

文章编号: 1000-0887(2005) 02-0163-06

# 基于奇异谱分析的降噪方法及其在 计算最大 Liapunov 指数中的应用\*

刘元峰<sup>1,2</sup>, 赵 玫<sup>1</sup>

(1. 上海交通大学 振动、冲击、噪声国家重点实验室, 上海 200030;

2. 广东科龙电器股份有限公司, 广东 528303)

(本刊原编委李骊推荐)

**摘要:** 基于奇异谱分析对信号的自适应滤波特性, 提出了一种降低混沌信号噪声的算法, 这个算法首先求得信号的各阶经验正交函数(EOF)和主分量(PC), 然后用经验正交函数和主分量重构信号, 根据重构信号的奇异谱选择最优的重构阶次以获得降噪后的信号。在计算动力系统最大 Liapunov 指数时, 由于噪声的存在会降低计算的精度, 因此将提出的降噪算法应用于最大 Liapunov 指数的计算中。通过对 Henon 映射和 Logistic 映射这两个典型混沌系统最大 Liapunov 指数的计算, 结果表明该算法能有效提高最大 Liapunov 指数计算的精度。

**关键词:** 奇异谱分析; 降噪; 最大 Liapunov 指数; 混沌系统

**中图分类号:** O411      **文献标识码:** A

## 引 言

奇异谱分析技术(singular spectrum analysis, SSA)作为一种数据处理的方法已经成功应用于数字信号处理中。Broomhead 和 King 将 SSA 应用于动力学问题中<sup>[1]</sup>, Vautard 等将 SSA 应用于地质数据的分析中, 并提出了一种信号降噪的算法<sup>[2, 3]</sup>。本文提出了一种基于 SSA 的混沌数据降噪算法, 这个算法的本质是选择合适的经验正交函数(empirical orthogonal functions, EOFs)和主分量(principal components, PCs)来重构信号。

用时间序列来计算最大 Liapunov 指数的第一个算法是由 Wolf 等在 1985 年提出来的<sup>[4]</sup>, 这个算法至今还得到广泛的应用, 尽管它有一定的局限性。Rosenstein 和 Kantz 等人提出了一种改进的算法<sup>[5-7]</sup>, 本文的计算就采用了这种算法。

## 1 基于 SSA 的降噪方法

一个测量得到的时间序列可以表示为

\* 收稿日期: 2003\_05\_23; 修订日期: 2004\_09\_14

基金项目: 国家重点基础研究发展规划资助项目(G1998020321); 国家 863 资助项目(2002AA412410)

作者简介: 刘元峰(1970—), 男, 山东人, 博士(Tel: + 86\_757\_28361599; Fax: + 86\_757\_28361070; E\_mail: yuanfengliu@sina.com);

赵玫(联系人, Tel: + 86\_21\_54744990\_203; Fax: + 86\_21\_54747451; E\_mail: mzhaos@sjtu.edu.cn)。

$$x_i, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

SSA 是 Karhunen-Loeve 展开理论的应用, 时间序列  $x_i$  的延迟协变矩阵 (lagged covariance matrix)  $T_x$  也是 SSA 的基础. 这个延迟协变矩阵是一个具有如下结构的 Toeplitz 矩阵:

$$T_x = \begin{bmatrix} c(0) & c(1) & \dots & \dots & \dots & c(M-1) \\ c(1) & c(0) & c(1) & \dots & \dots & \dots \\ \dots & c(1) & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & c(1) \\ c(M-1) & \dots & \dots & \dots & c(1) & c(0) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

式中,  $c(j)$  是延时为  $j$  时  $x_i$  的协方差,  $M$  是嵌入维数, 一般情况下,  $c(j)$  可以由下式得到:

$$c(j) = \frac{1}{N-j} \sum_{i=1}^{N-j} x_i x_{i+j}, \quad 0 \leq j \leq M-1. \quad (2)$$

Toeplitz 矩阵  $T_x$  的特征值按降序排列  $e_1 \geq e_2 \geq \dots \geq e_M \geq 0$ , 矩阵  $T_x$  的特征值  $e_k$  对应的特征向量  $E^k$  称为经验正交函数 (empirical orthogonal function, EOF), 第  $k$  个主分量 (principal component, PC) 定义为时间序列  $x_i$  在第  $k$  个经验正交函数  $E^k$  上的正交投影系数:

$$a_i^k = \sum_{j=1}^M x_{i+j} E_j^k, \quad 0 \leq i \leq N-M. \quad (3)$$

若各个主分量和经验正交函数为已知量, 则由 PC 和 EOF 反求即重构时间序列的过程可按下式进行:

$$x_{i+j} = \sum_{k=1}^M a_i^k E_j^k, \quad 1 \leq j \leq M. \quad (4)$$

选择合适的 PCs 和 EOFs 来重构信号可以降低信号中的噪声. 但是必须选择合适的阶次来进行重构, 以前的研究在阶次的选择上有比较大的主观性. 如果阶次选择不合适, 重构

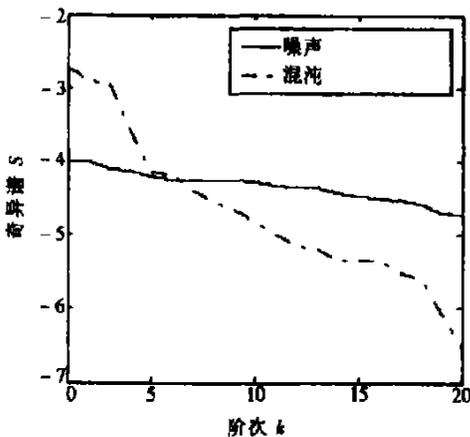


图 1 信号和噪声的奇异谱

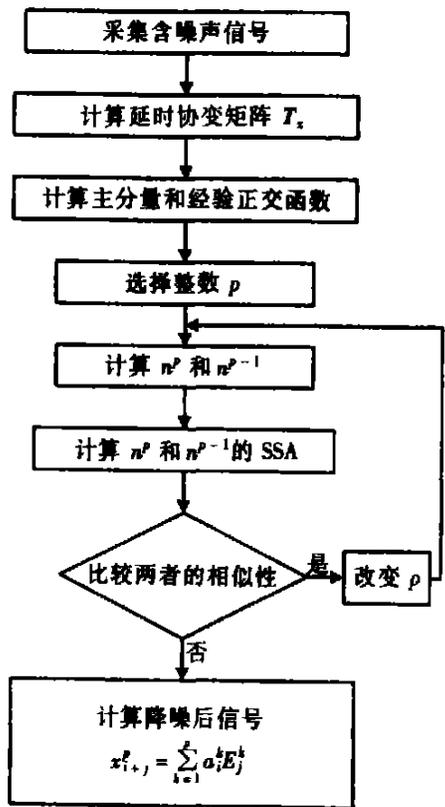


图 2 降噪算法流程图

出的信号会丢失部分特征信息或者包含太多的噪声。为了避免这种主观因素对信号降噪的影响,就要寻求一种判断法则来正确选择有用的主分量,这样才能得到理想的结果。

用前  $p$  个主分量和经验正交函数来重构信号,则有

$$x_{i+j}^p = \sum_{k=1}^p a_i^k E_j^k, \quad 1 \leq j \leq M, \quad (5)$$

而由剩余的主分量和经验正交函数则重构出的噪声

$$n_{i+j}^p = \sum_{k=p+1}^M a_i^k E_j^k, \quad 1 \leq j \leq M. \quad (6)$$

为了获得最优的降噪效果,最重要的就是选择最优的重构阶次  $p$ 。图 1 是白噪声信号和混沌信号的奇异谱图,从图上可以看到两者的奇异谱有显著的不同。

假设信号中的噪声是白噪声,就可以用白噪声奇异谱的特性来确定最优的重构阶次  $p$ 。对于一个给定的阶次  $p$  用式(6) 重构出噪声信号然后计算其奇异谱,改变  $p$  值重复上述过程,直到重构阶次  $p$  的奇异谱和重构阶次  $p - 1$  的奇异谱具有显著的不同,则  $p - 1$  就是最优重构阶次。

这个降噪算法的主要过程如图 2 所示。

为了验证上述算法的有效性,我们用一个含噪声的混沌信号来仿真。考虑 Henon 映射,

$$x_{i+1} = 1 - ax_i^2 + bx_{i-1}, \quad (7)$$

当参数取值为  $a = 1.4$  和  $b = 0.3$  时系统是混沌的。给混沌序列  $x_i$  加上一个白噪声信号  $w$  得到含噪声的混沌信号

$$y = x + w, \quad (8)$$

然后选择不同的阶次  $p$  用式(6) 重构噪声信号。重构出噪声信号的奇异谱如图 3 所示,由图 3 可见,  $p = 3$  与  $p = 4$  两条曲线的差别是显然的,所以在这个情况下最优的重构阶次是  $p = 3$ 。

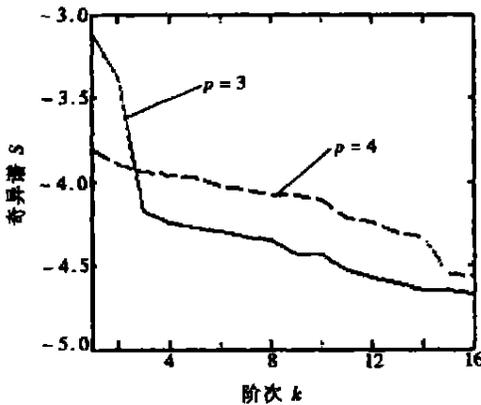


图 3 不同  $p$  值重构噪声的奇异谱图

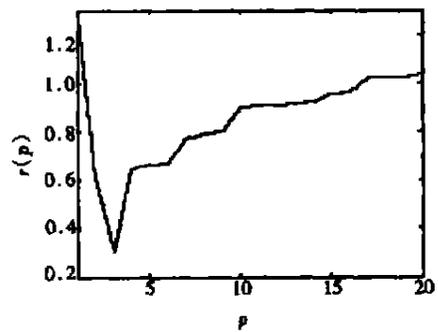


图 4 不同  $p$  值时的噪声

为了验证上述结论,我们定义  $r(p)$  为用前  $p$  个 EOFs 和 PCs 重构信号的噪声剩余率,可以表示为

$$r(p) = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - x_i^p)^2}{\sum_{i=1}^N (y_i - x_i)^2}, \quad (9)$$

式中,  $y_i$  为含噪声数据,  $x_i$  为无噪声数据。用不同的  $p$  来计算  $r(p)$ , 当噪声剩余率达到最小值

时的阶次  $p$  就是最优阶次。图 4 是噪声剩余率  $r(p)$  随阶次  $p$  的变化曲线。很明显当  $p = 3$  时具有最好的降噪效果, 此时的噪声剩余率只有大约 30% 左右, 从图 4 得到的结论和从图 3 得到的结论是一致的, 从而说明上述算法的有效性。

## 2 最大 Liapunov 指数的估计方法

### 2.1 估计方法

正的 Liapunov 指数是系统混沌的一个标志, 所以有必要根据系统的响应计算最大 Liapunov 指数。本文用 Kantz's 算法计算一个时间序列的最大 Liapunov 指数<sup>[7]</sup>, 这个算法的特点就是允许判断指数发散规律的存在性。主要过程如下: 在时间序列重构空间中选择一个初始点  $\beta_{n_0}$ , 并定义  $U(\beta_{n_0})$  为  $\beta_{n_0}$  的半径为  $\varepsilon$  的邻域。邻域半径选择的原理是, 在每一个参考点的邻域中有足够数量的点来计算的前提下, 使邻域中的点数尽量少, 以减小计算量, 否则将会失掉部分信息, 得到错误的结果。然后用公式(10) 计算  $S(\Delta n)$ 。

$$(S \Delta n) = \frac{1}{N} \sum_{n_0=1}^N \ln \left( \frac{1}{|U(\beta_{n_0})|} \sum_{\beta_n \in U(\beta_{n_0})} |S_{n_0+\Delta n} - S_{n+\Delta n}| \right), \quad (10)$$

如果在某个区间上  $S(\Delta n)$  随  $\Delta n$  线性增加, 那么这段直线的斜率就是最大 Liapunov 指数的一个估计值。

### 2.2 噪声的影响

信号中噪声的存在会影响计算的精度, 只有当噪声水平较低时才能用式(10) 来估计系统的最大 Liapunov 指数。

考虑 Henon 映射,  $x_{i+1} = 1 - ax_i^2 + bx_{i-1}$  当参数取值为  $a = 1.4$  和  $b = 0.3$  时, 系统的最大 Liapunov 指数为 0.418。在给信号叠加噪声前, 为了获得需要的信噪比(signal\_to\_noise ratio, SNR), 对白噪声信号乘以一个因子。信噪比定义为

$$R_{\text{SNR}} = 10 \lg(P_s/P_n), \quad (11)$$

式中,  $P_s$  为无噪声信号的功率,  $P_n$  为噪声的功率。当信噪比大于 30 dB 时可以认为是低噪声的, 当信噪比小于 10 dB 时认为信号是高噪声的。

对不同的噪声水平, 计算结果如图 5 所示。图 5 中实线为用式(10) 计算的曲线, 虚线的斜率就是理论值。从图中可以清楚看出当  $R_{\text{SNR}}$  大于 10 dB 时还可以从含噪声的数据中估计出最大 Liapunov 指数, 信噪比再小就无法有效地估计出最大 Liapunov 指数值了。所以在计算前对信号做降噪处理很有必要。

## 3 数值仿真结果和讨论

下面计算两种典型混沌系统的最大 Liapunov 指数, 这两种系统如表 1 所列:

表 1 两种混沌动力系统及其理论值

系统	方程	参数	$\Delta t/s$	$\lambda_1$
Henon 映射	$x_{i+1} = 1 - ax_i^2 + bx_{i-1}$	$a = 1.4$ $b = 0.3$	1	0.418 <sup>[6]</sup>
Logistic 映射	$x_{i+1} = \mu x_i(1 - x_i)$	$\mu = 4.0$	1	0.693 <sup>[7]</sup>

为了获得一定的信噪比  $R_{\text{SNR}}$ , 给上述两个系统产生的混沌时间序列叠加上一个一定大小的白噪声。对含噪声的时间序列用前述的降噪方法进行降噪处理, 分别用降噪前后的数据来

计算系统的最大 Liapunov 指数, 并与理论值进行比较。计算的结果如表 2 所列。表 2 中  $\lambda_m$  是用含噪声的数据计算得到的结果,  $\lambda_d$  是用降噪后的数据计算的结果, 很明显在几乎所有的情况下  $\lambda_d$  的误差要比  $\lambda_m$  的误差小。当信号的  $R_{SNR}$  小于 10 dB 时, 用含噪声数据已经很难计算出最大 Liapunov 指数, 因为计算的结果曲线上已经没有明显的具有一定斜率的直线部分, 但此时  $\lambda_d$  仍可以计算出来。

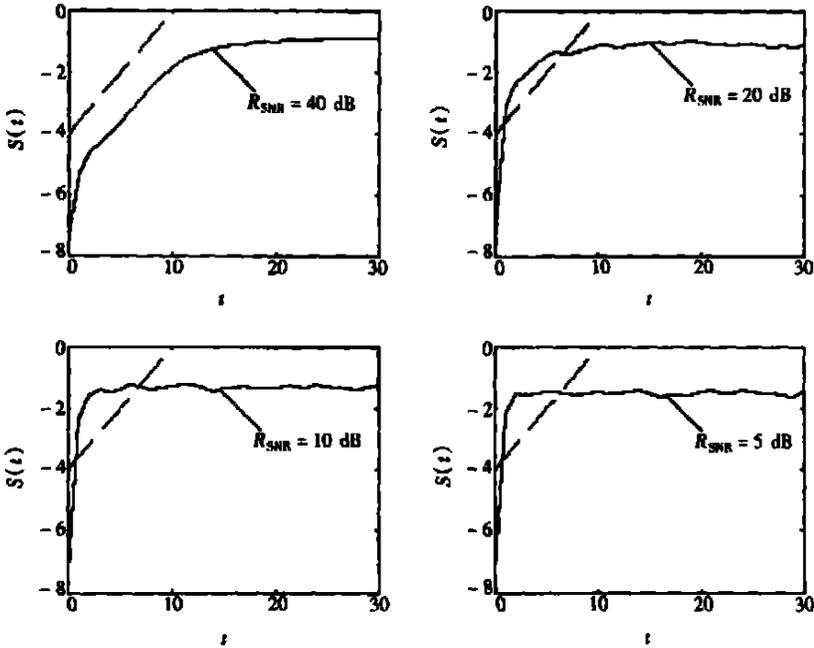


图 5 不同  $R_{SNR}$  的仿真计算结果  
不同噪声水平下的计算结果

表 2

系统	$N$	$m$	$R_{SNR}/\text{dB}$	$\lambda_m$	误差 $e_{11}/(\%)$	$\lambda_d$	误差 $e_{1d}/(\%)$
Henon 映射	2 000	3	40	0.424	1.4	0.428	2.3
			30	0.441	5.5	0.431	3.1
			20	0.473	13.2	0.452	8.1
			10		0.461	10.3	
			5		0.486	16.3	
Logistic 映射	2 000	3	40	0.708	2.2	0.706	1.9
			30	0.737	6.3	0.715	3.2
			20	0.776	12.0	0.755	8.9
			10		0.778	12.3	
			5		0.864	24.7	

## 4 结 论

本文提出了一种基于奇异谱分析的信号降噪算法。利用奇异谱分析的自适应滤波特性来去除混沌信号中的噪声, 在这个过程中用噪声奇异谱的特性来确定最优的信号重构的阶次。并将本文提出的算法应用于最大 Liapunov 指数的计算中, 数值仿真的结果证明了本方法可以

## 提高最大 Liapunov 指数的计算精度

## [参 考 文 献]

- [1] Broomhead D S, King G P. Extracting qualitative dynamics from experimental data[J]. *Physica D*, 1986, **20**(2/3): 217—236.
- [2] Vautard R, Ghil M. Singular spectrum analysis in nonlinear dynamics, with applications to paleoclimatic time series[J]. *Physica D*, 1989, **35**(3): 395—424.
- [3] Vautard R, Yiou P, Ghil M. Singular\_spectrum analysis: a toolkit for short, noisy chaotic signals[J]. *Physica D*, 1992, **58**(1/4): 95—126.
- [4] Wolf A, Swift J B, Swinney H L, et al. Determining Liapunov exponents from a time series[J]. *Physica D*, 1985, **16**(3): 285—297.
- [5] Kantz H, Schreiber T. *Nonlinear Time Series Analysis* [M]. New York: Cambridge University Press, 1997.
- [6] Rosenstein Michael T, Collins James J, De Luca Carlo J. A practical method for calculating largest Liapunov exponents from small data sets[J]. *Physica D*, 1993, **65**(1/2): 117—133.
- [7] Kantz Holger. A robust method to estimate the maximal Liapunov exponent of a time series[J]. *Physics Letters A*, 1994, **185**(1): 77—87.

## Denoising Method Based on Singular Spectrum Analysis and Its Applications in Calculation of Maximal Liapunov Exponent

LIU Yuan\_feng<sup>1, 2</sup>, ZHAO Mei<sup>1</sup>

(1. State Key Laboratory of Vibration, Shock and Noise,

Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, P. R. China;

2. Guangdong Kelon Electrical Holdings Co. Ltd., Guangdong 528303, P. R. China)

**Abstract:** An algorithm based on the data\_adaptive filtering characteristics of singular spectrum analysis (SSA) is proposed to denoise chaotic data. Firstly, the empirical orthogonal functions (EOFs) and principal components (PCs) of the signal were calculated, reconstruct the signal using the EOFs and PCs, and choose the optimal reconstructing order based on sigular spectrum to obtain the denoised signal. The noise of the signal can influence the calculating precision of maximal Liapunov exponents. The proposed denoising algorithm was applied to the maximal Liapunov exponents calculations of two chaotic system, Henon map and Logistic map. Some numerical results show that this denoising algorithm could improve the calculating precision of maximal Liapunov exponent.

**Key words:** singular spectrum analysis; denoising; maximal Liapunov exponent; chaotic system