应用数学和力学，第18卷 第2期（1997年2月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

Menger概率度量空间中Caristi型混合不动点定理

石 川[1]

（丁协平推荐；1995年12月18日收到，1996年4月2日收到修改稿）

摘 要

本文在Menger概率度量空间中引进Caristi型混合不动点概念，得到两个混合不动点定理和两个集值映象序列的公共混合不动点定理，我们的定理改进和推广了 Caristi 不动点定理及相关的近期重要结果.

关键词 概率度量空间 Menger空间 Caristi 不动点定理 混合不动点 公共混合不动点

一、引言和预备

1976年，Caristi提出 Caristi 不动点定理[1]，因为这个定理不需要映象具有连续性，它在许多领域都有应用. 1991 年张石生等在概率度量空间中提出 Caristi 不动点定理和Ekeland变分原理[7]，1993年张石生等提出概率度量空间中的集值Caristi定理[4]. 本文在Menger概率度量空间中提出Caristi 型混合不动点的概念，给出两个混合不动点定理和两个集值映象序列的公共混合不动点定理. 我们的定理改进和推广了Caristi 不动点定理和相关的近期重要结果[1,2,3,4,5,6,7].

本文始终以（E，F，Δ）表示完备的Menger-概率度量空间（简称M-PM-空间），其中t范数Δ满足：

$$\lim_{x\to 1^-}\Delta(x,\ y)=y,\qquad \forall y\in[0,\ 1] \tag{1.1}$$

定义1.1 设（E，F，Δ）为一M-PM-空间，$G:E\to 2^E\backslash\{\phi\}$，$T:E\to E$，若$x_0\in E$使得$x_0=Tx_0\in Gx_0$，则称$x_0$是$G$和$T$的混合不动点.

引理1.1（张石生等[4]） 设(E，F，Δ)是一完备的 M-PM-空间，Δ满足（1.1），ϕ：$E\to(-\infty,\ +\infty]$为下半连续下有界且$\not\equiv+\infty$的泛函，若对给定的$\varepsilon>0$，$u\in E$满足

$$\phi(u)\leqslant\inf_{x\in E}\phi(x)+\varepsilon$$

则对任一$\lambda>0$，存在$v\in E$使得：

(1) $F_{u,v}(t)\geqslant H\Big(t-\dfrac{1}{\varepsilon\lambda}(\phi(u)-\phi(v))\Big)$，$\forall t>0$；

(2) $F_{u,v}(t)\geqslant H(t-1/\lambda)$，$\forall t>0$；

1 南京理工大学应用数学系，南京 210014

(3) $\forall x\in E,\ x\neq v,\ \exists t_0=t_0(x)>0,$

使 $$F_{x,v}(t_0)<H\left(t_0-\frac{1}{\varepsilon\lambda}(\phi(v)-\phi(x))\right)$$

引理1.2 设(E, F, Δ)及Δ满足引理1.1要求，映象$T:E\to E$满足$\forall x,\ y\in E$,

$$F_{x,Ty}(t)\leqslant F_{Tx,Ty}(t),\qquad \forall t>0 \tag{1.2}$$

则 $$T(E)=\{z\mid z=Tx,\ x\in E\}=F(E)=\{x\mid x=Tx,\ x\in E\}$$

证明 $F(E)\subseteq T(E)$显然，再证$T(E)\subseteq F(E)$，$\forall z_1\in T(E)$，$\exists x_1\in E$使$z_1=Tx_1$，由(1.2)知

$$F_{Tz_1,Tx_1}(t)\geqslant F_{z_1,Tx_1}(t)=F_{Tx_1,Tx_1}(t)=H(t),\qquad \forall t\in R$$

所以 $$Tz_1=Tx_1=z_1,\ z_1\in F(E)$$

故$T(E)\subseteq F(E)$，$T(E)=F(E)$获证。

二、主要结果

定理2.1 设(E, F, Δ)是完备的M-PM-空间，Δ满足条件(1.1)，$\phi:E\to(-\infty, +\infty]$为下半连续、下有界且$\not\equiv+\infty$的泛函，$T:E\to E$连续且满足：对$\forall x,\ y\in E$,

$$F_{x,Ty}(t)\leqslant F_{Tx,Ty}(t),\qquad \forall t>0 \tag{2.1}$$

设$G:E\to 2^E\backslash\{\phi\}$满足$TG=GT$并且$\forall x\in E$，$\exists y\in Gx$使得对$\forall t>0$总有$\exists t_1>0,\ t_2>0,\ t_1+t_2=t$满足：

$$\Delta(F_{y,Tx}(t_1),\ F_{Tx,Ty}(t_2))\geqslant H\left(t-\frac{1}{\alpha}(\phi(x)-\phi(y))\right) \tag{2.2}$$

此处$\alpha>0$是一常数。

则对任给$u\in E$，$\phi(Tu)\neq+\infty$，以及$\beta>1$存在$x_0\in E$满足$x_0=Tx_0\in Gx_0$并使

$$F_{Tu,x_0}(t)\geqslant H\left(t-\frac{\beta}{\alpha}(\phi(Tu)-\phi(x_0))\right),\qquad \forall t>0 \tag{2.3}$$

特别如果

$$\phi(Tu)\leqslant\inf_{x\in T(E)}\phi(x)+\varepsilon<\inf_{x\in T(E)}\phi(x)+1$$

则x_0满足 $$F_{Tu,x_0}(t)\geqslant H(t-\sqrt{\varepsilon}/\alpha),\qquad \forall t>0 \tag{2.4}$$

证明 根据集值映象$G:E\to 2^E\backslash\{\phi\}$作单值映象$S:E\to E$为$\forall x\in E$，$Sx=y$，其中$y\in Gx$且满足(2.2)，于是对$\forall x\in E$便有：$\forall t>0$，$\exists t_1>0,\ t_2>0,\ t_1+t_2=t$满足

$$\Delta(F_{Sx,Tx}(t_1),\ F_{Tx,TSx}(t_2))\geqslant H\left(t-\frac{1}{\alpha}(\phi(x)-\phi(Sx))\right) \tag{2.5}$$

根据引理1.2，$F(E)=T(E)$，再由$T:E\to E$连续知$F(E)$是闭集，故$(F(E), F, \Delta)$也是完备的M-PM-空间。再证$\forall x\in F(E)$，必有$Sx\in F(E)$。事实上当$\forall x\in F(E), x=Tx$，$GT=TG$，$Sx=STx\in GTx=TGx\subseteq T(E)=F(E)$，故$Sx\in F(E)$。已知$\phi(Tu)\neq+\infty$，若

$$\phi(Tu)=\inf_{x\in F(E)}\phi(x)$$

则$\phi(STu)\geqslant\phi(Tu)$，由$TTu=Tu$再由$\forall t>0$，$\exists t_1>0,\ t_2>0,\ t=t_1+t_2$使

$$\Delta(F_{STu,Tu}(t_1),\ F_{Tu,TSTu}(t_2))\geqslant H\left(t-\frac{1}{\alpha}(\phi(Tu)-\phi(STu))\right)$$

知$\phi(Tu)=\phi(STu)$，事实上若$\phi(Tu)<\phi(STu)$，则$Tu\neq STu$，必有$\exists t_3>0$使$F_{STu,Tu}(t_3)<1$，对任一$t_1>0,\ t_2>0,\ t_1+t_2=t_3$，必有：

$$\Delta(F_{STu,Tu}(t_1),\ F_{Tu,TSTu}(t_2))\leqslant\Delta(F_{STu,Tu}(t_1),\ 1)$$
$$=F_{STu,Tu}(t_1)\leqslant F_{STu,Tu}(t_3)<1$$

这与 $$H\left(t_3-\frac{1}{\alpha}\ (\phi(Tu)-\phi(STu))\right)=1$$

相矛盾。

因为$\phi(Tu)=\phi(STu)$，而$TSTu=STu$故$\forall t>0$，$\exists t_1>0$，$t_2>0$，$t=t_1+t_2$使

$$\Delta(F_{STu,Tu}(t_1),\ F_{Tu,STu}(t_2))\geqslant H(t) \tag{2.6}$$

由此知$\forall t>0$，$F_{STu,Tu}(t)=H(t)$，若$F_{STu,Tu}(t)\neq H(t)$则$\exists t_4>0$，使$F_{STu,Tu}(t_4)<1$，对任意$t_1>0$，$t_2>0, t_1+t_2=t_4$，

$$\Delta(F_{STu,Tu}(t_1),\ F_{Tu,STu}(t_2))\leqslant\Delta(F_{STu,Tu}(t_1),\ 1)$$
$$=F_{STu,Tu}(t_1)\leqslant F_{STu,Tu}(t_4)<1$$

但$H(t_4)=1$，这与(2.6)产生矛盾。

由$F_{STu,Tu}(t)=H(t)$知$STu=Tu$，于是取$x_0=Tu\in T(E)$，便满足$Tx_0=x_0=Sx_0\in Gx_0$，这说明x_0是T和G的混合不动点而且自然满足(2.3)和(2.4)。

如果$\phi(Tu)>\inf\limits_{x\in F(E)}\phi(x)$，则设$\phi(Tu)-\inf\limits_{x\in F(E)}\phi(x)=\varepsilon>0$，在$(F(E),\ F,\ \Delta)$上应用引理1.1知对$\forall\lambda>0$，$\exists x_0\in F(E)$使得：

$$F_{Tu,x_0}(t)\geqslant H\left(t-\frac{1}{\varepsilon\lambda}\ (\phi(Tu)-\phi(x_0))\right),\qquad \forall t>0 \tag{2.7}$$

$$F_{Tu,x_0}(t)\geqslant H(t-1/\lambda),\qquad \forall t>0$$

$\forall x\in F(E)$，$x\neq x_0$，$\exists t_0=t_0(x)>0$使

$$F_{x,x_0}(t_0)<H\left(t_0-\frac{1}{\varepsilon\lambda}(\phi(x_0)-\phi(x))\right) \tag{2.8}$$

下证$Sx_0=x_0$，用反证法，若$Sx_0\neq x_0$，则由(2.8)知$\exists t_0=t_0(Sx_0)$使

$$F_{Sx_0,x_0}(t_0)<H\left(t_0-\frac{1}{\varepsilon\lambda}(\phi(x_0)-\phi(Sx_0))\right)$$

再由(2.5)知对$t_0>0\ \exists t_1>0$，$t_2>0$，$t_1+t_2=t_0$使

$$\Delta(F_{Sx_0,Tx_0}(t_1),\ F_{Tx_0,TSx_0}(t_2))\geqslant H\left(t_0-\frac{1}{\alpha}(\phi(x_0)-\phi(Sx_0))\right)$$

考虑到$Tx_0=x_0$，$TSx_0=Sx_0$，再设$\lambda=\alpha/\varepsilon$知

$$F_{Sx_0,x_0}(t_1)=F_{Sx_0,Tx_0}(t_1)=\Delta(F_{Sx_0,Tx_0}(t_1),\ 1)$$
$$\geqslant\Delta(F_{Sx_0,Tx_0}(t_1),\ F_{Tx_0,TSx_0}(t_2))$$
$$\geqslant H\left(t_0-\frac{1}{\alpha}(\phi(x_0)-\phi(Sx_0))\right)$$
$$=H\left(t_0-\frac{1}{\varepsilon\lambda}(\phi(x_0)-\phi(Sx_0))\right)$$
$$>F_{Sx_0,x_0}(t_0)$$

这与$t_1+t_2=t_0$，$t_1<t_0$相矛盾，故$Sx_0=x_0$。于是$Tx_0=x_0=Sx_0\in Gx_0$，x_0是T，G之混合不动点。再由(2.7)并注意到$\beta>1$，$\phi(Tu)\geqslant\phi(x_0)$，$\lambda=\alpha/\varepsilon$便有

$$F_{Tu,x_0}(t)\geqslant H\left(t-\frac{1}{\varepsilon\lambda}\ (\phi(Tu)-\phi(x_0))\right)$$
$$\geqslant H\left(t-\frac{\beta}{\alpha}\ (\phi(Tu)-\phi(x_0))\right)$$

(2.3)成立．特别如果

$$\phi(Tu)\leqslant\inf_{x\in T(E)}\phi(x)+\varepsilon<\inf_{x\in T(E)}\phi(x)+1$$

则

$$\begin{aligned}F_{Tu,x_0}(t)&\geqslant H\left(t-\frac{\beta}{\alpha}(\phi(Tu)-\phi(x_0))\right)\\&\geqslant H(t-(\beta/\alpha)\varepsilon),\qquad 令\beta=1/\sqrt{\varepsilon}\\&=H(t-\sqrt{\varepsilon}/\alpha)\end{aligned}$$

(2.4)成立．

推论2.1　设$(E,\ d)$是一完备的度量空间，$\phi:E\to(-\infty,\ +\infty]$为下半连续、下有界$\not\equiv+\infty$的泛函，$T:E\to E$连续且满足：

$$d(Tx,\ Ty)\leqslant d(x,\ Ty),\qquad \forall x,\ y\in E \tag{2.9}$$

$G:E\to 2^E\backslash\{\phi\}$满足$TG=GT$并且$\forall x\in E$，存在$y\in Gx$使得

$$\phi(y)+\alpha[d(y,\ Tx)+d(Tx,\ Ty)]\leqslant\phi(x) \tag{2.10}$$

其中$\alpha>0$是一常数，则对任给$u\in E$，$\phi(Tu)\neq+\infty$，以及$\beta>1$存在$x_0\in E$满足$x_0=Tx_0\in Gx_0$并且使

$$d(Tu,\ x_0)\leqslant\frac{\beta}{\alpha}(\phi(Tu)-\phi(x_0)) \tag{2.11}$$

特别如果

$$\phi(Tu)\leqslant\inf_{x\in T(E)}\phi(x)+\varepsilon<\inf_{x\in T(E)}\phi(x)+1$$

则x_0满足

$$d(Tu,\ x_0)\leqslant\sqrt{\varepsilon}/\alpha \tag{2.12}$$

证明　在E上定义$F:E\times E\to D$如下：

$$\forall x,\ y\in E,\ F_{x,y}(t)=H(t-d(x,y)),\qquad \forall t\in(-\infty,\ +\infty)$$

不难证明$(E,\ F,\ \min)$是一完备的M-PM-空间，Δ满足条件(1.1)．并且不难证明T满足条件(2.1)，G满足(2.2)，本推论的结论由定理2.1直接得出．

注2.1　当$G:E\to 2^E\backslash\{\phi\}$是单值映象$S:E\to E$时，推论2.1是[5]的定理3的加强形式，故本文定理2.1和推论2.1是[5]中主要结果定理3的改进和推广．

定理2.2　设$(E,\ F,\ \Delta)$，ϕ，T均满足定理2.1要求，再设集值映象$G:E\to 2^E\backslash\{\phi\}$满足$GT=TG$，并且$\forall x\in E$，$\exists\, y\in Gx$使得：

$$F_{y,Tx}(t)\geqslant H(t-(\phi(x)-\phi(y))),\qquad t>0 \tag{2.13}$$

则对任何$u\in E$，$\phi(Tu)\not\equiv+\infty$，以及$\beta>1$，存在$x_0\in E$使得$x_0=Tx_0\in Gx_0$，并且使

$$F_{Tu,x_0}(t)\geqslant H(t-\beta(\phi(Tu)-\phi(x_0))) \tag{2.14}$$

特别如果

$$\phi(Tu)\leqslant\inf_{x\in T(E)}\phi(x)+\varepsilon<\inf_{x\in T(E)}\phi(x)+1$$

则x_0可满足

$$F_{Tu,x_0}(t)\geqslant H(t-\sqrt{\varepsilon}) \tag{2.15}$$

证明　根据集值映象$G:E\to 2^E\backslash\{\phi\}$作单值映象$S:E\to E$为$\forall x\in E$，$Sx=y$，其中$y\in Gx$满足(2.13)，于是$\forall x\in E$便有

$$F_{Sx,Tx}(t)\geqslant H(t-(\phi(x)-\phi(Sx))),\qquad t>0 \tag{2.16}$$

根据引理1.2，$F(E)=T(E)$，再由$T:E\to E$连续知$F(E)$是闭集，故$(F(E),\ F,\ \Delta)$也是完备的M-PM-空间．现证$\forall x\in F(E)$，必有$Sx\in F(E)$．事实上当$\forall x\in F(E)$，$x=Tx$，

$GT=TG$, $Sx=STx\in GTx=TGx\subseteq T(E)=F(E)$, $\therefore Sx\in T(E)$.

由已知$\phi(Tu)\neq+\infty$, 如果$\phi(Tu)=\inf\limits_{x\in T(E)}\phi(x)$, 则由(2.16)知

$$F_{STu,TTu}(t)\geqslant H(t-(\phi(Tu)-\phi(STu))),\qquad t>0$$

故 $$F_{STu,TTu}(t)=H(t),\qquad \therefore STu=TTu=Tu$$

令$x_0=Tu\in F(E)$ 便满足 $Tx_0=x_0=Sx_0\in Gx_0$, x_0是 T 和 G 的混合不动点并且满足 (2.14), (2.15).

如果$\phi(Tu)-\inf\limits_{x\in T(E)}\phi(x)=\varepsilon>0$, 在$(F(E),\ F,\ \Delta)$上应用引理1.1, 对$\forall\lambda>0$, $\exists\, x_0\in F(E)$使

$$F_{Tu,x_0}(t)\geqslant H\left(t-\frac{1}{\varepsilon\lambda}(\phi(Tu)-\phi(x_0))\right),\qquad \forall t>0 \tag{2.17}$$

$$F_{Tu,x_0}(t)\geqslant H(t-1/\lambda),\qquad \forall t>0$$

对$\forall x\in F(E)$, $x\neq x_0$, $\exists\, t_0=t_0(x)>0$使

$$F_{x,x_0}(t_0)<H\left(t_0-\frac{1}{\varepsilon\lambda}(\phi(x_0)-\phi(x))\right) \tag{2.18}$$

下证$Sx_0=x_0$, 用反证法, 若$Sx_0\neq x_0$, 则由(2.18)知$\exists\, t_0=t_0(Sx_0)$使

$$F_{Sx_0,x_0}(t_0)<H\left(t_0-\frac{1}{\varepsilon\lambda}(\phi(x_0)-\phi(Sx_0))\right)$$

在上式中取$\lambda=1/\varepsilon$, 再利用(2.16)便得

$$F_{Sx_0,x_0}(t_0)<H(t_0-(\phi(x_0)-\phi(Sx_0)))\leqslant F_{Sx_0,Tx_0}(t_0)=F_{Sx_0,x_0}(t_0)$$

产生矛盾, 故$Sx_0=x_0$. 于是$x_0\in F(E)$满足$Tx_0=x_0=Sx_0\in Gx_0$, x_0是T, G的混合不动点而且再由(2.17), $\beta>1$和$\phi(Tu)\geqslant\phi(x_0)$知

$$\begin{aligned}F_{Tu,x_0}(t)&\geqslant H\left(t-\frac{1}{\varepsilon\lambda}(\phi(Tu)-\phi(x_0))\right)\\&=H(t-(\phi(Tu)-\phi(x_0)))\qquad(\lambda=1/\varepsilon)\\&\geqslant H(t-\beta(\phi(Tu)-\phi(x_0)))\end{aligned}$$

(2.14)成立.

特别如果

$$\phi(Tu)\leqslant\inf_{x\in T(E)}\phi(x)+\varepsilon<\inf_{x\in T(E)}\phi(x)+1$$

则 $$\begin{aligned}F_{Tu,x_0}(t)&\geqslant H(t-\beta(\phi(Tu)-\phi(x_0)))\\&\geqslant H(t-\beta\cdot\varepsilon)\qquad(令\beta=1/\sqrt{\varepsilon})\\&\geqslant H(t-\sqrt{\varepsilon})\end{aligned}$$

(2.15)成立.

用推论2.1相同的方法由定理2.2可得到下面推论:

推论2.2 设$(E,\ d)$是一完备的度量空间, $\phi:E\to(-\infty,\ +\infty]$是下半连续、下有界且$\neq+\infty$的泛函, $T:E\to E$连续且满足:

$$d(Tx,\ Ty)\leqslant d(x,\ Ty),\qquad \forall x,\ y\in E \tag{2.19}$$

$G:E\to 2^E\backslash\{\phi\}$满足$TG=GT$并且$\forall x\in E$, 存在$y\in Gx$, 使得

$$\phi(y)+d(y,\ Tx)\leqslant\phi(x) \tag{2.20}$$

则对任何$u\in E$, $\phi(Tu)\neq+\infty$, 以及$\beta>1$存在$x_0\in E$, 使得$x_0=Tx_0\in Gx_0$, 并且使

$$d(Tu,\ x_0)\leqslant\beta(\phi(Tu)-\phi(x_0)) \tag{2.21}$$

特别如果

$$\phi(Tu)\leqslant\inf_{x\in T(E)}\phi(x)+\varepsilon<\inf_{x\in T(E)}\phi(x)+1$$

则可要求x_0满足

$$d(Tu,\ x_0)\leqslant\sqrt{\varepsilon}\tag{2.22}$$

注2.2 当$T=I$是恒等映象时推论2.2是[3]的主要结果定理3，当$T=I$而且$Gx=Sx$是单值映象时推论2.2是[2]的定理2′而且是Caristi不动点的加强形式，当$T=I$时定理2.2是[4]的定理2，也是[7]的定理11.2.1，故本文定理2.2是[1,2,3,4,5,7]中相关结果的改进和推广。

定理2.3 设$(E,\ F,\ \Delta)$，ϕ，T满足定理2.1要求，而且当$x_1\neq x_2$时$Tx_1\neq Tx_2$。又设Q_i: $E\to 2^E\backslash\{\phi\}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots)$满足$TQ_i=Q_iT$ $(i=1,\ 2,\ \cdots)$，并且$\forall x\in E$，$\exists y\in Q_ix$ $(i=1,\ 2,\ \cdots)$，使得对$\forall t>0$ $\exists t_1>0$，$t_2>0$，$t_1+t_2=t$满足：

$$\Delta(F_{y,Tx}(t_1),\ F_{Tx,Ty}(t_2))\geqslant H\left(t-\frac{1}{\alpha}(\phi(x)-\phi(y))\right)\tag{2.23}$$

其中$\alpha>0$是一常数。则对任一$u\in E$，$\phi(Tu)\neq+\infty$，以及$\beta>1$存在$x_0\in E$使得$x_0=Tx_0\in Q_ix_0$ $(i=1,\ 2,\ \cdots)$，并且满足(2.3)，(2.4)。

证明 $\forall x\in E$，设$Gx=\bigcap_{i=1}^{+\infty}Q_ix$，根据已知条件$\forall x\in E$，$Gx\neq\phi$，而且$\exists y\in Gx$满足(2.23)，于是$G: E\to 2^E\backslash\{\phi\}$满足定理2.1中条件(2.2)。下证$TG=GT$，即证$\forall x\in E$，$TGx=GTx$。若$u\in TGx$，则$\exists y\in Gx=\bigcap_{i=1}^{+\infty}Q_ix$使得$Ty=u$，由$y\in Q_ix$ $(i=1,\ 2,\ \cdots)$，$u=Ty\in TQ_ix=Q_iTx$ $(i=1,\ 2,\ \cdots)$故$u\in\bigcap_{i=1}^{+\infty}Q_iTx=GTx$，于是$TGx\subseteq GTx$。反之若$u\in GTx$，即$u\in\bigcap_{i=1}^{+\infty}Q_iTx$，则$u\in Q_iTx=TQ_ix$ $(i=1,\ 2,\ \cdots)$，因为当$y_1\neq y_2$时$Ty_1\neq Ty_2$，故$\exists y\in Q_ix$ $(i=1,\ 2,\ \cdots)$使$Ty=u$，于是$y\in\bigcap_{i=1}^{+\infty}Q_ix=Gx$使得$u=Ty$，这说明$u\in TGx$，于是$GTx\subseteq TGx$，$TG=GT$获证。

对于T和G应用定理2.1知存在混合不动点$x_0\in E$使得$x_0=Tx_0\in Gx_0\subseteq Q_ix_0$ $(i=1,\ 2,\ \cdots)$并且满足(2.3)，(2.4)。

定理2.4 设$(E,\ F,\ \Delta)$，ϕ，T满足定理2.2要求，而且当$x_1\neq x_2$时$Tx_1\neq Tx_2$。再设Q_i: $E\to 2^E\backslash\{\phi\}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots)$为集值映象序列，满足$Q_iT=TQ_i$ $(i=1,\ 2,\ \cdots)$，并且$\forall x\in E$ $\exists y\in Q_ix$ $(i=1,\ 2,\ \cdots)$使得对$\forall t>0$满足：

$$F_{y,Tx}(t)\geqslant H(t-(\phi(x)-\phi(y)))\tag{2.24}$$

则对任一给定的$u\in E$，$\phi(Tu)\neq+\infty$，以及任一$\beta>1$，存在$x_0\in E$使$x_0=Tx_0\in Q_ix_0$ $(i=1,\ 2,\ \cdots)$并满足(2.14)，(2.15)。

证明 $\forall x\in E$，设$Gx=\bigcap_{i=1}^{+\infty}Q_ix$，则$Gx\neq\phi$而且$\exists y\in Gx$满足(2.24)，故集值映象$G: E\to 2^E\backslash\{\phi\}$满足条件(2.13)，由定理2.3的证明知$TG=GT$，对$T$，$G$应用定理2.2便得$x_0\in E$使$x_0=Tx_0\in Gx_0\subseteq Q_ix_0$ $(i=1,\ 2,\ \cdots)$而且满足(2.14)，(2.15)。

当$T=I$是恒等映象时便有下面的推论：

推论2.3 设$(E,\ F,\ \Delta)$，ϕ满足定理2.4要求，$Q_i: E\to 2^E\backslash\{\phi\}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots)$为集值映象序列满足$\forall x\in E$ $\exists y\in Q_ix$ $(i=1,\ 2,\ \cdots)$使

$$F_{x,y}(t)\geqslant H(t-(\phi(x)-\phi(y))),\qquad \forall t>0\tag{2.25}$$

则对任一给定的$u\in E$，$\phi(u)\neq+\infty$，以及任一$\beta>1$，存在$x_0\in E$使$x_0\in Q_ix_0$ $(i=1,\ 2,\ \cdots)$且

满足

$$F_{u,x_0}(t)\geqslant H(t-\beta(\phi(u)-\phi(x_0))) \tag{2.26}$$

特别如果

$$\phi(u)\leqslant\inf_{x\in E}\phi(x)+\varepsilon<\inf_{x\in E}\phi(x)+1$$

则x_0可满足

$$F_{u,x_0}(t)\geqslant H(t-\sqrt{\varepsilon}) \tag{2.27}$$

用推论2.1相同的方法从定理2.4可得下面推论：

推论2.4　设$(E,\ d)$，ϕ，T满足推论2.2的条件，并且当$x_1\neq x_2$时$Tx_1\neq Tx_2$。设$Q_i:E\to 2^E\setminus\{\phi\}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots)$是一集值映象的序列，满足：$Q_iT=TQ_i$ $(i=1,\ 2,\ \cdots)$并且$\forall x\in E$，$\exists y\in Q_ix$ $(i=1,\ 2,\ \cdots)$具有

$$\phi(y)+d(y,\ Tx)\leqslant\phi(x) \tag{2.28}$$

那么对任一$u\in E$，$\phi(Tu)\neq+\infty$以及任一$\beta>1$存在$x_0\in E$具有$x_0=Tx_0\in Q_ix_0$ $(i=1,\ 2,\ \cdots)$并满足(2.21)，(2.22)。

定义2.1　称映象$A:E\to[0,\ 1]$为E上之Fuzzy子集，用$W(E)$表示E上全体Fuzzy子集的集合，设$A\in W(E)$，$\alpha\in(0,\ 1]$，集合$(A)_\alpha=\{x\in E|A(x)\geqslant\alpha\}$称为$A$的$\alpha$-截集，用$CB(E)$表示$E$的全体非空闭子集的集合。

推论2.5　设$(E,\ d)$，ϕ，T满足推论2.4的条件，设$F_i:E\to W(E)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots)$是一Fuzzy映象的序列，

(1) 若存在一函数序列$\{\alpha_i(x)\}_{i=1}^{+\infty}$，$\alpha_i(x):E\to(0,\ 1]$ $(i=1,\ 2,\ \cdots)$满足$\forall x\in E$，$(F_ix)_{\alpha_i(x)}\in CB(E)$，$T(F_ix)_{\alpha_i(x)}=(F_iTx)_{\alpha_i(Tx)}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots)$并且$\exists y\in(F_ix)_{\alpha_i(x)}$使得

$$\phi(y)+d(y,\ Tx)\leqslant\phi(x) \tag{2.29}$$

那么对任意$u\in E$，$\phi(Tu)\neq+\infty$和任意$\beta>1$，存在$x_0\in E$使得$x_0=Tx_0$并且

$$\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty}F_ix_0\right)(x_0)\geqslant\min_{i\geqslant1}\{\alpha_i(x_0)\}$$

而且满足(2.21)，(2.22)。

(2) 特别，若$\alpha_i(x)=\max\limits_{u\in E}F_ix(u)$，$\forall x\in E$，$(i=1,\ 2,\ \cdots)$满足(1)的条件，那么存在$x_0\in E$使得$x_0=Tx_0$和

$$\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty}F_ix_0\right)(x_0)=\max_{u\in E}\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty}F_ix_0\right)(u)$$

而且满足(2.21)，(2.22)。

证明　$\forall x\in E$，设$Q_ix=(F_ix)_{\alpha_i(x)}$，根据假设(1)，$\forall x\in E$，$Q_ix\neq\phi$并且$\exists y\in Q_ix=(F_ix)_{\alpha_i(x)}\neq\phi$满足(2.29)，而且$\forall x\in E$，$TQ_ix=T(F_ix)_{\alpha_i(x)}=(F_iTx)_{\alpha_i(Tx)}=Q_iTx$，即$TQ_i=Q_iT$，于是集值映象序列$Q_i:E\to 2^E\setminus\{\phi\}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots)$满足定理2.4的条件。对T和Q_i应用定理2.4我们得到$x_0\in E$满足(2.21)，(2.22)还有$x_0=Tx_0\in Q_ix_0$ $(i=1,\ 2,\ \cdots)$即$x_0=Tx_0\in(F_ix_0)_{\alpha_i(x_0)}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots)$。由此知

$$\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty}F_ix_0\right)(x_0)\geqslant\min_{i\geqslant1}\{\alpha_i(x_0)\}$$

特别，如果　$\alpha_i(x)=\max\limits_{u\in E}F_ix(u)$　　$\forall x\in E$　$(i=1,\ 2,\ \cdots)$

满足条件(1)，根据

$$F_t x_0(x_0) \geqslant \alpha_t(x_0) = \max_{u\in E} F_t x_0(u)$$

我们有
$$\left(\bigcap_{t=1}^{+\infty} F_t x_0\right)(x_0) = \min_{t\geqslant 1} F_t x_0(x_0) \geqslant \min_{t\geqslant 1} \alpha_t(x_0) \geqslant \min_{t\geqslant 1} \max_{u\in E} F_t x_0(u)$$

$$\geqslant \min_{t\geqslant 1} F_t x_0(u) = \left(\bigcap_{t=1}^{+\infty} F_t x_0\right)(u) \qquad \forall u\in E$$

于是
$$\left(\bigcap_{t=1}^{+\infty} F_t x_0\right)(x_0) \geqslant \max_{u\in E} \left(\bigcap_{t=1}^{+\infty} F_t x_0\right)(u) \geqslant \left(\bigcap_{t=1}^{+\infty} F_t x_0\right)(x_0)$$

所以
$$\left(\bigcap_{t=1}^{+\infty} F_t x_0\right)(x_0) = \max_{u\in E} \left(\bigcap_{t=1}^{+\infty} F_t x_0\right)(u)$$

证毕.

注2.3 当$T=I$是E上恒等映象时，推论2.5便是[6]中定理6，故[6]的定理6是推论2.5的一个特例.

参 考 文 献

[1] J. Caristi, Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **215** (1976), 241—251.

[2] 史树中, Ekeland 变分原理与Caristi 不动点定理的等价性, 数学进展, **16**(2) (1987), 203—206.

[3] 张石生、罗群, 集值的 Caristi 不动点定理与 Ekeland 变分原理, 应用数学和力学, **10**(2) (1989), 111—113.

[4] 张石生、黄南京、石川, 概率度量空间中集值 Caristi 定理, 四川大学学报（自然科学版）, **30**(1) (1993), 12—16.

[5] Jeong Sheok Umo, Some existence theorems generalizing fixed point theorems on complete metric spaces, *Math. Japonica*, **40**(1) (1994), 109—114.

[6] Chang Shihsen and Luo Qun, Caristi's fixed point theorem for fuzzy mappings and Ekeland's variational principle, *Fuzzy Sets and Systems*, **64** (1994), 119—125.

[7] S. S. Chang, Yeol Je Cho and Skin Min Kang, *Probabilistic Matric Spaces and Nonlinear Operator Theory*, Sichuan University Press, Chengdu, China (1994).

Caristi Type Hybrid Fixed Point Theorems in Menger Probabilistic Metric Space

Shi Chuan

(*Department of Applied Mathematics, Nanjing University of Science & Technology, Nanjing* 210014, *P. R. China*)

Abstract

This paper brings forward the concept of Caristi type hybrid fixed point in M-PM-space, by giving two hybrid fixed point theorems and two common hybrid fixed point theorems of sequences of set-valued mappings, the theorems improve and generalize the Caristi's fixed point and correspond to recent important results.

Key words probabilistic metric space, Menger space, Caristi's fixed point theorem, hybrid fixed point, common hybrid fixed point