量是速度;
2. 在积分时段内, 加速度变化是线性的;
3. 每个时刻 t , 在无阻尼或拟静力阻尼情况下, 可以不解代数方程组;
4. 时间步长 $\Delta t < \sqrt{3} T_{\min}$, (T_{\min} ——结构最小周期);
5. 含有任意阻尼的线性动态系统, 按隐式速度元格式迭代求解。其初值由简化速度元格式得到;
6. 对于非线性动态系统, 构造速度增量迭代格式。每个时刻的初值, 仍首先由简化速度元格式计算。

工作中曾多次得到钱伟长教授的指导和鼓励, 本文的命题就是钱老师推荐的。在此表示衷心的感谢。

二、速度有限元法

1. 假定

$$u^{(2)}(t, x) \in C^{(2)}, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall t \in (0, \theta \Delta t)$$

$$u^{(2)}(\tau, x) = \sum_{i=0}^2 a_i \tau^i \quad (2.1)$$

其中 $C^{(2)}$ ——具有二阶光滑度的函数集

$$\left. \begin{aligned} u^{(0)}(0, x) = u_0, \quad u^{(1)}\left(\frac{\theta \Delta t}{2}, x\right) = u_1^{(1)}, \quad u^{(2)}(\theta \Delta t, x) = u_2^{(2)} \\ 0 \leq \tau \leq \theta \Delta t, \quad \theta = 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

$$\left. \begin{aligned} a_0 = u^{(2)}(0, x) = u_0^{(2)} \\ a_1 = \frac{1}{\Delta t} (4u_1^{(2)} - 3u_0^{(2)} - u_2^{(2)}) \\ a_2 = \frac{1}{\Delta t^2} (2u_0^{(2)} - 4u_1^{(2)} + 2u_2^{(2)}) \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

2. 基本积分格式

由 (2.1) 和 (2.3) 式, 利用数值积分可得基本格式如下

$$\left. \begin{aligned} u_{n+2} &= u_n + \Delta t u_n^{(1)} + \frac{\Delta t^2}{6} u_n^{(2)} + \frac{\Delta t^2}{3} u_{n+1}^{(2)} \\ u_{n+2}^{(1)} &= u_n^{(1)} + \frac{\Delta t}{6} u_n^{(2)} + \frac{2}{3} \Delta t u_{n+1}^{(2)} + \frac{\Delta t}{6} u_{n+2}^{(2)} \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

3. 简化计算格式

将 (2.4) 和 (1.1) 式联立, 略去高阶项等, 对于无阻尼情形, 可构造如下简化计算格式

$$\left. \begin{aligned} u_{n+2}^{(1)} &= u_n^{(1)} + \frac{\Delta t}{6} K_2^{-1} (P_{n+2} - K_0 u_n) + \frac{\Delta t}{6} u_n^{(2)} \\ u_{n+2}^{(2)} &= K_2^{-1} (P_{n+2} - K_0 u_n - \Delta t K_0 u_n^{(1)}) \\ u_{n+2} &= u_n + \Delta t u_n^{(1)} \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

相应 (1.15) 式, 可有^[16]

$$\begin{aligned} [C] \{u^{(1)}(t)\} &= \{Q(t)\} \\ t &= t_0 + n\Delta t, \quad n=0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.6)$$

对于无阻尼和拟静力阻尼系统, $[C]$ 为对角阵。

三、稳定性分析

1. 系统稳定性

令 $u_{11} = u^{(1)}$, 将 (1.1) 式写成

$$U^{(1)} = AU + \tilde{P} \quad (3.1)$$

式中 $U^{(1)} = [u_{11}^{(1)}, u^{(1)}]$, $\tilde{P} = [K_2^{-1}P, 0]$

$$A = \begin{bmatrix} -K_2^{-1}K_1 & -K_2^{-1}K_0 \\ I & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$U = [u_1, u] \quad (3.3)$$

相应特征方程 (单自由度情形)

$$|A - \lambda I| = \lambda^2 + K_2^{-1}K_1\lambda + K_2^{-1}K_0 = 0 \quad (3.4)$$

特征根是

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-K_2^{-1}K_1 \pm \sqrt{(K_2^{-1}K_1)^2 - 4K_2^{-1}K_0} \right) \quad (3.5)$$

相应四种情形, 分述如下

1. 强阻尼系统

$$(K_2^{-1}K_1)^2 \geq 4K_2^{-1}K_0, \text{ 系统恒稳。}$$

2. 弱阻尼系统

$(K_2^{-1}K_1)^2 < 4K_2^{-1}K_0$, 若 $R_e\lambda_{1,2} \leq 0$, 振幅衰减, 系统稳定; 否则不保证稳定, 此时特征根虚部 $I_m\lambda_{1,2}$ 给出其角频率。

3. 无阻尼情形

特征方程退化为

$$\lambda^2 + K_2^{-1}K_0 = 0 \quad (3.6)$$

相应特征根

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \pm i\omega = \pm i \sqrt{K_2^{-1}K_0} \\ (i &= \sqrt{-1}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

由于特征根实部 $R_e\lambda_{1,2} = 0$, 振动系统的振幅不变, 因此是临界稳定状态。

4. 负阻尼系统

对于 $K_1 < 0$ 系统, 诸如负电阻、负阻抗等物理过程, 产生实部为正的特征根, 即振幅随时间增大, 系统是不稳定的。

2. 速变元积分格式的稳定性

对于系统稳定的情况下, 积分格式的稳定性决定于过渡矩阵或逼近算子的谱半径^[8]。

由(2.5)式所构造的速度元格式的稳定性可分析如下

将(2.5)式简记为

$$V_{n+2} = \mathcal{A}V_n + R_{n+2} \quad (3.8)$$

式中

$$V_{n+2} = [u_{n+2}, u_{n+2}^{(1)}, u_{n+2}^{(2)}] \quad (3.9)$$

$$V_n = [u_n, u_n^{(1)}, u_n^{(2)}] \quad (3.10)$$

$$R_{n+2} = [0, \frac{\Delta t}{6} K_2^{-1} P_{n+2}, K_2^{-1} P_{n+2}] \quad (3.11)$$

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1, & \Delta t, & 0 \\ -\frac{\Delta t}{6} K_2^{-1} K_0, & 1, & \frac{\Delta t}{6} \\ -K_2^{-1} K_0, & -\Delta t K_2^{-1} K_0, & 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

相应单自由度 ($I=1$) 特征多项式

$$|\mathcal{A} - \lambda I| = (-\lambda)(1-\lambda)^2 + \frac{\Delta t^2}{6} K_2^{-1} K_0 (-\lambda) - \frac{\Delta t^2}{6} K_2^{-1} K_0 \lambda = 0$$

$$\lambda = 1 \pm i \Delta t \sqrt{K_2^{-1} K_0 / 3} \quad (3.13)$$

当 $\Delta t \sqrt{K_2^{-1} K_0 / 3} < 1$, $\rho(\mathcal{A}) = 1 + O(\Delta t)$ (条件稳定)

对于多自由度情形, 根据特征向量写出动力平衡方程, 应用变换

$$u = \phi X \quad (3.14)$$

我们得到

$$X^{(2)} + [2\xi_i \omega_i] X^{(1)} + [\omega_i^2] X = R \quad (3.15)$$

式中, ξ_i 是 i 振型临界阻尼比, ω_i^2 是相应第 i 个特征值, ϕ 是特征向量组成的矩阵, 方程(3.15)是有阻尼体系的由 n 个不偶联的方程式组成的方程组。其中, 每一个方程, 都可用

数值积分法求解, 因为已知周期 T_i , $i=1, 2, \dots, n$, $T_i = \frac{2\pi}{\omega_i}$, 我们可以在每个方程的逐步

积分中, 选择能保证要求有一定精度水平的步长 Δt 。(1.1) 式的直接积分等效(3.15)式的积分, 在选定的步长 Δt 的情况下, 我们只需研究(3.15)式中具有代表性的一行积分。

即写为:

$$u^{(2)} + 2\xi\omega u^{(1)} + \omega^2 u = r \quad (3.16)$$

其中, ω 为圆频率, ξ 为临界阻尼比, r 为引用荷载。(3.16)式即为单自由度体系的动态方程。相应周期为 T 。

基于上述, 对于多自由度系统的稳定性分析, 可化为对于等效的(3.16)式单自由度系

统的分析。

相应 (3.16) 式, 简化速度元格式过渡矩阵的谱半径

$$\rho(\mathcal{A}) = 1 + O(\Delta t) \quad (3.17)$$

$$\text{当 } \Delta t \omega < \sqrt{3} \quad (3.18)$$

类似, 在三、中关于稳定性分析过程, 关于多自由度系统, 按同样方式处理。

四、计算格式的推广形式

对于任意结构阻尼系统, 采用

$$[K_1] = [K_2] \sum_{s=0}^{n-1} \alpha_s ([K_2]^{-1} [K_0])^s \quad (4.1)$$

当 $s = 0, 1$ 即

$$K_1 = \alpha_0 K_2 + \alpha_1 K_0 \quad (4.2)$$

计算格式 (2.5) 的推广形式是

$$\left. \begin{aligned} u_{n+2}^{(1)} &= [I + \bar{M}K_1]^{-1} \{ \bar{M}P_{n+2} - \bar{M}K_0 u_n + (I - \Delta t \bar{M}K_0) u_n^{(1)} \\ &\quad + \xi(I - \Delta t \bar{M}K_0) u_n^{(2)} + \xi \left(4 - \frac{\Delta t}{3} \bar{M}K_0 \right) u_{n+1}^{(2)} \} \\ u_{n+2}^{(2)} &= K_2^{-1} \{ P_{n+2} - K_1 u_{n+2}^{(1)} - K_0 u_{n+2} \} \\ u_{n+2}^{(0)} &= u_{n+2} = u_n + \Delta t u_n^{(1)} + \xi \Delta t u_n^{(2)} + 2 \Delta t \xi u_{n+1}^{(2)} \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

式中 $\bar{M} = \xi K_2^{-1}$, $\xi = \frac{\Delta t}{6}$, I ——单位阵

当 $\alpha_1 = 0$, (4.3) 式的第一式变为

$$\begin{aligned} u_{n+2}^{(1)} &= [1 + \alpha_0 \xi]^{-1} \{ \bar{M}P_{n+2} - \bar{M}K_0 u_n + [I - \Delta t \bar{M}K_0] u_n^{(1)} \\ &\quad + \xi(I - \Delta t \bar{M}K_0) u_n^{(2)} + \xi \left(4I - \frac{\Delta t}{3} \bar{M}K_0 \right) u_{n+1}^{(2)} \} \end{aligned} \quad (4.4)$$

即是拟静力阻尼情况的计算格式。

(4.3) 的第一式与 (4.4) 式结合, 写成

$$[\bar{C}(t)] \{ \bar{u}^{(1)}(t) \} = \{ \bar{Q}(t) \} \quad (4.5)$$

式中 $[\bar{C}(t)] = I + \bar{M}K_1$, 而 K_1 由 (4.1) 式选取。

(4.5) 式是动态问题速度元法的一般形式。也是速度元简化格式的推广。

求解 (4.5) 式, 除了采用上述隐式积分格式外, 还可构造如下迭代格式

$$V^{(n+1)} = Q + G V^{(n)} \quad (4.6)$$

$$\text{式中, } V = \bar{u}^{(1)}, G = -\bar{M}K_1, Q = \bar{Q}(t) \quad (4.7)$$

当 K_0, K_1, K_2 均具有对称正定性, 可以证明 (4.6) 式——速度迭代格式是收敛的, 而初始值由 (2.5) 式——简化速度元法求得。

五、速度元增量法的收敛性

以速度为基本求解量, 求解非线性动力学问题, 类似位移法的增量格式, 也可构造速度增量格式, 其基本方程是

$$(I + \bar{M}K_1)\Delta\bar{u}^{(1)} = \Delta Q \quad (5.1)$$

式中 $\Delta\bar{u}^{(1)}$, ΔQ ——速度增量, 载荷增量 (并考虑剩余或修正量)

对于具有材料非线性和几何非线性结构系统, 类似 (1.10) 式, 令

$$K_1 = C_0 + C_1 + C_2 \quad (5.2)$$

其中 C_0 ——线性结构系统阻尼 (常数阵)

C_1 ——由应力变化引起的阻尼改变 (矩阵)

C_2 ——由位移引起的阻尼改变 (矩阵)

将 (5.2) 代入 (5.1) 式, 并令 $\Delta\bar{V} = \Delta\bar{u}^{(1)}$, 则 (5.1) 式变为

$$((I + \bar{M}C_0) + \bar{M}(C_1 + C_2))\Delta\bar{V} = \Delta Q \quad (5.3)$$

基于 C_0 具有正定性, 因此存在下三角阵 L 并且使

$$I + \bar{M}C_0 = LL^T \quad (5.4)$$

将 (5.4) 式代入 (5.3) 式, 且左乘 L^{-1} 得

$$L^T\Delta\bar{V} + L^{-1}\bar{M}(C_1 + C_2)(L^T)^{-1}(L^T)\Delta\bar{V} = L^{-1}\Delta Q \quad (5.5)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{令} \quad \Delta V &= L^T\Delta\bar{V} \\ \Delta q &= L^{-1}\Delta Q \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

(5.5) 式变化为

$$\Delta V = \Delta q + G\Delta V \quad (5.7)$$

$$G = -L^{-1}\bar{M}(C_1 + C_2)(L^{-1})^T \quad (5.8)$$

若 ΔV_0 作为 ΔV 向量在 R^n 空间的初始近似, 同时构造集合

$$\begin{aligned} \Delta V_n &= \Delta q + G\Delta V_{n-1} \\ n &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.9)$$

于是, 我们的目标, 在于证明如下结果, 即

定理:

如果 $(I + \bar{M}C)$ 对称正定, 则集 $\{\Delta V_n\}$ 收敛于 $\{\Delta V\}$, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta V_n - \Delta V\| \rightarrow 0 \quad (5.10)$$

证明

将 (5.9) 式的解 ΔV 给成

$$\Delta V = (I - G)^{-1}\Delta q \quad (5.11)$$

并将逐次逼近式写成

$$\Delta V_n = (I + G + G^2 + \dots + G^{n-1})\Delta q + G^n\Delta V_0 \quad (5.12)$$

用 G 作用 (5.12) 式, 并减去 (5.12) 式得

$$\Delta V_n = (I - G)^{-1}(I - G^n)\Delta q + G^n\Delta V_0 \quad (5.13)$$

于是可有 (利用 (5.11) 式)

$$\Delta V_n - \Delta V = \Delta V_n - (I - G)^{-1} \Delta q = G^n \Delta V_0 - (I - G)^{-1} G^n \Delta q \quad (5.14)$$

利用 $G^n - G^{n+1} = G^n(I - G) = (I - G)G^n$ 并作用 $(I - G)^{-1}$

$$\text{可有} \quad G^n(I - G)^{-1} = (I - G)^{-1}G^n \quad (5.15)$$

于是

$$\begin{aligned} \Delta V_n - \Delta V &= G^n \Delta V_0 - G^n(I - G)^{-1} \Delta q \\ &= G^n(\Delta V_0 - \Delta V) \end{aligned} \quad (5.16)$$

从而得到

$$\|\Delta V_n - \Delta V\| \leq \|G^n\| \|\Delta V_0 - \Delta V\| \quad (5.17)$$

显然, 收敛的充分条件是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|G^n\| = 0 \quad (5.18)$$

因为 $(I + \bar{M}C)$ 正定, 对于任意非零向量 S

$$\text{有} \quad S^T(I + \bar{M}C)S > 0 \quad (5.19)$$

我们分析如下特征值问题

$$[(I + \bar{M}C_0) + \lambda(\bar{M}(C_1 + C_2))] \tilde{S} = 0 \quad (5.20)$$

相应特征值 λ_i (以下仍简记为 λ)

$$\tilde{S}^T(\bar{M}(C_1 + C_2))\tilde{S} = -\frac{1}{\lambda} \tilde{S}^T(I + \bar{M}C_0)\tilde{S} \quad (5.21)$$

由 (5.19) 式, 可有

$$\tilde{S}^T(I + \bar{M}C_0)\tilde{S} + \tilde{S}^T(\bar{M}(C_1 + C_2))\tilde{S} > 0 \quad (5.22)$$

利用 (5.24) 式, 可得

$$\tilde{S}^T(I + \bar{M}C_0)\tilde{S} \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) > 0 \quad (5.23)$$

因 $I + \bar{M}C_0$ 正定, 故

$$\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) > 0 \Rightarrow |\lambda| > 1 \quad (5.24)$$

(5.24) 式说明, 所有 G 的特征值包含在区间 $[-1, 1]$ 之上。即

$$\rho(G) \leq 1 \quad (5.25)$$

由于 G 对称, 故存在正交阵 W 使

$$G = W H W^{-1} \quad (5.26)$$

其中

$$H = \begin{pmatrix} h_1 & & & \\ & h_2 & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & h_n \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

h_i —— G 的特征值并且

$$\left. \begin{aligned} h_i < 1 \\ h_i = \frac{1}{\lambda} \end{aligned} \right\} \quad (5.28)$$

于是 $G^n = W H^n W^{-1}$ (5.29)

因 W 是正交阵, 故 $\|W\| = \|W^{-1}\| = 1$, 则有 $\|G^n\| \leq \|H^n\|$ (5.30)

取 $\|H^n\| = \left(\sum_{i=1}^m (h_i^{2n}) \right)^{\frac{1}{2}} \leq m h^n$

其中 $h = \max |h_i| < 1$ (因 $|\lambda| > 1$)

相应得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|H^n\| = 0 \quad (5.31)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|G^n\| = 0 \quad (5.32)$$

由 (5.17) 式, 得到误差估计

$$\|\Delta V_n - \Delta V\| \leq \frac{m}{\lambda^n} \|\Delta V_0 - \Delta V\| \quad (5.33)$$

即, 当 ΔV_0 比较靠近 ΔV 时或最小特征值不很小时, 收敛速度还是较快的。(证完)

六、人工阻尼和参数 θ

在前面的稳定性分析和构造速度元基本格式中, 我们选取 $\theta = 1$ 。本节我们以一般的中心差分格式与人工阻尼同系统稳定性关系进行讨论。基于积分格式的共性, 分析参数 θ 的作用。即, 不失一般性, 取

$$u_n^{(2)} = \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{\Delta t^2} + O(\Delta t^2) \quad (6.1)$$

式中,

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{\Delta t^2} &= u^{(2)}(t_n + \theta \Delta t, x) \\ x &\in \Omega \\ \theta &\text{--- 参数} \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

又 $u^{(2)}(t_n + \theta \Delta t, x) = K_2^{-1} (K_0 u_n(t_n + \theta \Delta t, x) + K_1 u^{(1)}(t_n + \theta \Delta t, x) + P(t_n + \theta \Delta t, x))$
 利用 (1.1) 式, 假定 $\Delta t K_1$ 为相对小量, 予以略去, 并略去其它高阶项, 得到

$$u^{(2)}(t_n + \theta \Delta t, x) = K_2^{-1} K_0 u_n + [\theta \Delta t K_2^{-1} K_0 + K_2^{-1} K_1] u_n^{(1)} + K_2^{-1} P(t_n + \theta \Delta t) \quad (6.3)$$

根据前述系统稳定性分析可知

1. $\theta \Delta t K_0 + K_1 > 0$ 系统稳定
2. $\theta \Delta t K_0 + K_1 = 0$ 临界稳定
3. $\theta \Delta t K_0 + K_1 < 0$ 系统不稳定

为保证或改进过程的稳定性,关于 θ 参数的选取原则是

1. $K_1=0$ 无阻尼情况

$$\theta \geq 0$$

2. $K_1 > 0$ 有阻尼情况

$$-\theta I \leq (\Delta t K_0)^{-1} K_1$$

(I ——单位阵)

3. $K_1 < 0$ 负阻尼情况

$$\theta I > (\Delta t K_0)^{-1} K_1$$

4. 当 $\|\theta \Delta t K_0\| \leq K_1$ 且 $K_1 > 0$ 是恒稳的。也就是由于积分格式离散化所引起的人工阻尼,如果比系统阻尼小,则计算过程恒稳。这是我们选择 θ 参数的根据。

七、数值检验

为了检验速度有限元格式的准确性和效果,在013机上计算了典型模型,位移解为

$$u(t) = \frac{F_0}{\omega} (1 - \cos \omega t) \quad (7.1)$$

的动态问题(1.1)式

系统质量、刚度均为常数并且略去阻尼影响。初始条件自静止起动。

数值检验表明,按速度有限元法,当时间步长 $\Delta t=0.01$,所得速度解以及相应加速度和位移的数值与解析解差异不大于 0.1×10^{-7} ,详见附表。实践表明,随着 $\|\theta \Delta t M^{-1} K\|$ 值增大,谱半径 $\rho(\mathcal{A})$ 相应增大。这与理论分析结果一致。

为了试验不同计算对象的时间步长值,曾在013机上计算 $N=42$ 阶质点系以及一些实例,结果表明,步长也不要太小。例如当

$$\|\theta \Delta t M^{-1} K\| \leq 0.3$$

则有

$$\rho(\mathcal{A}) \leq 1.037$$

并且仍保持较好的稳定性。

图1给出 $\Delta t=0.001$ 时的计算结果,见^[13]。

图2给出典型问题 $\Delta t=0.001$ 时,解析解与数值解之间的比较。

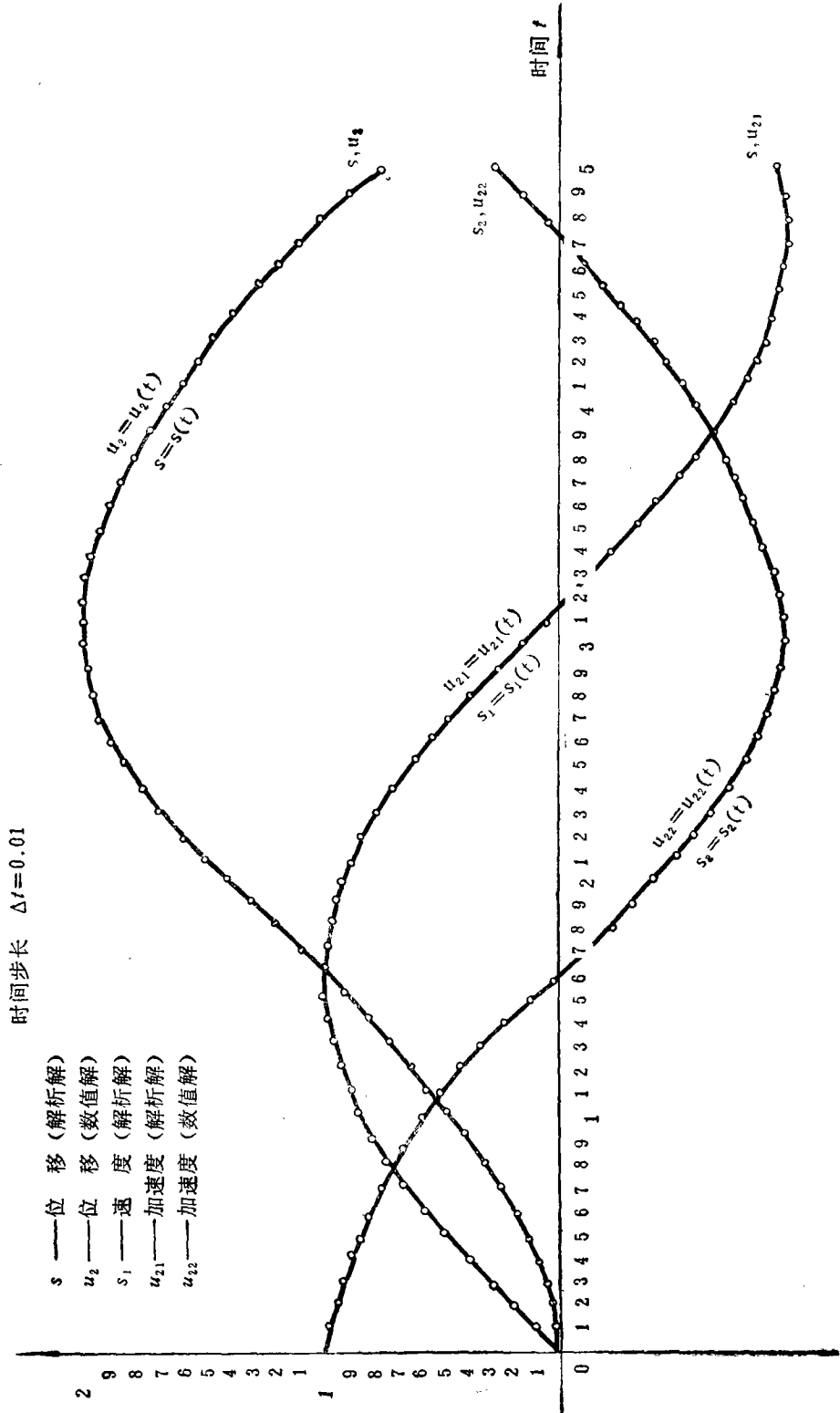


图 2 数值解与解析解比较

表 I

T 时间	位			移			速			度			加			速			度		
	数值解	解析解	误差	S	S _u	误差	数值解	解析解	误差	S ₁	S _{1,u}	误差	数值解	解析解	误差	数值解	解析解	误差	S ₂	S _{2,u}	误差
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.999875 ⁰	1.0	0	0.999875 ⁰	1.0	0	0.999875 ⁰	1.0	0
0.01	.4999583 ⁻⁴	.4999584 ⁻⁴	.5 × 10 ⁻¹²	.4999583 ⁻²	.5 × 10 ⁻¹²	.5 × 10 ⁻¹²	.999833 ⁻²	-999833 ⁻²	-999833 ⁻²	-0.25 × 10 ⁻¹¹	-0.25 × 10 ⁻¹¹	-0.25 × 10 ⁻¹¹	0.99995 ⁰	0.99995 ⁰	0.1 × 10 ⁻¹⁰	0.99995 ⁰	0.99995 ⁰	0.1 × 10 ⁻¹⁰	0.99995 ⁰	0.99995 ⁰	0.1 × 10 ⁻¹⁰
0.02	.199993 ⁻³	.199993 ⁻³	.3 × 10 ⁻¹²	.199993 ⁻¹	.3 × 10 ⁻¹²	.3 × 10 ⁻¹²	.19998 ⁻¹	.19998 ⁻¹	.19998 ⁻¹	-0.3 × 10 ⁻¹¹	-0.3 × 10 ⁻¹¹	-0.3 × 10 ⁻¹¹	.9998 ⁰	.9998 ⁰	0.2 × 10 ⁻¹⁰	.9998 ⁰	.9998 ⁰	0.2 × 10 ⁻¹⁰	.9998 ⁰	.9998 ⁰	0.2 × 10 ⁻¹⁰
0.03	.44996 ⁻³	.44996 ⁻³	-0.9 × 10 ⁻¹²	.44995 ⁻¹	-0.9 × 10 ⁻¹²	-0.9 × 10 ⁻¹²	.28995 ⁻¹	.28995 ⁻¹	.28995 ⁻¹	-0.3 × 10 ⁻¹¹	-0.3 × 10 ⁻¹¹	-0.3 × 10 ⁻¹¹	.9995 ⁰	.9995 ⁰	-0.2 × 10 ⁻¹⁰	.9995 ⁰	.9995 ⁰	-0.2 × 10 ⁻¹⁰	.9995 ⁰	.9995 ⁰	-0.2 × 10 ⁻¹⁰
0.04	.79989 ⁻³	.79989 ⁻³	0.7 × 10 ⁻¹²	.3998 ⁻¹	0.7 × 10 ⁻¹²	0.7 × 10 ⁻¹²	.3998 ⁻¹	.3998 ⁻¹	.3998 ⁻¹	-0.3 × 10 ⁻¹¹	-0.3 × 10 ⁻¹¹	-0.3 × 10 ⁻¹¹	.9992 ⁰	.9992 ⁰	.18 × 10 ⁻¹⁰	.9992 ⁰	.9992 ⁰	.18 × 10 ⁻¹⁰	.9992 ⁰	.9992 ⁰	.18 × 10 ⁻¹⁰
0.05	.1249 ⁻²	.1249 ⁻²	0.5 × 10 ⁻¹²	.4997 ⁻¹	0.5 × 10 ⁻¹²	0.5 × 10 ⁻¹²	.4997 ⁻¹	.4997 ⁻¹	.4997 ⁻¹	-0.3 × 10 ⁻¹¹	-0.3 × 10 ⁻¹¹	-0.3 × 10 ⁻¹¹	.9987 ⁰	.9987 ⁰	-0.2 × 10 ⁻¹⁰	.9987 ⁰	.9987 ⁰	-0.2 × 10 ⁻¹⁰	.9987 ⁰	.9987 ⁰	-0.2 × 10 ⁻¹⁰
0.10	.4995 ⁻²	.4995 ⁻²	0.7 × 10 ⁻¹²	.9983 ⁻¹	0.7 × 10 ⁻¹²	0.7 × 10 ⁻¹²	.9983 ⁻¹	.9983 ⁻¹	.9983 ⁻¹	-0.5 × 10 ⁻¹¹	-0.5 × 10 ⁻¹¹	-0.5 × 10 ⁻¹¹	.995 ⁰	.995 ⁰	-0.4 × 10 ⁻¹⁰	.995 ⁰	.995 ⁰	-0.4 × 10 ⁻¹⁰	.995 ⁰	.995 ⁰	-0.4 × 10 ⁻¹⁰
0.11	.6043 ⁻²	.6043 ⁻²	-0.1 × 10 ⁻¹¹	.1097 ⁰	-0.1 × 10 ⁻¹¹	-0.1 × 10 ⁻¹¹	.1097 ⁰	.1097 ⁰	.1097 ⁰	-0.6 × 10 ⁻¹¹	-0.6 × 10 ⁻¹¹	-0.6 × 10 ⁻¹¹	.9939 ⁰	.9939 ⁰	0.4 × 10 ⁻¹⁰	.9939 ⁰	.9939 ⁰	0.4 × 10 ⁻¹⁰	.9939 ⁰	.9939 ⁰	0.4 × 10 ⁻¹⁰
0.12	.6605 ⁻²	.6605 ⁻²	-0.3 × 10 ⁻¹¹	.1147 ⁰	-0.3 × 10 ⁻¹¹	-0.3 × 10 ⁻¹¹	.1147 ⁰	.1147 ⁰	.1147 ⁰	-0.2 × 10 ⁻¹¹	-0.2 × 10 ⁻¹¹	-0.2 × 10 ⁻¹¹	.9933 ⁰	.9933 ⁰	0.3 × 10 ⁻¹⁰	.9933 ⁰	.9933 ⁰	0.3 × 10 ⁻¹⁰	.9933 ⁰	.9933 ⁰	0.3 × 10 ⁻¹⁰
0.20	.1993 ⁻¹	.1993 ⁻¹	-0.4 × 10 ⁻¹²	.1986 ⁰	-0.4 × 10 ⁻¹²	-0.4 × 10 ⁻¹²	.1986 ⁰	.1986 ⁰	.1986 ⁰	0	0	0	.9800 ⁰	.9800 ⁰	0.2 × 10 ⁻⁹	.9800 ⁰	.9800 ⁰	0.2 × 10 ⁻⁹	.9800 ⁰	.9800 ⁰	0.2 × 10 ⁻⁹
0.30	.4466 ⁻¹	.4466 ⁻¹	0.18 × 10 ⁻¹¹	.2955 ⁰	0.18 × 10 ⁻¹¹	0.18 × 10 ⁻¹¹	.2955 ⁰	.2955 ⁰	.2955 ⁰	0.1 × 10 ⁻¹⁰	0.1 × 10 ⁻¹⁰	0.1 × 10 ⁻¹⁰	.9553 ⁰	.9553 ⁰	0.3 × 10 ⁻⁹	.9553 ⁰	.9553 ⁰	0.3 × 10 ⁻⁹	.9553 ⁰	.9553 ⁰	0.3 × 10 ⁻⁹
0.40	.7893 ⁻¹	.7893 ⁻¹	0.47 × 10 ⁻¹¹	.3894 ⁰	0.47 × 10 ⁻¹¹	0.47 × 10 ⁻¹¹	.3894 ⁰	.3894 ⁰	.3894 ⁰	0.1 × 10 ⁻¹⁰	0.1 × 10 ⁻¹⁰	0.1 × 10 ⁻¹⁰	.9210 ⁰	.9210 ⁰	0.3 × 10 ⁻⁹	.9210 ⁰	.9210 ⁰	0.3 × 10 ⁻⁹	.9210 ⁰	.9210 ⁰	0.3 × 10 ⁻⁹
0.50	.1224 ⁰	.1224 ⁰	0.54 × 10 ⁻¹¹	.4794 ⁰	0.54 × 10 ⁻¹¹	0.54 × 10 ⁻¹¹	.4794 ⁰	.4794 ⁰	.4794 ⁰	0.7 × 10 ⁻¹¹	0.7 × 10 ⁻¹¹	0.7 × 10 ⁻¹¹	.8775 ⁰	.8775 ⁰	-0.1 × 10 ⁻¹⁰	.8775 ⁰	.8775 ⁰	-0.1 × 10 ⁻¹⁰	.8775 ⁰	.8775 ⁰	-0.1 × 10 ⁻¹⁰
1.0	.4596 ⁰	.4596 ⁰	0.9094 × 10 ⁻¹²	.8414 ⁰	0.9094 × 10 ⁻¹²	0.9094 × 10 ⁻¹²	.8414 ⁰	.8414 ⁰	.8414 ⁰	-0.7 × 10 ⁻¹⁰	-0.7 × 10 ⁻¹⁰	-0.7 × 10 ⁻¹⁰	.5403 ⁰	.5403 ⁰	-0.4 × 10 ⁻⁹	.5403 ⁰	.5403 ⁰	-0.4 × 10 ⁻⁹	.5403 ⁰	.5403 ⁰	-0.4 × 10 ⁻⁹
1.57	.9992 ⁰	.9992 ⁰	-0.5 × 10 ⁻¹⁰	.9999 ⁰	-0.5 × 10 ⁻¹⁰	-0.5 × 10 ⁻¹⁰	.9999 ⁰	.9999 ⁰	.9999 ⁰	-0.1 × 10 ⁻⁹	-0.1 × 10 ⁻⁹	-0.1 × 10 ⁻⁹	.7963 ⁻³	.7963 ⁻³	0.4 × 10 ⁻⁹	.7963 ⁻³	.7963 ⁻³	0.4 × 10 ⁻⁹	.7963 ⁻³	.7963 ⁻³	0.4 × 10 ⁻⁹
2.0	1.416	1.416	-0.1 × 10 ⁻⁹	.9092 ⁰	-0.1 × 10 ⁻⁹	-0.1 × 10 ⁻⁹	.9092 ⁰	.9092 ⁰	.9092 ⁰	-0.2 × 10 ⁻⁸	-0.2 × 10 ⁻⁸	-0.2 × 10 ⁻⁸	-0.4161 ⁰	-0.4161 ⁰	-0.1 × 10 ⁻⁸	-0.4161 ⁰	-0.4161 ⁰	-0.1 × 10 ⁻⁸	-0.4161 ⁰	-0.4161 ⁰	-0.1 × 10 ⁻⁸
3.14	1.999	1.999	-0.3 × 10 ⁻⁹	.1592 ⁻²	-0.3 × 10 ⁻⁹	-0.3 × 10 ⁻⁹	.1592 ⁻²	.1592 ⁻²	.1592 ⁻²	-0.3 × 10 ⁻¹⁰	-0.3 × 10 ⁻¹⁰	-0.3 × 10 ⁻¹⁰	-0.999 ⁰	-0.999 ⁰	0.3 × 10 ⁻⁹	-0.999 ⁰	-0.999 ⁰	0.3 × 10 ⁻⁹	-0.999 ⁰	-0.999 ⁰	0.3 × 10 ⁻⁹
4.0	1.653	1.653	-0.2 × 10 ⁻⁹	-0.7568 ⁰	-0.2 × 10 ⁻⁹	-0.2 × 10 ⁻⁹	-0.7568 ⁰	-0.7568 ⁰	-0.7568 ⁰	0.2 × 10 ⁻⁹	0.2 × 10 ⁻⁹	0.2 × 10 ⁻⁹	-0.6536 ⁰	-0.6536 ⁰	0.5 × 10 ⁻⁹	-0.6536 ⁰	-0.6536 ⁰	0.5 × 10 ⁻⁹	-0.6536 ⁰	-0.6536 ⁰	0.5 × 10 ⁻⁹
5.0	0.7163	0.7163	0.1 × 10 ⁻⁹	-0.9589 ⁰	0.1 × 10 ⁻⁹	0.1 × 10 ⁻⁹	-0.9589 ⁰	-0.9589 ⁰	-0.9589 ⁰	0.4 × 10 ⁻⁹	0.4 × 10 ⁻⁹	0.4 × 10 ⁻⁹	0.2836 ⁰	0.2836 ⁰	0.3 × 10 ⁻¹⁰	0.2836 ⁰	0.2836 ⁰	0.3 × 10 ⁻¹⁰	0.2836 ⁰	0.2836 ⁰	0.3 × 10 ⁻¹⁰

表 II

$\theta \Delta t M^{-1} K$	$\lambda_1; \lambda_2$	$\lambda_3; \lambda_4$	$\rho(\mathcal{A})$
0.01	-0.1000'	0.9999	1.000
0.02	-0.1000'	0.9997	1.000
0.03	-0.1000'	0.9992	1.000
0.04	-0.1000'	0.9984	1.000
0.05	0.9947	-1.000	1.000
0.06	-1.001	0.9961	1.001
0.07	-1.001	0.9946	1.001
0.08	-1.002	0.9928	1.002
0.09	-1.002	0.9908	1.002
0.10	-1.003	0.9885	1.003
0.12	-1.005	0.9832	1.005
0.14	-1.007	0.9769	1.007
0.16	0.9697	-1.009	1.009
0.18	-1.012	0.9615	1.012
0.20	0.9523	-1.015	1.015
0.30	-1.037	0.8925	1.037
0.40	-1.341	0.8111	1.341
0.50	-1.566	0.7107	1.566

参 考 文 献

1. Houbolt, J. C., A Recurrence Matrix Solution for the Dynamic Response of Elastic Aircraft, *J. Aeronaut. Sci.*, 17, (1950), 540—550.
2. Newmark, N. M., A Method of Computation for Structural Dynamics, *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, 85, EM3, (1959), 67—94.
3. Chan, S. P. and Cox, H. L., Transient Analysis of Forced Vibrations of Complex Structural-Mechanical Systems, *JLR. Aeronaut. Soc.* 66, (1962), 457—460.
4. Gurtin, M. E., Variational Principles for Linear Elasto-Dynamics, *Archs. Ration. Mech. Analysis*, 16, (1964), 34—50.
5. Wilson, E. L., A Computer Program for the Dynamic Stress Analysis of Underground Structures, Report №88—1, Univ. of Calif, Berkeley, (1968)
6. Zienkiewicz, O. C., A New Look at the Newmark, Houbolt and Other Time Stepping Formulas.; A Weighted Residual Approach, *Earth. Eng. Stru. Dyna.*, 5, (1977) 413—418.
7. Hilber, H. M., Collocation Dissipation and 'Overshoot' for Time Integration Schemes in Structural Dynamics, *EARTH, ENG. and STRU. DYNA.*, 6, (1978), 99—117.
8. Richtmyer, Robert D., Difference Methods for Initial-Value Problems, Interscience Publishers New York, (1967).
9. 钱伟长, 变分法及有限元法, (1978).
10. Connor J. J., 流体流动的有限元技术, (1976).
11. 杨真荣、徐萃薇、王大钧、周本华、魏泽光, 有限元法动力分析, (1973) 748 (全国计算技术)

会议文选

12. 沈崇刚、陈厚群、杨真荣等, 新丰江水库地震及其对大坝的影响。中国科学XVII, 2 (1974), 国际大坝会议11届会论文。
13. 徐宗和、罗学海、杨真荣等, 新丰江水库诱发地震的强震观测, 国际诱震第一届学术讨论会报告 (1975)。
14. 杨真荣, 动力问题的有限单元法, 科学院计算所, (1975)。
15. 平面框架非线性地震反应分析初探, 科学院计算所、建研院等, (1978)

“Velocity” Finite Element Method for Dynamic Problem

Yang Zhen-rong

(Computer Center, Academia Sinica, Peking)

Abstract

After analysing the features of successive integration method taking displacement as variable by N. M. Newmark and E. L. Wilson et al, this paper presents a “Velocity” Element Method, taking velocity as variable for the solution of the initial value problem.

A simplified scheme is offered for the non-damping system, and the stability is also discussed. Owing to the fact that this simplified scheme for non-damping and apparent static damping is explicit in form, it is unnecessary to solve the algebraic system of equations at every time interval, consequently the amount of computation is greatly reduced. For non-linear dynamic problems, this scheme may be used to obtain fairly good initial values for iteration.

An extended form of “Velocity” Element is presented for the random damping system. For the non-linear cases, the incremental Velocity iteration scheme is adopted and its convergence proved. Some discussions have been given on artificial damping and the effect of the parameter θ .

Finally, the results of numerical calculation of some typical problems are given in the appendix.