

低频交变磁场对于刚性直圆管中 脉动流的影响*

孙东宁¹ 吴望一¹

(1995年10月5日收到)

摘 要

本文通过求解交变磁场作用下刚性直圆管脉动流的运动方程, 得到了它的分析解, 计算了流速分布及阻抗. 计算结果对于深入了解低频磁场对于血液动力学的影响以及它的临床应用具有一定参考价值.

关键词 低频交变磁场 脉动流 阻抗 阻抗比值

磁疗作为一种有效的医疗手段, 在医学上有着广泛的应用. 近年来, 人们对磁场在降粘、降压、降糖尿、抗血栓、抗高凝血等方面的作用进行了动物和临床研究, 收到了良好的效果^{[1][2]}. 为什么外加磁场在治疗心血管系统的某些疾病上有效, 这个机理问题迄今还没有进行充分的研究. 它可能涉及生理、病理和血液动力学等诸多因素. 为了简单起见, 我们的注意力集中在磁场对血液动力学的影响上. 不久前, 冯忠刚和吴望一^[3]研究了恒磁场对刚性直圆管中脉动流的影响. 结果表明, 短时间内恒磁场对人体血液循环起阻碍作用; 但磁场达到一定强度且作用时间足够长后, 由于磁场降低了血液粘度^[4], 外加磁场对血液流动起促进作用, 使流量增加, 阻抗下降. 研究还表明磁场作用在中小血管上较作用在大血管更为有效. 由于在临床治疗中, 除恒磁场外还广泛采用低频交变磁场, 因此, 本文在文[3]基础上进一步研究了低频交变磁场对于刚性直圆管中血液脉动流的影响. 根据导出的分析解, 计算了不同强度和频率的交变磁场对于流动阻抗的影响. 所得结果对于深入研究磁场对于血液动力学的影响以及它的临床应用具有一定参考价值.

一、问题的数学提法及分析解

和文[3]一样, 将血管简化为无限长刚性直圆管, 其结果如速度分布、阻抗等不仅对动脉脉动流的研究具有参考价值, 而且也是进一步研究变形血管中脉动流的基础. 其次, 我们将血液考虑为粘性、不可压缩、弱导电的牛顿流体. 设低频交变磁场均匀地施加于与管轴垂

* 国家自然科学基金资助课题

¹ 北京大学力学与工程科学系, 北京 100871

直的平面上, 其强度为 $H(t)$, 频率不高于10赫兹 (如图1所示)。设磁雷诺数较小, 相对于外加磁场而言, 感应磁场可忽略不计。考虑到上述简化条件及径向速度 $v=0$ 后, 轴对称磁流体力学方程组在图1所示的柱坐标系中可简化为:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{\sigma H^2}{\rho c^2} u \quad (1.1)$$

其中, u 为轴向流速, p 为压力, ρ 为血液密度, ν 是血液的运动学粘性系数, H 为磁场强度, 它是时间 t 的函数, c 是光速, σ 是血液导电率。和无磁场时的方程相比, 多了一项磁场对导电体的 Lorentz 力 $-\sigma H^2 u / \rho c^2$ 。注意到, 方程(1.1) 是线性方程。不失一般性, 可取压力梯度 $\partial p / \partial x$ 为简谐波的形式。对于一般形式的 $\partial p / \partial x$, 可将其展成 Fourier 级数, 将每个谐波结果迭加起来即得一般情况的解。令

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = A \exp[i\omega_1 t], \quad H = H_0 \exp\left[i\frac{\omega_2}{2} t\right] \quad (1.2)$$

其中 A 为压力梯度振幅, ω_1 为压力脉动的圆频率, H_0 为交变磁场的振幅, $\omega_2/2$ 为磁场的圆频率, 引入无量纲径向坐标 y 及 Hartman 数 K

$$y = r/a, \quad K = \sqrt{\sigma H_0^2 a^2 / \rho \nu c^2} \quad (1.3)$$

则方程(1.1) 转化为

$$\frac{a^2}{\nu} \frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) - K^2 \exp\left[i\frac{\omega_2}{2} t\right] u + \frac{Aa^2}{\rho \nu} \exp[i\omega_1 t] \quad (1.4)$$

现在我们求方程(1.4) 的分析解。令 $u_n(y, t) = Y_n(y) T_n(t)$, 代入与(1.4) 式相应的齐次方程 (没有(1.4) 式中的最后一项), 得

$$Y_n = J_0(\lambda_n y) \quad (1.5)$$

式中 J_0 是复变量第一类零阶 Bessel 函数, $\lambda_n (n=1, 2, 3, \dots)$ 是 $J_0(x)$ 的第 n 阶零点, 注意在求得(1.5) 式时已利用了边界条件 $y=1$ 时, $Y_n=0$ 及解在对称轴上有限的条件, 考虑到

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_n J_1(\lambda_n)} J_0(\lambda_n x) \quad 0 < x < 1 \quad (1.6)$$

我们可将(1.4) 式的非齐次项写成

$$\frac{Aa^2}{\rho \nu} \exp[i\omega_1 t] = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) J_0(\lambda_n y) \quad (1.7)$$

其中

$$f_n(t) = \frac{2Aa^2}{\rho \nu} \exp[i\omega_1 t] \frac{1}{\lambda_n J_1(\lambda_n)} \quad (1.8)$$

现在令

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) J_0(\lambda_n y) \quad (1.9)$$

代入(1.4) 式得

$$T_n' + \frac{\nu}{a^2} \left[\lambda_n^2 + K^2 \exp\left[i\frac{\omega_2}{2} t\right] \right] T_n(t) = \frac{\nu}{a^2} f_n(t) \quad (1.10)$$

它的解是

$$T_n(t) = \exp\left[-\frac{\nu}{a^2} \lambda_n^2 t - \frac{\nu}{a^2} \frac{K^2}{\omega_2} (\sin \omega_2 t - i \cos \omega_2 t + i)\right] \cdot [I_n(t) + C_n] \quad (1.11)$$

其中

$$I_n(t) = \frac{2A}{\rho} \frac{1}{\lambda_n J_1(\lambda_n)} \int_0^t \exp(i\omega_1 \tau) \cdot \exp\left[-\frac{\nu}{a^2} \lambda_n^2 \tau + \frac{\nu}{a^2} \frac{K^2}{\omega_2} (\sin\omega_2 \tau - i \cos\omega_2 \tau + i)\right] d\tau \quad (1.12)$$

C_n 是积分常数, 由初始条件确定. 设初始条件为 $t=0$ 时, $u=u_0(y)$, 将 $u=u_0(y)$ 展成Bessel函数, 有

$$u_0(y) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n J_0(\lambda_n y) \quad (1.13)$$

其中

$$g_n = \frac{2}{J_1^2(\lambda_n)} \int_0^1 y J_0(\lambda_n y) u_0(y) dy \quad (1.14)$$

则

$$T_n(t) = \exp\left[-\frac{\nu}{a^2} \lambda_n^2 t - \frac{\nu}{a^2} \frac{K^2}{\omega_2} (\sin\omega_2 t - i \cos\omega_2 t + i)\right] \cdot [I_n(t) + g_n] \quad (1.15)$$

根据实际情况, 初始条件的取法可以是多种多样的. 但在外力强迫作用下, 初始条件的影响迅速衰减, 对结果影响不大. 本文的数值实验证实了这一点. 下面我们取无磁场时的对应解作为初始条件, 此时

$$u_0(y) = \frac{Aa^2}{i\alpha^2 \rho \nu} \left\{ 1 - \frac{J_0[(\beta + i\gamma)y]}{J_0(\beta + i\gamma)} \right\}, \quad i=0 \quad (1.16)$$

式中 α 是Womersley数, $\beta + i\gamma = \sqrt{i^3 \alpha^4}$. 下面列出计算流量 Q 和纵向阻抗 Z 的公式

$$Q = \int_0^a 2\pi r u dr = 2\pi a^2 \int_0^1 y u(y) dy \quad (1.17)$$

$$Z = -\frac{\partial p}{\partial x} / Q = \frac{A \exp[i\omega_1 t]}{Q} \quad (1.18)$$

纵向阻抗也可表示为

$$Z = R_z + iI_z = |Z| \exp[i\theta_z] \quad (1.19)$$

其中实部 R_z 为流阻, 虚部 I_z 为流感, $|Z|$ 为阻抗模, θ_z 为阻抗相位. 本文选用交变磁场下流体阻抗模与无磁场时流体阻抗模之比值(下文简称阻抗比值)作为反映磁场影响的基本参量.

二、计算结果与分析

在计算中血液密度和运动学粘度取 $\rho = 1.06 \text{ g/cm}^3$, $\nu = 0.04 \text{ cm}^2/\text{s}$. 取Womersley数 $\alpha = 3.34 \sim 18.37$, 人体中动脉脉动流的Womersley数大体包括在这个范围内, 取Hartman数 $K = 0.25 \sim 1.0$, 相当于磁场强度几千至二万多高斯, 基本上覆盖了临床应用的范围. 低频磁场脉动频率取 $1.5 \sim 10 \text{ Hz}$ (即 $\omega_2 = 9.42 \sim 62.8$), 与临床使用的频率相一致. 压力脉动频率取 1.2 Hz (心搏基频, 相当于心搏72次/分, $\omega_1 = 7.576$). 为简单起见, 压力振幅 A 取 1.0 g/cm^3 . 现在我们分析所得的计算结果. 先讨论阻抗比值的结果. 由图2可知, 在交变磁场下, 与定常磁场不同, 阻抗比值不再是一个定值, 而是交变的. 由于压力变化的

频率与磁场频率不同，发生调制现象。阻抗比值周期性波动，幅值包络是一条周期变化的曲线（见图2）。注意，这里幅值指阻抗比值曲线极大值点与曲线的中值的差值。称阻抗模比值曲线最大幅值与最小幅值的差为包络的幅值差，记作 ΔR_a 作为描述调制现象的基本参量（见图3）。由图4可知，当 $\alpha < 6.68$ ， ΔR_a 接近于零，调制现象存在但并不明显，当 $\alpha > 6.68$ 时， ΔR_a 随 α ， K 增大而单调增大，调制现象较为明显。阻抗模比值存在着交变的基本周期 T_b 和调制周期 T_m 。 T_b 与心搏周期很接近，交变磁场未对流动周期产生强烈的干扰。阻抗比值的最大值 R_{max} 与 α ， K ， ω_1 ， ω_2 相关，生理条件下， ω_1 变化不大。所以着重分析 R_{max} 对 α ， K ， ω_2 的依赖关系。在相同的 K ， ω_2 下，随着 α 的增大， R_{max} 减小，接近不加磁场时流体阻抗，但略大于后者；在相同 α ， ω_2 下，随着 K 增大， R_{max} 增大（见图5）。在相同 α ， K 下，

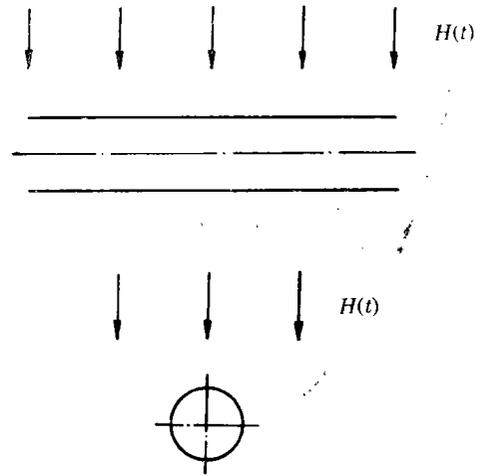
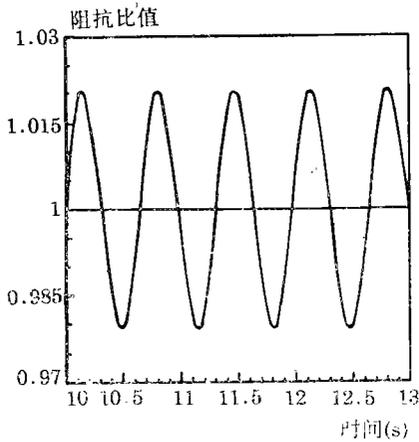
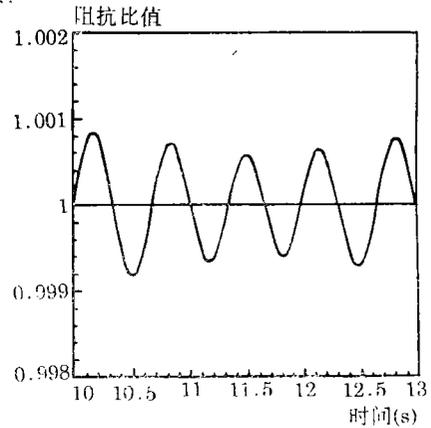


图1 外加磁场示意图



$\alpha = 3.34, K = 0.75, \omega_2 = 9.42$



$\alpha = 18.37, K = 0.75, \omega_2 = 9.42$

图2 阻抗比值的周期性变化

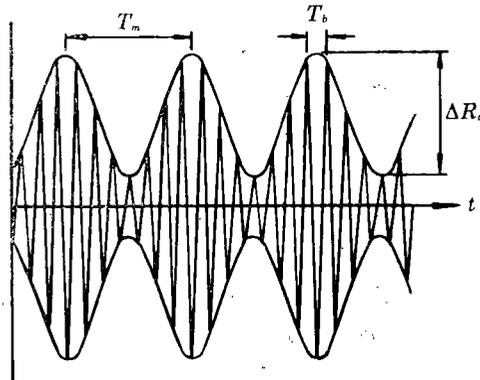
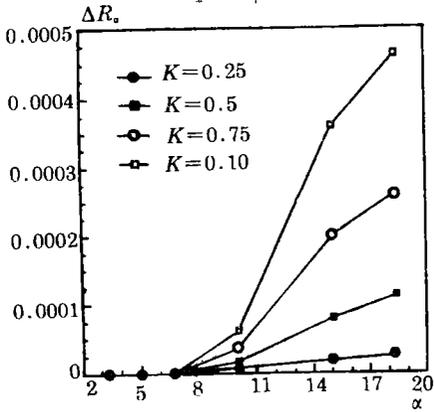
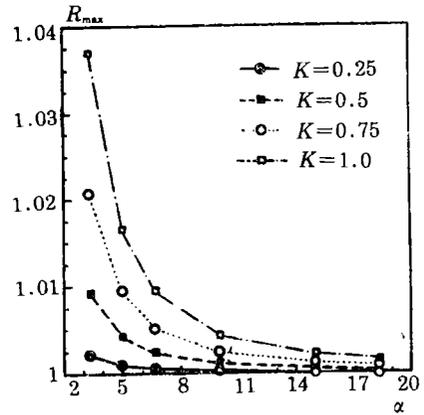


图3 调制参量的定义



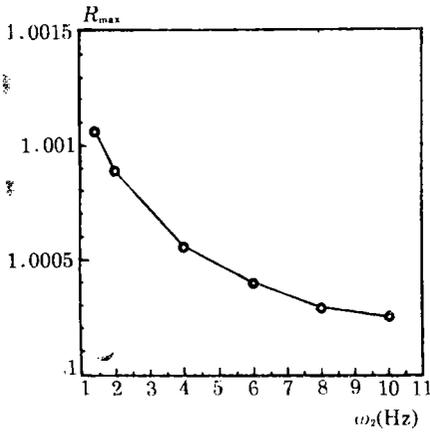
$\omega_2 = 9.42$

图4 包络相位差 ΔR_σ 关于 α , K 的变化



$\omega_2 = 9.42$

图5 R_{max} 关于 α , K 的变化



$\alpha = 10.02, K = 0.5$

图6 R_{max} 关于 ω_2 的变化

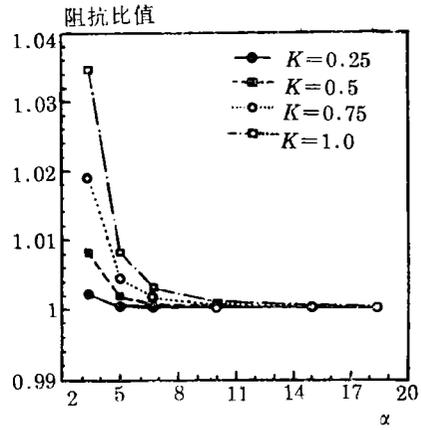
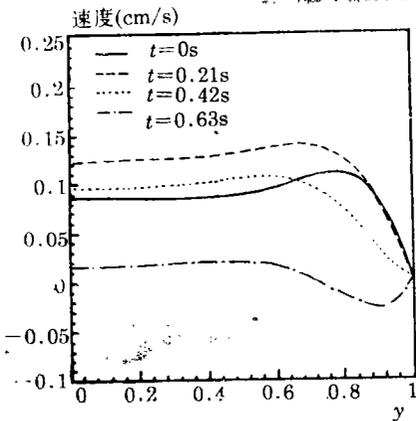
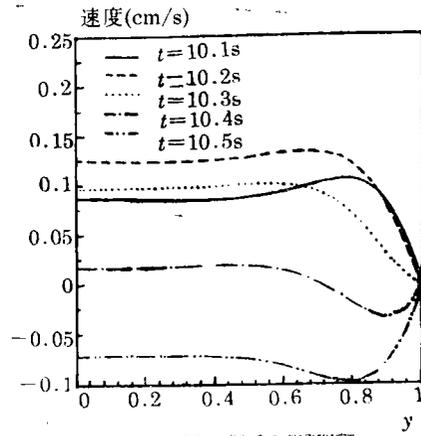


图7 定常磁场下阻抗比值关于 α , K 的变化



$\alpha = 10.02, K = 0.5$

图8 定常磁场下速度剖面



$\alpha = 10.02, K = 0.5, \omega_2 = 9.42$

图9 交变磁场下速度剖面

随着外加磁场频率 ω_2 的增大, R_{\max} 减小, 但仍大于1.0, 即交变磁场下流体阻抗最大值大于不加磁场时流体阻抗(见图6)。图5和图7表明, 与定常磁场情况相比, 在相同的 α , K 和 ω_1 下, 交变磁场作用下阻抗模最大值大于定常磁场下流体阻抗模。阻抗比值的平均值也与 α , K , ω_1 , ω_2 相关, 其规律与阻抗比最大值 R_{\max} 变化类似, 但非常接近于1, 这显然优于定常磁场情况。图8和图9显示了定常磁场和交变磁场下的速度剖面, 它们的基本形状相近。但是也应看到, 与定常磁场相比, 交变磁场靠近中轴线附近速度变化平缓, 而在近壁面处则发生了强烈变化, 有较大的切变率; 而且未出现拟抛物形速度剖面, 这可能与压力周期与磁场周期不一致有关。

三、结 论

通过上述对交变磁场作用下, 刚性直圆管中血液流动性态的动力学计算及与无磁场情形和定常磁场的比较, 可得到如下结论: 交变磁场作用下, 阻抗比值将发生周期变化, 并有调制现象发生。当 K 取磁疗时的实用值时, 交变磁场下的阻抗与无磁场情况下的阻抗相差很小, 阻抗比值平均值基本上等于1, 略小于定常磁场下阻抗比值, 阻抗比值最大值也很接近1, 即交变磁场下流体阻抗基本围绕无磁场时阻抗作小幅度振动。不同参数下未发现流磁共振现象。另外, 计算中发现, 在交变磁场作用下, 近壁面处剪切率有所增大。

参 考 文 献

- [1] 孙好明、常吉成, 对磁治疗高血压200例临床疗效观察, 《磁疗法及其应用》, 西安市科学技术情报研究所(1978), 25—26.
- [2] 周崇文、吴望一、温功碧、陈建国, 恒磁场对豚鼠血液流变性质影响的实验研究, 中国生物工程学报, 15(1)(1996), 1—5.
- [3] 冯忠刚、吴望一, 恒磁场对刚性圆直管中脉动流的影响, 应用数学和力学, 16(6)(1995), 485—494.

The Influence of Low-Frequency Varying Magnetic Field on the Pulsatile Flow in a Rigid Round Tube

Sun Dongning Wu Wangyi

(Department of Mechanics and Engineering Science,
Peking University, Beijing 100871, P. R. China)

Abstract

In this paper, the analytic solution of the dynamical equation of the pulsatile flow in a rigid round tube under the low-frequency varying magnetic field is obtained. The velocity distribution and the flow impedance are calculated. The results are valuable for understanding the influence of low-frequency varying magnetic field on hemodynamics and its clinical application.

Key words low-frequency varying magnetic field, pulsatile flow, impedance, impedance ratio