应用数学和力学，第18卷 第2期（1997年2月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

弹性—应变软化粘塑性材料反平面剪切动态扩展裂纹尖端的渐近解*

李范春[1]　　齐　辉[1]

（叶开沅推荐，1994年2月18日收到，1995年11月10日收到修改稿）

摘　　要

本文首先给出了一种用于描述材料软化，并存在有粘塑性的材料模型．用这种模型对反平面剪切型动态扩展状态下，裂纹尖端的弹粘塑性场进行了渐近分析，给出了弹性—应变软化粘塑性材料反平面剪切动态扩展裂纹尖端的渐近解方程．分析结果表明，在裂纹尖端应变具有$(\ln(R/r))^{1/(n+1)}$的奇异性，应力具有$(\ln(R/r))^{-n/(n+1)}$的奇异性．从而本文揭示了应变软化粘塑性材料反平面剪切动态扩展裂纹尖端的渐近行为．

关键词　裂纹尖端场　动态扩展　应变软化

一、前　　言

工程实际中有这样一类材料，当应变足够大时，一些软化或损伤现象就会出现，为了研究这个过程就必须考虑给出材料的软化模型，用它来描述材料软化现象．然而考虑材料软化的裂纹尖端场的研究目前还不很多，Bui[1]首先给出了弹性材料软化模型和裂纹尖端的渐近结果．Gao对塑性材料的软化特性进行了研究，并在文[2]中给出了应变软化材料的材料模型，采用这种模型对Ⅰ型动态扩展裂纹尖端的渐近场进行了研究．

对于动态扩展裂纹问题，由于高加载率的影响，在裂纹尖端存在着高应变区，这样，材料的率敏感性对裂纹尖端场的影响就突出地表现出来．Gao[3]采用一种新的弹性—粘塑性模型来研究动态扩展裂纹尖端的应力应变场，并获得了合理的解答．

本文采用文[3]采用的弹性—粘塑性模型，对其应变软化材料的力学模型进行了重新构造，得到了弹性—应变软化粘塑性材料的力学模型，使用这种模型对反平面剪切动态扩展裂纹进行了渐近分析．首先假设在裂纹尖端附近当$r\to 0$时，应力具有$(\ln(R/r))^{-n/(n+1)}$的奇异性，从而得到了裂纹尖端场的渐近方程，最后求得了裂纹尖端附近的应力—应变场的渐近解．

* 黑龙江省自然科学基金资助课题

1 哈尔滨工程大学，哈尔滨 150001

二、弹性—应变软化粘塑性材料模型

为了描述材料的损伤过程，我们考虑如图1所示，由三个元件组成的弹性—应变软化粘塑性材料模型，它们分别是弹性元件、粘性元件和应变软化塑性元件。

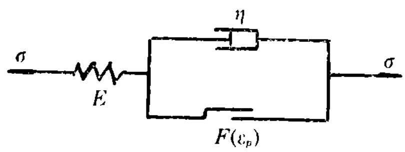

图1 本构模型

以ε，ε_e和ε_p分别表示总应变，弹性应变和塑性应变，则有

$$\varepsilon=\varepsilon_e+\varepsilon_p \tag{2.1}$$

和

$$\varepsilon=\frac{\sigma}{E},\quad \dot{\varepsilon}=\lambda^*\sigma_p \tag{2.2}$$

这里λ^*是流动因子，E是弹性模量，圆点表示对时间的导数，如果我们分别以σ，σ_v和σ_p分别表示总应力、粘性应力和塑性应力，则有下列关系式

$$\sigma=\sigma_v+\sigma_p \tag{2.3}$$

其中

$$\sigma=\eta\dot{\varepsilon}_p,\quad \sigma_p=F(\varepsilon_p) \tag{2.4}$$

这里η是粘性系数，$F(\varepsilon_p)$则表示在单调加载过程中，塑性应力与塑性应变之间的关系函数。从(2.1)～(2.4)式，我们可得

$$\dot{\varepsilon}=\frac{\dot{\sigma}}{E}+\lambda^*\sigma_p \tag{2.5}$$

$$\sigma_p=\frac{1}{1+\eta\lambda^*}\sigma \tag{2.6}$$

$$\varepsilon_p=\varepsilon-\frac{\sigma}{E} \tag{2.7}$$

$$\lambda^*=\frac{1}{\eta}\left[\frac{\sigma}{F(\varepsilon_p)}-1\right]\geqslant 0 \tag{2.8}$$

(2.5)～(2.8)式也可写为

$$\dot{\varepsilon}=\frac{\dot{\sigma}}{E}+\lambda\sigma,\quad \lambda=\frac{1}{\eta}\left[1-\frac{F(\varepsilon_p)}{\sigma}\right]\geqslant 0,\quad \varepsilon_p=\varepsilon-\frac{\sigma}{E} \tag{2.9}$$

对于三维情况，我们以张量形式写(2.1)～(2.4)，则有

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}_e+\boldsymbol{\varepsilon}_p,\quad \boldsymbol{\varepsilon}_e=\mathbf{C}:\boldsymbol{\sigma},\quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p=\lambda^*\mathbf{S}_p \tag{2.10}$$

$$\mathbf{S}=\mathbf{S}_v+\mathbf{S}_p,\quad \mathbf{S}_v=\eta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p,\quad \sigma_p^*=F(\varepsilon_p^*) \tag{2.11}$$

这里$\mathbf{C}$是四阶柔度张量，$\mathbf{S}$和$\mathbf{S}_p$分别是$\boldsymbol{\sigma}$和$\boldsymbol{\sigma}_p$的偏量，σ_p^*和ε_p^*由下式定义

$$\sigma_p^*=\left(\frac{3}{2}\mathbf{S}_p:\mathbf{S}_p\right)^{\frac{1}{2}},\quad \varepsilon_p^*=\int\left(\frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\right)^{\frac{1}{2}}dt \tag{2.12}$$

由(2.10)～(2.12)式有

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}=\mathbf{C}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}+\lambda^*\mathbf{S}_p \tag{2.13}$$

$$\mathbf{S}_p=\frac{1}{1+\eta\lambda^*}\mathbf{S},\quad \sigma_p^*=\frac{1}{1+\eta\lambda^*}\sigma^* \tag{2.14}$$

$$\dot{\varepsilon}_p^* = \frac{\lambda^*}{1+\eta\lambda^*} \times \frac{2}{3}\sigma^* \tag{2.15}$$

$$\lambda^* = \frac{1}{\eta}\left[\frac{\sigma^*}{F(\varepsilon_p^*)} - 1\right] \geqslant 0 \tag{2.16}$$

这里

$$\sigma^* = \left(\frac{3}{2}\mathbf{S}:\mathbf{S}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.17}$$

(2.13)～(2.17)式也可写成下面形式

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{C}:\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \lambda \mathbf{S} \\ &\lambda = \frac{\lambda^*}{1+\eta\lambda^*} = \frac{1}{\eta}\left[1 - \frac{F(\varepsilon_p^*)}{\sigma^*}\right] \geqslant 0 \\ &\dot{\varepsilon}_p^* = \frac{2}{3\eta}[\sigma^* - F(\varepsilon_p^*)] \end{aligned}\right\} \tag{2.18}$$

这里σ^*和ε_p^*分别表示等效应力和等效塑性应变.

根据图2所示的材料的单向拉伸曲线，我们假设在单调加载过程中，等效塑性应力与等效塑性应变之间的关系由$\sigma = F(\varepsilon_p^*)$给出，因此，为了表示软化材料的特性，当$\varepsilon_p^*$较大时，函数$F$可表示为

$$F(\varepsilon_p^*) = C\varepsilon_p^{*-n} \tag{2.19}$$

这里n表示材料应力弱化的弱化指数，C是常数.

(2.18)，(2.19)式给出了用于描述材料的弹性—应变软化粘塑性材料的本构关系. 下面我们给出材料粘性的分布规律，我们认为只有在高应变率区材料的粘性效应才比较显著. 因此，定义η如下

$$\eta = \begin{cases} \eta_0, & r \geqslant R \\ \eta_0 \dfrac{r}{R}, & r < R \end{cases} \tag{2.20}$$

这里η_0是常数，R表示塑性区的尺度.

三、基 本 方 程

让$X_i(i=1, 2)$表示固定的笛卡尔坐标系，假定裂纹沿X_1方向以常速度V扩展. X_2与裂

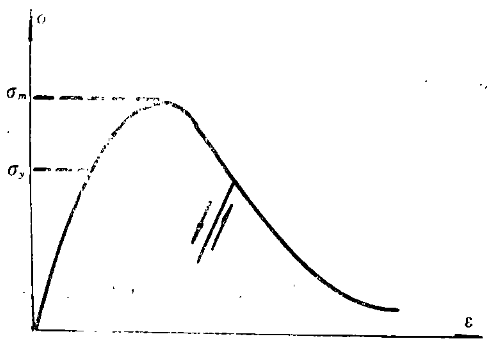

图2 材料的单向拉伸曲线

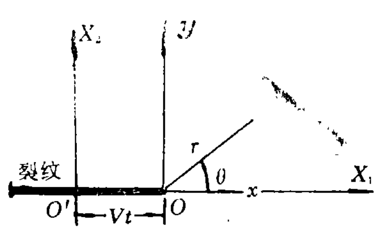

图3 运动和静止坐标

纹面垂直，再以裂纹尖端为原点建立与裂纹一起移动的随动坐标系(x, y)，因此有

$$X_1=x+Vt,\quad X_2=y \tag{3.1}$$

这里t表示时间。

对于稳恒场，质点的物质导数为

$$\frac{d}{dt}=V\left[\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}-\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\right] \tag{3.2}$$

在极坐标系中，由(3.2)式可知

$$\frac{d\mathbf{e}_\alpha}{dt}=V\frac{\sin\theta}{r}\varepsilon_{\alpha\beta}\mathbf{e}_\beta \qquad (\alpha,\ \beta=r,\ \theta) \tag{3.3}$$

其中$\varepsilon_{\alpha\beta}$为二维置换符号，$\varepsilon_{\alpha\beta}=\beta-\alpha$，且约定$r=1$，$\theta=2$。

利用(3.2)及(3.3)两式，可得稳恒场中任一矢量A_α或张量$H_{\alpha\beta}$的物质导数

$$\dot{A}_\alpha=V\left[\frac{\sin\theta}{r}\left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial\theta}+A_\beta\varepsilon_{\beta\alpha}\right)-\cos\theta\frac{\partial A_\alpha}{\partial r}\right] \tag{3.4}$$

$$\dot{H}_{\alpha\beta}=V\left[\frac{\sin\theta}{r}\left(\frac{\partial H_{\alpha\beta}}{\partial\theta}+H_{\gamma\beta}\varepsilon_{\gamma\alpha}+H_{\alpha\gamma}\varepsilon_{\gamma\beta}\right)-\cos\theta\frac{\partial H_{\alpha\beta}}{\partial r}\right] \tag{3.5}$$

其中α，β代表r，θ。

现在我们考虑反平面剪切扩展裂纹情况，以τ_r，τ_θ，γ_r，γ_θ和W分别表示应力分量，应变分量和位移。则运动方程和几何关系为

$$\frac{\partial\tau_r}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_\theta}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\tau_r=\rho\ddot{W} \tag{3.6}$$

$$\gamma_r=\frac{\partial W}{\partial r},\quad \gamma_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial\theta} \tag{3.7}$$

这里ρ是材料的密度，圆点则表示对时间t的导数。

由(2.12)，(2.18)两式，我们有反平面剪切问题在极坐标系下的本构关系。

$$\dot{\gamma}_\alpha=\frac{1}{\mu}\dot{\tau}_\alpha+\frac{R}{\eta_0 r}\tau_\alpha\left[1-\frac{C\gamma_p^{*-n}}{\tau^*}\right],\quad \tau^*=(\tau_r^2+\tau_\theta^2)^{\frac{1}{2}} \tag{3.8}$$

$$\dot{\gamma}_p=\frac{2R}{3\eta_0 r}[\tau^*-F(\gamma_p^*)] \tag{3.9}$$

这里μ是剪切弹性模量，η_0是常数，τ^*是等效剪应力。

四、渐 近 分 析

设在裂纹尖端应变具有$(\ln(R/r))^\delta$奇异性，这里R表示塑性区尺寸，δ是待定常数。设位移函数为

$$W=r\left(\ln\frac{R}{r}\right)^{-\delta}\left[\bar{A}\sin\theta+g(\theta)\left(\ln\frac{R}{r}\right)^1+\cdots\right] \tag{4.1}$$

这里$\bar{A}$是常数，则有

$$\ddot{W}=\frac{V^2}{r}\sin\theta\left(\ln\frac{R}{r}\right)^{\delta-1}[g''\sin\theta+\bar{A}\delta\cos2\theta+g\sin\theta+\cdots] \tag{4.2}$$

根据第(3.7)式的应变—位移关系式有

$$\left.\begin{aligned}\gamma_r&=\left(\ln\frac{R}{r}\right)^{\delta}\left[\bar{A}\sin\theta+g\left(\ln\frac{R}{r}\right)^{-1}-\bar{A}\delta\sin\theta\left(\ln\frac{R}{r}\right)^{-1}+\cdots\right]\\ \gamma_\theta&=\left(\ln\frac{R}{r}\right)^{\delta}\left[\bar{A}\cos\theta+g'\left(\ln\frac{R}{r}\right)^{-1}+\cdots\right]\end{aligned}\right\}\tag{4.3}$$

由(3.4)、(4.2)两式，有应变率分量的表达式为

$$\dot{\gamma}_r=0,\quad \dot{\gamma}_\theta=\frac{V}{r}\left(\ln\frac{R}{r}\right)^{\delta-1}\left[g''\sin\theta+g\sin\theta+\bar{A}\delta\cos2\theta+\cdots\right]\tag{4.4}$$

设

$$\left.\begin{aligned}\tau_r&=\left(\ln\frac{R}{r}\right)^{-n\delta}\tau_0\left[T_r(\theta)+T_{r1}(\theta)\left(\ln\frac{R}{r}\right)^{-1}+\cdots\right]\\ \tau_\theta&=\left(\ln\frac{R}{r}\right)^{-n\delta}\tau_0\left[T_\theta(\theta)+T_{\theta1}(\theta)\left(\ln\frac{R}{r}\right)^{-1}+\cdots\right]\end{aligned}\right\}\tag{4.5}$$

由运动方程有

$$\delta=\frac{1}{n+1}\tag{4.6}$$

由(3.4)、(4.6)式有

$$\left.\begin{aligned}\dot{\tau}_r&=\frac{V}{r}\left(\ln\frac{R}{r}\right)^{\delta-1}\tau_0\left(\frac{\partial T_r}{\partial\theta}-T_\theta\right)\sin\theta\\ \dot{\tau}_\theta&=\frac{V}{r}\left(\ln\frac{R}{r}\right)^{\delta-1}\tau_0\left(\frac{\partial T_\theta}{\partial\theta}+T_r\right)\sin\theta\end{aligned}\right\}\tag{4.7}$$

对于反平面剪切扩展裂纹情况，(2.19)式可写为

$$\tau_p^*=C\gamma_p^{*-n}\tag{4.8}$$

这里τ_p^*为等效剪应力，γ_p^*为等效剪应变.

设等效剪应变的渐近表达式为

$$\gamma_p^*=\left(\ln\frac{R}{r}\right)^{\delta}\gamma_0^*\left[f_1(\theta)+f_2(\theta)\left(\frac{R}{r}\right)^{-1}+\cdots\right]\tag{4.9}$$

由(3.2)、(4.9)式有

$$\dot{\gamma}_p^*=\frac{V}{r}\left(\ln\frac{R}{r}\right)^{\delta-1}\gamma_0^*\left\{\sin\theta\left[f_1'(\theta)\left(\ln\frac{R}{r}\right)+f_2'(\theta)\right]\right.$$
$$\left.\cdot\cos\theta\left[\delta f_1(\theta)+(\delta-1)\left(\ln\frac{R}{r}\right)^{-1}f_2(\theta)+\cdots\right]\right\}\tag{4.10}$$

由(2.18)式中的第三式的量级协调，有$f_1'(0)=0$，故(4.9)式可写为

$$\gamma_p^*=\left(\ln\frac{R}{r}\right)^{\delta}\gamma_0^*\left[K+f_2(\theta)\left(\ln\frac{R}{r}\right)^{-1}+\cdots\right]\tag{4.11}$$

由(3.6)～(3.9)式，同时注意以上各式，我们可得到场的渐近方程为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dT_r}{d\theta}-T_\theta+\frac{a}{\sin\theta}T_r\left(1-\frac{B}{T}\right)=0\\ &\frac{dT_\theta}{d\theta}+T_r-\frac{M^2\sin\theta}{1-M^2\sin\theta}aT_\theta\left(1-\frac{B}{T}\right)=0\end{aligned}\right\}\tag{4.12}$$

$$G''+G+\frac{A}{\sin\theta}\cos2\theta-\frac{aT_\theta}{1-M^2\sin^2\theta}\ \frac{1}{\sin\theta}\left(1-\frac{B}{T}\right)=0 \tag{4.13}$$

这里

$$a=\frac{\mu R}{\eta_0 V},\quad G=\frac{\mu}{\tau_0}g,\quad A=\frac{\mu}{\tau_0}\delta\bar{A} \tag{4.14}$$

$$M=V\left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}},\quad T=(T_r^2+T_\theta^2)^{\frac{1}{2}} \tag{4.15}$$

$$B=\frac{C}{\tau_0(\gamma_0^* K)^n} \tag{4.16}$$

边界条件为

$$T_r(0)=0,\quad G(0)=0,\quad T_\theta(\pi)=0 \tag{4.17}$$

由$\theta=0$时的正则条件可得

$$T_\theta(0)=B+\frac{A}{a} \tag{4.18}$$

五、计算结果及讨论

本文对方程(4.12)式进行了数值计算，得到了不同马赫数和不同粘塑性情况下的裂纹尖端场的数值解，同时给出了当$B=1.2$时的裂纹尖端的应力分布曲线。

通过计算我们能够确定出主软化区的边界，即当a较小，也就是说粘性较大时，$\theta_D<3\pi/4$。当$a\to\infty$，即粘性消失时，则有$\theta_D<\pi/2$。主软化区如图4中的①区表示，而②为弹性区。

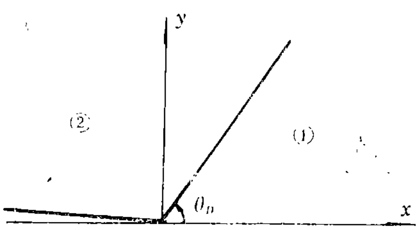

图4 软化区与弹性区的划分

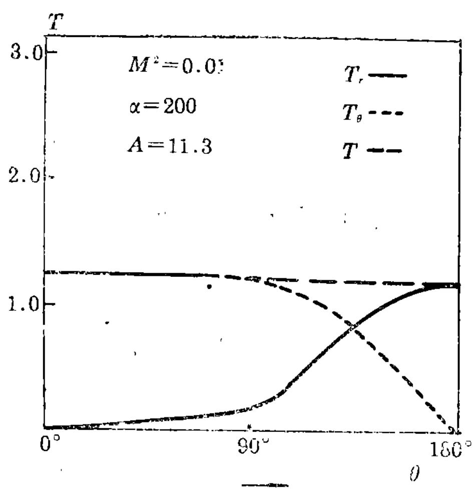

图5 $T_r(\theta)$, $T_\theta(\theta)$, $T(\theta)$随θ角的变化规律

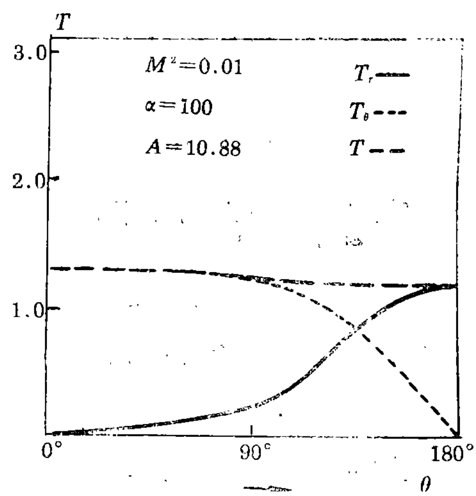

图6 $T_r(\theta)$, $T_\theta(\theta)$, $T(\theta)$随θ角的变化规律

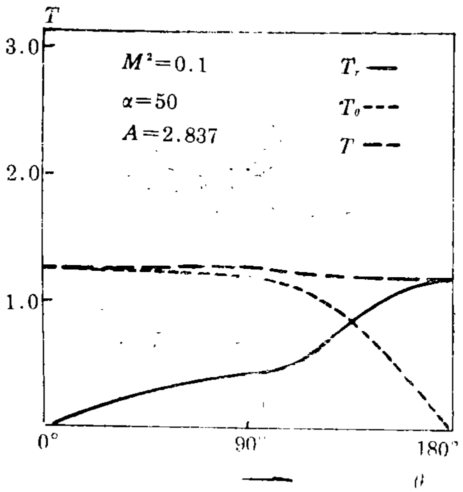

图7 $T_r(\theta)$, $T_\theta(\theta)$, $T(\theta)$随θ角的变化规律

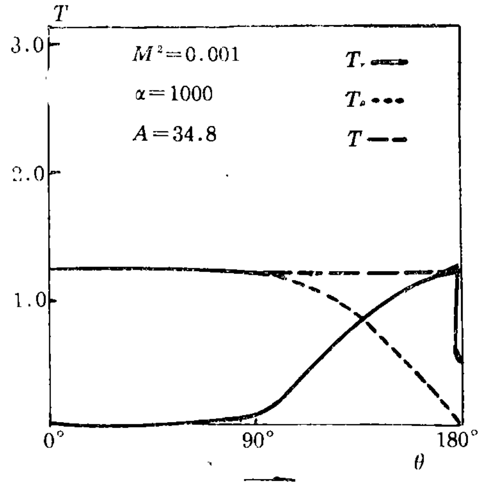

图8 $T_r(\theta)$, $T_\theta(\theta)$, $T(\theta)$随θ角的变化规律

六、结　论

1．本文首先给出了弹性—应变软化粘塑性模型，并采用这种模型对动态扩展Ⅲ型裂纹尖端场进行了渐近分析，并给出了$\tau_\alpha\sim(\ln(R/r))^{-n/(n+1)}$，$\gamma_\alpha\sim(\ln(R/r))^{1/(n+1)}$。

2．本文通过计算确定了不同情况下主软化区的边界值θ_D。

参 考 文 献

[1] H. D. Bui and A. Ehrlacher, Dynamic propagation of a damage zone in steady mode Ⅰ loading of an elastic brittle solid, *C. R. Acad.Sci.Paris B*, 290 (1980), 273—276.

[2] Y. C. Gao, The asymptotic solution to the dynamic crack tip field in a strain dynamic material, *Int. J. Engng. Sci.*, 6 (1986), 1045.

[3] Y. C. Gao, Uniparameter plastic field near a dynamic crack tip, *Mechanics Research Communication*, 15 (1988), 307—313.

The Asymptotic Solution to the Antiplane Shear Dynamic Crack-Tip Field in an Elastic Strain-Softening Viscoplastic Material

Li Fanchun　　Qi Hui

(*Harbin Engineering University*, *Harbin* 150001, *P. R. China*)

Abstract

The elastic strain softening-viscoplastic model is given in this paper. Using this model, the asymptotic stress and strain equations surrounding the tip of a propagating crack are given and numerical results are obtained under antiplane shear. The analysis and calculation show that at the crack tip the strain possesses logarithmic singularity$(\ln(R/r))^{1/(n+1)}$ while the stress is like $(\ln(R/r))^{-n(n+1)}$, therefore the asymptotic behaviour of the elastic strain-softening viscoplastic field is revealed under the antiplane shear.

Key words cracktip field, dynamic propagating, strain softening