应用数学和力学，第18卷 第2期 (1997年2月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

关于弹性力学平面问题中的主轴应力坐标

黄民丰[1]

(潘立宙推荐，1995年4月5日收到)

摘　　要

本文中讨论了弹性力学平面问题中由主轴应力曲线构成的正交曲线坐标系上的平衡方程，以及解的特性．同时，认为在弹性力学中还存在另一种构造解的方式，即可通过直接构造主轴应力正交网络获得主轴应力的解．

关键词　平衡微分方程　弹性力学　主轴应力　正交曲线坐标　平面问题

一、前　　言

在弹性力学中，若已知所有边界上的力的分布，可由平衡方程获得应力的解，如应力函数法．在构造应力函数时，应力函数一般需满足调和方程或双调和方程[1,2]，限制了解析解的类型，使许多问题无法获得解析解．实际上，对于弹性力学问题，任意分布的应力都可以通过适当的变换使之构成主轴应力网络，沿主轴应力方向截取的微元上，剪应力为0，使参与平衡的未知数也相应地减少．对于弹性平面问题，未知数仅为两个，从而构成了由平衡微分方程直接获得解的可能性．

由于主轴应力网络是一族正交曲线，本文将主要讨论平面问题中，在正交曲线坐标上的平衡微分方程，方程的其它形式，并通过简单的例子讨论解的特征．

二、在正交曲线坐标上的平衡方程

设一族正交曲线由曲线坐标s_1和s_2组成，如图1所示．若沿坐标s_1或s_2截取的微元上无剪应力作用，即$\tau_{12}=\tau_{21}=0$，该曲线与主轴应力构造的正交曲线网络是等价的．不失一般性，可令主轴应力σ_1与坐标s_1的方向一致，σ_2与s_2方向一致，则在截取的微元上仅有主轴应力σ_1和σ_2．

沿s_1方向的平衡为

$$\left(\sigma_1+\frac{\partial\sigma_1}{\partial s_1}ds_1\right)ds_2'+\sigma_2 ds_1'\sin(\widehat{ds_1,ds_1'})-\sigma_1 ds_2=0 \tag{2.1}$$

其中　　$ds_2'=ds_2+\Delta ds_2$，$ds_1'=ds_1+\Delta ds_1$

Δds_2是微元ds_2沿ds_1方向变化时产生的变化值，Δds_1是微元ds_1沿ds_2方向变化时的变化值．

---

1 北京市房地产科学技术研究所，北京 100021

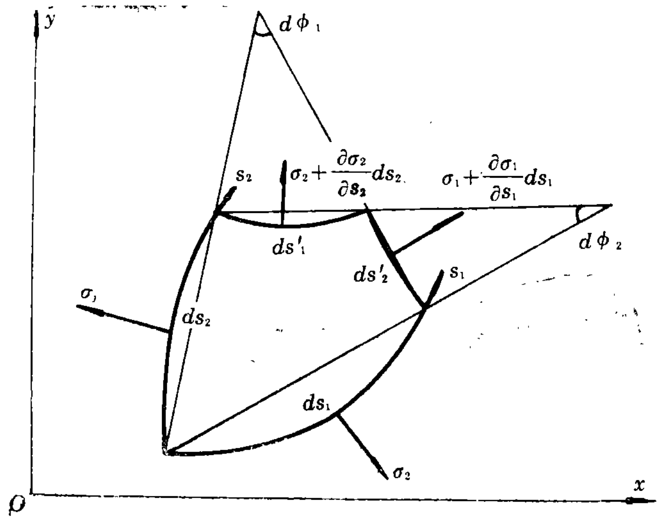

图1　正交曲线坐标中的微元

$\widehat{ds_1,ds_2^1}$是线元ds_1与ds_1^1之间的夹角，也是曲线坐标s_2在ds_2变化时方向的改变。

根据微分几何[3]的知识，曲线坐标的线长与该曲线的曲率有关。设曲线s_1的曲率为κ_1，曲线s_2的曲率为κ_2，则存在一微小转角$d\phi_1$和$d\phi_2$，使

$$d\phi_1=\kappa_1 ds_1,\quad d\phi_2=\kappa_2 ds_2 \tag{2.2}$$

则

$$\left.\begin{aligned}&\Delta ds_1=-d\phi_1\,ds_2=-\kappa_1 ds_1 ds_2\\&\Delta ds_2=-d\phi_2\,ds_1=-\kappa_2 ds_1 ds_2\\&\sin(\widehat{ds_1,ds_1^1})=d\phi_2 ds_1=\kappa_2 ds_1 ds_2\end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

代入式(2.1)，沿s_1方向的平衡为

$$\left[\frac{\partial\sigma_1}{\partial s_1}+\kappa_2(\sigma_2-\sigma_1)\right]ds_1ds_2+\left[-\frac{\partial\sigma_1}{\partial s_1}\kappa_2+\sigma_2\kappa_1\kappa_2\right]ds_1^2ds_2=0$$

略去高阶小量，我们可以获得沿s_1方向的平衡微分方程

$$\frac{\partial\sigma_1}{\partial s_1}+\kappa_2(\sigma_2-\sigma_1)=0 \tag{2.4}$$

同理，沿s_2方向上的平衡方程

$$\frac{\partial\sigma_2}{\partial s_2}+\kappa_1(\sigma_1-\sigma_2)=0 \tag{2.5}$$

若考虑体力，则平衡方程为

$$\frac{\partial\sigma_1}{\partial s_1}+\kappa_2(\sigma_2-\sigma_1)+F_1=0,\quad \frac{\partial\sigma_2}{\partial s_2}+\kappa_1(\sigma_1-\sigma_2)+F_2=0 \tag{2.6}$$

式中F_1，F_2分别是沿s_1，s_2方向的体力。

由平衡方程可见，若已知主方向的曲率κ_1和κ_2，可直接由方程求解主轴应力σ_1和σ_2。未知数量与方程数量相同，可转换为一个未知数的偏微分方程，在已知边界条件的情况下，具有可解性。

由于曲线与曲率是相互对应的[3]，为获得主轴应力的解必须通过假设正交的主轴应力曲线，这种解方式是半解析的。

三、主轴应力σ_1和σ_2的特征以及平衡方程的变换形式

一般来说，我们不易直接构造由曲线s_1和s_2组成的正交坐标系，而且由于正交曲线的随意性，需要适当的参考坐标系，简洁的方式是参考直角坐标系xOy，所以可通过参数u，v来构造正交坐标系。

参数u，v表示的曲线方程为

$$u=u(x,\ y),\quad v=v(x,\ y)$$

相应的逆变换为

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v)$$

$u=c$和$v=c$分别代表了两族曲线。若考虑正交坐标系，$u=c$与$s_1=c$是等价的，即$u=c$曲线的切向与坐标s_1一致，法向与坐标s_2一致。则微分ds_1，ds_2也可相应地由du和dv表示：

$$ds_1=r_1du=\sqrt{x_u^2+y_u^2}\,du,\quad ds_2=r_2dv=\sqrt{x_v^2+y_v^2}\,dv \tag{3.1}$$

式中x_u，y_u表示x，y对u的导数，x_v，y_v代表x，y对v的导数.相应地，曲率κ_1，κ_2可表示为（见附录的推导）：

$$\kappa_1=-\frac{1}{r_1}\frac{\partial r_1}{\partial s_2},\quad \kappa_2=-\frac{1}{r_2}\frac{\partial r_2}{\partial s_1} \tag{3.2}$$

若令

$$\sigma_1'=r_2\sigma_1,\quad \sigma_2'=r_1\sigma_2$$

则有

$$\frac{\partial\sigma_1}{\partial s_1}=\frac{\partial\sigma_1'}{\partial s_1}\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_2^2}\frac{\partial r_2}{\partial s_1}\sigma_1'=\frac{1}{r_2}\frac{\partial\sigma_1'}{\partial s_1}+\frac{\kappa_2}{r_2}\sigma_1'$$

$$\frac{\partial\sigma_2}{\partial s_2}=\frac{1}{r_1}\frac{\partial\sigma_2'}{\partial s_2}+\frac{\kappa_1}{r_1}\sigma_2'$$

代入平衡方程(2.4)和(2.5)，

$$\frac{1}{r_2}\frac{\partial\sigma_1'}{\partial s_1}+\frac{\kappa_2}{r_1}\sigma_2'=0,\quad \frac{1}{r_1}\frac{\partial\sigma_2'}{\partial s_2}+\frac{\kappa_1}{r_2}\sigma_1'=0 \tag{3.3}$$

利用式(2.2)和式(3.1)的几何关系，式(3.3)转换为

$$\frac{\partial\sigma_1'}{\partial u}+\frac{\partial\phi_2}{\partial v}\sigma_2'=0,\quad \frac{\partial\sigma_2'}{\partial v}+\frac{\partial\phi_1}{\partial u}\sigma_1'=0$$

因为曲线s_1和s_2是正交的，那么$\phi_2=\phi_1+\pi/2=\phi$，$d\phi_1=d\phi_2=d\phi$，则

$$\frac{\partial\sigma_1'}{\partial u}+\frac{\partial\phi}{\partial v}\sigma_2'=0,\quad \frac{\partial\sigma_2'}{\partial v}+\frac{\partial\phi}{\partial u}\sigma_1'=0 \tag{3.4}$$

方程(3.3)和(3.4)是以后用于解弹性力学平面问题的主要形式。而$\sigma_1'=r_2\sigma_1$和$\sigma_2'=\sigma_2r_1$中r_1和r_2可称为有关σ_1，σ_2的特征值，它直接的几何意义是曲线坐标的特征长度，在以后的例子中，我们将进一步分析它们的意义。

四、简单的例子

考虑半无限平面上作用一集中力P的弹性力学问题。根据弹性力学的解析解，其主轴应

力是极坐标中的σ_r和σ_θ[1]，即是由$\cos\phi=u$和$r=v$构成主轴应力网络。因此，我们可设正交曲线族为

$$u^2=\frac{x^2}{x^2+y^2},\quad v^2=x^2+y^2$$

逆变换为

$$x=uv,\quad y=v\sqrt{1-u^2}$$

则特征长度

$$r_1^2=x_u^2+y_u^2=\frac{v^2}{1-u^2},\quad r_2^2=x_v^2+y_v^2=1$$

平衡方程为

$$\frac{\partial\sigma_1'}{\partial u}=0,\quad \frac{\partial\sigma_2'}{\partial v}+\frac{\partial\phi}{\partial u}\sigma_1'=0$$

由边界条件$u^2=1$有$\sigma_1=0$，可使$\sigma_1'=0$，$\sigma_2'=c$，则

$$\sigma_1=\sigma_1'/r_2=0,\quad \sigma_2=\sigma_2'/r_1=c\sin\phi/r,\quad r=\sqrt{x^2+y^2}$$

这个解的形式与弹性力学中解的形式相同。图2显示了该问题的主轴应力曲线：$x=0$时是切力P作用的结果；$y=0$时是垂直力P作用的结果；$y=\mathrm{tg}\alpha\cdot x$时是任意集中力作用的结果。

从这个例子的求解过程中可以看到，有关σ_1'和σ_2'的解中已无奇异性，而主轴应力σ_2的奇异性完全消失在r_1中。实际上，通过适当选择参数u和v，总能将原解的奇异部分转换到r_1或r_2中。由平衡方程(3.4)也可看到，σ_1'和σ_2'若不具有奇异性，主要是在$u=u(x,y)=c$和$v=v(x,y)=c$中的每一条曲线中都有初始角ϕ。

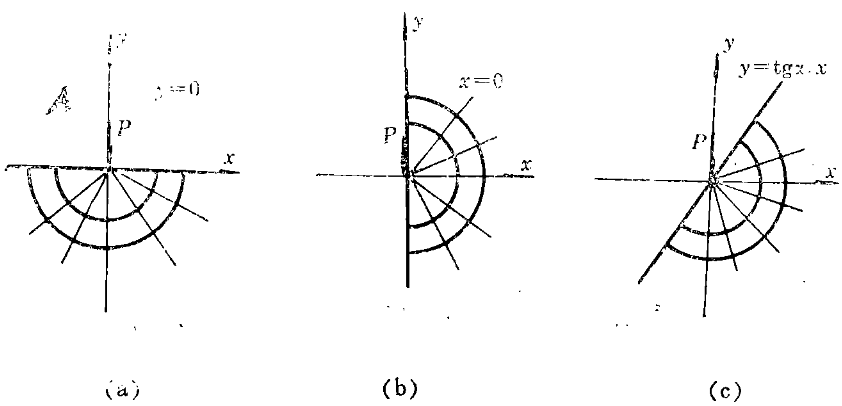

图2 半无限平面作用集中力时的主应力曲线

五、结 论

本文中，讨论了正交曲线坐标中的平衡微分方程，以及平衡方程的其它形式，并用简单的例子说明了用该方法求解弹性力学平面问题的可行性，以及解的特性。同时指出这种方法仍然是半解析法，必须首先假设主轴应力曲线。

附录 正交曲线坐标中一些简单公式的推导

在上面的文章中，使用了曲率κ_1和κ_2的变换形式，以下给以证明。

设参数方程

$$x=x(u,\ v),\ y=y(u,v)$$

则微元线长

$$ds_1=\sqrt{x_u^2+y_u^2}\,du=r_1du,\ ds_2=\sqrt{x_v^2+y_v^2}\,dv=r_2dv$$

微元ds_1经ds_2后的变化量为

$$\frac{\partial ds_1}{\partial s_2}ds_2=\frac{1}{r_2}\frac{\partial ds_1}{\partial v}r_2dv=\frac{x_{uv}x_u+y_{uv}y_u}{\sqrt{x_u^2+y_u^2}}dudv$$

$$=\frac{r_1'}{r_1^2r_2}ds_1ds_2$$

同理

$$\frac{\partial ds_2}{\partial s_1}ds_1=\frac{1}{r_1}\frac{\partial ds_2}{\partial u}r_1du=\frac{x_{uv}x_v+y_{uv}y_v}{\sqrt{x_v^2+y_v^2}}dudv$$

$$=\frac{r_2'}{r_1r_2^2}ds_1ds_2$$

由于曲线s_1与曲线s_2正交，利用曲线的导数

$$y_1'=\frac{y_u}{x_u},\quad y_2'=\frac{y_v}{x_v}$$

和$y_1'=-1/y_2'$，则分别取

$$y_vy_1'=-x_v,\quad y_uy_2'=-x_u$$

为求两曲线的二阶导函数y_1''和y_2''，对上式求导。注意到y_1''仅对u求导，y_2''仅对v方向求导，则上式成为

$$y_{vu}y_1'+y_vy_1''x_u=-x_{vu},\quad y_{vu}y_2'+y_uy_2''x_v=-x_{uv}$$

将y_1'和y_2'的表达式代入

$$y_1''=-\frac{x_{vu}x_u+y_{vu}y_u}{y_vx_u^2},\quad y_2''=-\frac{x_{uv}x_v+y_{uv}y_v}{y_ux_v^2}$$

则

$$\kappa_1=\frac{y_1''}{(1+y_1'^2)^{3/2}}=-\frac{r_1'}{r_1^2r_2}=-\frac{1}{r_1}\frac{\partial r_1}{\partial s_2}$$

$$\kappa_2=\frac{y_2''}{(1+y_2'^2)^{3/2}}=-\frac{r_2'}{r_1r_2^2}=-\frac{1}{r_2}\frac{\partial r_2}{\partial s_1}$$

证毕。

参 考 文 献

[1] 徐芝纶，《弹性力学》，上册，第二版，高等教育出版社，北京（1982）.

[2] 钱伟长、叶开沅，《弹性力学》，科学出版社，北京（1980）.

[3] 苏步青、胡和生等，《微分几何》，科学出版社，北京（1983）.

Coordinates of Principal Stresses for Elastic Plane Problem

Huang Minfeng

(Beijing Technical & Scientific Institute of Real Estate, Beijing 100021, P. R. China)

Abstract

In this paper, the equilibrium equations on orthogonal curve coordinates made of curves of principal stresses are disscused and their properties in process of solution are presented through a simple example. Therefore, it is deduced that there is another way to solve problems in elasticity, i. e., by assumption of orthogonal curves of principal stressses.

Key words elasticity, equilibrium equation, principal stress, plane problem, orthogonal curve coordinates