应用数学和力学,第 25 卷 第 3 期(2004 年 3 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2004) 03_0313_10

关于弹性力学广义变分原理的等价性定理的研究*

张国清, 余建星

(天津大学 建筑工程学院, 天津 300072)

(黄黔推荐)

摘要: 利用场论中的不变性原理研究弹性力学广义变分原理的等价性定理, 主要目的是研究弹性力学广义变分原理之间的关系; 根据弹性力学广义变分原理的泛函在无穷小标度变换下的不变性, 证明了这些泛函之间的等价性定理• 如果这些泛函具有无穷小标度变换下的不变性, 那么只有两类变量是独立的, 应力应变关系是这些泛函必须满足的变分约束条件• 所得到的结果再一次证明了钱伟长教授关于所有的弹性力学广义变分原理都是等价的结论•

关 键 词: 弹性力学; 广义变分原理; 等价性定理; 标度变换; 不变性
中图分类号: TU457; O343 文献标识码: A

引 言

在 1914 年和 1950 年, Hellinger[1]和 Ressner[2]提出了弹性力学的一个广义变分原理, 这个原理被称之为弹性力学的 Hellinger_Ressner 原理, 其泛函表示如下:

$$\Pi_{\mathrm{HR}} = \iiint_V\left\{-\frac{1}{2}b_{ijkl}\,\sigma_{ij}\,\sigma_{kl} - (\sigma_{ij,j} + F_i)\,u_i\right\}\mathrm{d}V + \iint_{S_\sigma}(n_j\,\sigma_{ij} - p_i)\,u_i\,\mathrm{d}S + \iint_{S_u} n_j\,\sigma_{ij}u_i\,\mathrm{d}S \tag{1}$$

胡海昌教授和日本的鹫津久一朗教授在二十世纪五十年代提出了包括三个宗量的广义变分原理[3,4], 被称之为 Hu_Washizu 原理• 这个原理曾被认为是最一般的广义变分原理, 因为它包含了似乎是独立的位移, 应力和应变• 其泛函为:

$$\Pi_{\mathrm{HW}} = \iiint_V\left\{\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}\,e_{kl} - F_iu_j - \sigma_{ij}\left[e_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})\right]\right\}\mathrm{d}V - \iint_{S_\sigma}p_iu_i\,\mathrm{d}S - \iint_{S_u}n_i\,\sigma_{ij}(u_i - u_i)\,\mathrm{d}S \tag{2}$$

六十年代以来, 又陆续的提出了其它形式的弹性力学广义变分原理:

钱伟长教授曾利用高阶拉氏乘子法提出两个最为一般的弹性力学广义变分原理, 所有的

* 收稿日期: 2002_12_16; 修订日期: 2003_10_28
基金项目: 教育部博士点基金资助项目
作者简介: 张国清(1953—) , 男, 辽宁人, 高级工程师, 博士(联系人. Tel: 86_22_86814938, Fax: 86_22_27403841, 86_13302129617; Fax: 86_22_27403841; E_mail: changzgq@ public. tpt. tj. cn) ;
余建星(1958—) , 男, 福建人, 教授, 博士, 博士生导师, 天津大学建工学院院长.

弹性力学广义变分原理都可以从这两个原理导出• 这两个原理的泛函为:

$$\Pi_{G\lambda'} = \iiint_V \left\{ \frac{1}{2} a_{ijkl} e_{ij} e_{kl} - F_i u_j - \sigma_{ij} \left[e_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \right] \right\} \mathrm{d}V - \iint_{S_\sigma} p_i u_i \mathrm{d}S - \iint_{S_u} n_i \sigma_{ij} (u_i - u_i) \mathrm{d}S + \iiint_V \lambda' \left\{ \frac{1}{2} a_{ijkl} e_{ij} e_{kl} + \frac{1}{2} b_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} - \sigma_{ij} e_{ij} \right\} \mathrm{d}V, \tag{3}$$

$$\Pi_{G\lambda} = \iiint_V \left\{ - \frac{1}{2} a_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} - (\sigma_{ij,j} + F_i) u_i \right\} \mathrm{d}V + \iint_{S_\sigma} (n_j \sigma_{ij} - p_i) u_i \mathrm{d}S + \iint_{S_u} n_j \sigma_{ij} u_i \mathrm{d}S + \iiint_V \lambda \left\{ \frac{1}{2} a_{ijkl} e_{ij} e_{kl} + \frac{1}{2} b_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} - \sigma_{ij} e_{ij} \right\} \mathrm{d}V• \tag{4}$$

还有其它形式的弹性力学广义变分原理, 如梁国平_傅子智广义变分原理和胡海昌广义余能原理, 其泛函分别为:

$$\Pi_{LF} = \iiint_V \left\{ \frac{1}{2} \left[- \frac{1}{2} b_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} - \left(e_{ij} \sigma_{ij} - \frac{1}{2} a_{ijkl} e_{ij} e_{kl} \right) \right] - (\sigma_{ij,j} + F_i) u_i \right\} \mathrm{d}V + \iint_{S_\sigma} (n_j \sigma_{ij} - p_i) u_i \mathrm{d}S + \iint_{S_u} n_j \sigma_{ij} u_i \mathrm{d}S• \tag{5}$$

$$\Pi_{GC} = \iiint_V \left\{ \frac{1}{2} a_{ijkl} e_{ij} e_{kl} - e_{ij} \sigma_{ij} - (\sigma_{ij,j} + F_i) u_i \right\} \mathrm{d}V + \iint_{S_\sigma} (n_j \sigma_{ij} - p_i) u_i \mathrm{d}S + \iint_{S_u} n_j \sigma_{ij} u_i \mathrm{d}S• \tag{6}$$

钱伟长教授历史性的总结了弹性力学中的广义变分原理, 使用拉氏乘子法和唯一性定理证明了泛函 Π_{HR} 和 Π_{HW} 之间的等价性, 提出了弹性力学中所有广义变分原理之间的等价性定理[5,6], 并在发表的论文[6] 中提出了这样的问题: “ 现在还不知道为什么所有已知的变分原理中无法解除应力应变关系的约束”•

本文利用场论中的不变性原理来研究弹性力学广义变分原理之间的等价性定理• 应用泛函在无穷小标度变换下的不变性条件, 我们证明了弹性力学广义变分原理之间的等价性定理•

对于无穷小标度变换和线弹性条件而言, 这种不变性确实是成立的[7,8] •

1 无穷小标度变换和弹性力学广义变分原理泛函的不变性条件

假定所考虑的材料是线弹性的并且各向同性, 则坐标 x_i, 位移 u_i, 应变 e_{ij} 和应力 σ_{ij} 的无穷小标度变换可以表示如下:

$$\begin{cases} x_i \to x_i^* = x_i + \varepsilon x_i, \quad u_i \to u_i^* = u_i - \varepsilon u_i, & (7a, b) \\ \sigma_{ij} \to \sigma_{ij}^* = \sigma_{ij} - 2\varepsilon\sigma_{ij}, \quad e_{ij} \to e_{ij}^* = e_{ij} - 2\varepsilon e_{ij}, & (7c, d) \end{cases}$$

式中 ε 是一无穷小量, 式(7a~ d) 的证明如下:

如果坐标 $x_i \to x_i^*$, 体积分域 $V \to V^*$, 面积分域 $S \to S^*$, 则

$$\begin{cases} u_i^* = \dfrac{\partial x_k}{\partial x_j^*} u_k, \quad e_{ij}^* = \dfrac{\partial x_k}{\partial x_i^*}\dfrac{\partial x_l}{\partial x_j^*} e_{kl}, \\ \sigma_{ij}^* = \dfrac{\partial x_k}{\partial x_i^*}\dfrac{\partial x_l}{\partial x_j^*}\sigma_{kl}, \quad u_{i,j^*}^* = \dfrac{\partial}{\partial x_j^*}\dfrac{\partial x_k}{\partial x_i^*} u_k, \\ e_{ij,j^*}^* = \dfrac{\partial}{\partial x_j^*}\dfrac{\partial x_k}{\partial x_i^*}\dfrac{\partial x_l}{\partial x_j^*} e_{kl}, \quad \sigma_{ij,j^*}^* = \dfrac{\partial}{\partial x_j^*}\dfrac{\partial x_k}{\partial x_i^*}\dfrac{\partial x_l}{\partial x_j^*}\sigma_{kl}. \end{cases} \tag{8a, b, c, d, e, f}$$

使用(7a~ d)中的第一个表达式

$$x_i \to x_i^* = x_i + \varepsilon x_i,$$

则可以写出:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_i^*}{\partial x_j} = \left(\delta_{ij} + \varepsilon\dfrac{\partial x_i}{\partial x_j}\right) = (1+\varepsilon)\delta_{ij}, \quad \dfrac{\partial x_j}{\partial x_i^*} = (1-\varepsilon)\delta_{ij}, \\ \dfrac{\partial}{\partial x_\beta} = \dfrac{\partial}{\partial x_j^*}\dfrac{\partial x_j^*}{\partial x_\beta} = \left(\delta_{j\beta} + \varepsilon\dfrac{\partial x_j}{\partial x_\beta}\right)\dfrac{\partial}{\partial x_j^*} = (1+\varepsilon)\delta_{j\beta}\dfrac{\partial}{\partial x_j^*}. \end{cases} \tag{9a, b, c}$$

因此有:

$$\begin{cases} u_i^* = \dfrac{\partial x_k}{\partial x_i^*} u_k = \left(\delta_{ki} - \varepsilon\dfrac{\partial x_k}{\partial x_i}\right) u_k = (1-\varepsilon) u_i, \\ \sigma_{ij}^* = \dfrac{\partial x_k}{\partial x_i^*}\dfrac{\partial x_l}{\partial x_j^*}\sigma_{kl} = \left(\delta_{ki} - \varepsilon\dfrac{\partial x_k}{\partial x_i}\right)\left(\delta_{lj} - \varepsilon\dfrac{\partial x_l}{\partial x_j}\right)\sigma_{kl} = \\ \qquad (1-\varepsilon)(1-\varepsilon)\delta_{ki}\delta_{lj}\sigma_{kl} = (1-2\varepsilon)\sigma_{ij}, \\ e_{ij}^* = \dfrac{\partial x_k}{\partial x_i^*}\dfrac{\partial x_l}{\partial x_j^*} e_{kl} = \left(\delta_{ki} - \varepsilon\dfrac{\partial x_k}{\partial x_i}\right)\left(\delta_{lj} - \varepsilon\dfrac{\partial x_l}{\partial x_j}\right) e_{kl} = \\ \qquad (1-\varepsilon)(1-\varepsilon)\delta_{ki}\delta_{lj} e_{kl} = (1-2\varepsilon) e_{ij}. \end{cases} \tag{10a, b, c}$$

$$\begin{cases} u_{i,j^*}^* = \dfrac{\partial}{\partial x_j^*}\dfrac{\partial x_k}{\partial x_i^*} u_k = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_j} - \varepsilon\dfrac{\partial x_\beta}{\partial x_j}\dfrac{\partial}{\partial x_\beta}\right)\left(\delta_{ki} - \varepsilon\dfrac{\partial x_k}{\partial x_i}\right) u_k = \\ \qquad \left(\dfrac{\partial}{\partial x_j} - \varepsilon\dfrac{\partial x_\beta}{\partial x_j}\dfrac{\partial}{\partial x_\beta}\right)(1-\varepsilon) u_i = (1-2\varepsilon) u_{i,j}, \\ \sigma_{ij,j^*}^* = \dfrac{\partial}{\partial x_j^*}\dfrac{\partial x_k}{\partial x_i^*}\dfrac{\partial x_l}{\partial x_j^*}\sigma_{kl} = \\ \qquad \left(\dfrac{\partial}{\partial x_j} - \varepsilon\dfrac{\partial x_\beta}{\partial x_j}\dfrac{\partial}{\partial x_\beta}\right)\left(\delta_{ki} - \varepsilon\dfrac{\partial x_k}{\partial x_i}\right)\left(\delta_{lj} - \varepsilon\dfrac{\partial x_l}{\partial x_j}\right)\sigma_{kl} = \\ \qquad \left(\dfrac{\partial}{\partial x_j} - \varepsilon\delta_{\beta j}\dfrac{\partial}{\partial x_\beta}\right)(1-2\varepsilon)\sigma_{ij} = (1-3\varepsilon)\sigma_{ij,j}, \\ e_{ij,j^*}^* = \dfrac{\partial}{\partial x_j^*}\dfrac{\partial x_k}{\partial x_i^*}\dfrac{\partial x_l}{\partial x_j^*} e_{kl} = \\ \qquad \left(\dfrac{\partial}{\partial x_j} - \varepsilon\delta_{\beta j}\dfrac{\partial}{\partial x_\beta}\right)(1-2\varepsilon) e_{ij} = (1-3\varepsilon) e_{ij,j}. \end{cases} \tag{11a, b, c}$$

这样,我们便证明了表达式(7a~ d).

如果弹性力学广义变分原理的泛函 $\Pi(u_i, e_{ij}, \sigma_{ij})$ 在无穷小标度变换(7a~ d)下是不变的,那么泛函必须满足条件:

$$\Pi^*(u_i^*, e_{ij}^*, \sigma_{ij}^*) = \Pi(u_i, e_{ij}, \sigma_{ij}), \tag{12}$$

上式便是泛函 $\Pi(u_i, e_{ij}, \sigma_{ij})$ 在无穷小标度变换(7a~ d)下的不变性条件.

2 泛函 $\Pi_{G\lambda'}$ 和 $\Pi_{G\lambda}$ 之间等价定理的证明

钱伟长教授曾经发展了两个最为一般的弹性力学广义变分原理，并用拉氏乘子法和唯一性定理证明了泛函之间的等价定理:

$$\Pi_{G\lambda'} - \Pi_{G\lambda} = \iiint_V (1+\lambda'-\lambda)\left\{\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{kl} + \frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} - \sigma_{ij}e_{ij}\right\}\mathrm{d}V = 0. \tag{13}$$

现在，我们利用泛函在无穷小标度变换下的不变性原理来证明这一等价性定理. 引入变换(7a~d)，则可将泛函 $\Pi^*_{G\lambda'}$ 和 $\Pi^*_{G\lambda}$ 写成:

$$\begin{aligned}\Pi^*_{G\lambda'} = &\iiint_{V^*}\left\{\frac{1}{2}a_{ijkl}e^*_{ij}e^*_{kl} - F_iu^*_j - \sigma^*_{ij}\left[e^*_{ij} - \frac{1}{2}(u^*_{i,j^*} + u^*_{j,i^*})\right]\right\}\mathrm{d}V^* - \\ &\iint_{S^*_\sigma} p_iu^*_i\,\mathrm{d}S^* - \iint_{S^*_u} n_j\sigma^*_{ij}(u^*_i - u_i)\,\mathrm{d}S^* + \\ &\iiint_{V^*}\lambda'\left\{\frac{1}{2}a_{ijkl}e^*_{ij}e^*_{kl} + \frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma^*_{ij}\sigma^*_{kl} - \sigma^*_{ij}e^*_{ij}\right\}\mathrm{d}V^*.\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\Pi^*_{G\lambda} = &\iiint_{V^*}\left\{-\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma^*_{ij}\sigma^*_{kl} - (\sigma^*_{ij,j^*} + F_i)u^*_i\right\}\mathrm{d}V^* + \\ &\iint_{S^*_\sigma}(n_j\sigma^*_{ij} - p_i)u^*_i\,\mathrm{d}S^* + \iint_{S^*_u} n_j\sigma^*_{ij}u_i\,\mathrm{d}S^* + \\ &\iiint_{V^*}\lambda\left\{\frac{1}{2}a_{ijkl}e^*_{ij}e^*_{kl} + \frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma^*_{ij}\sigma^*_{kl} - \sigma^*_{ij}e^*_{ij}\right\}\mathrm{d}V^*.\end{aligned} \tag{15}$$

对于表面法向矢量的分量 n_i 和弹性常数 a_{ijkl}, b_{ijkl} 而言，显然它们是无穷小标度变换不变的. 将表达式(7a~d)，(10a~c)，(11a~c)代入到(14)和(15)，我们可以将其表示成:

$$\begin{aligned}\Pi^*_{G\lambda'} = &\iiint_V\Big\{(1-4\varepsilon)\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl} - F_iu_i(1-\varepsilon) - \\ &(1-4\varepsilon)\sigma_{ij}\left[e_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})\right]\Big\}J_V(x^*, x)\,\mathrm{d}V - \\ &\iint_{S_\sigma} p_iu_i(1-\varepsilon)J_S(x^*, x)\,\mathrm{d}S - \\ &\iint_{S_u}(1-2\varepsilon)n_j\sigma_{ij}[(1-\varepsilon)u_i - u_i]\,J_S(x^*, x)\,\mathrm{d}S + \\ &\iiint_V\lambda'\left\{(1-4\varepsilon)\left(\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl} + \frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} - \sigma_{ij}e_{ij}\right)\right\}J_V(x^*, x)\,\mathrm{d}V^*,\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}\Pi^*_{G\lambda} = &\iiint_V\Big\{-(1-4\varepsilon)\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} - ((1-3\varepsilon)\sigma_{ij,j} + \\ &F_i)(1-\varepsilon)u_i\Big\}J_V(x^*, x)\,\mathrm{d}V + \\ &\iint_{S_\sigma}(n_j\sigma_{ij}(1-2\varepsilon) - p_i)u_i(1-\varepsilon)J_S(x^*, x)\,\mathrm{d}S + \\ &\iint_{S_u} n_j(1-2\varepsilon)\sigma_{ij}u_iJ_S(x^*, x)\,\mathrm{d}S + \\ &\iiint_V\lambda(1-4\varepsilon)\left\{\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl} + \frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} - \sigma_{ij}e_{ij}\right\}J_V(x^*, x)\,\mathrm{d}V^*,\end{aligned} \tag{17}$$

$J(x^*, x)$ 是 Jacobian 行列式，定义如下:

$$J(x^*, x) = \det\left(\frac{\partial x^*_i}{\partial x_j}\right). \tag{18}$$

可以将 $J(x^*, x)$ 表示为:

$$J(x^*, x) = 1 + \frac{\partial \delta x_i^*}{\partial x_j} + O(\varepsilon)\cdot$$

在无穷小标度变换(7a~d)下, $J(x^*, x)$ 可以近一步表示成:

$$J(x^*, x) = 1 + \varepsilon\delta_{ii}, \tag{19a}$$

如果 $V \to V^*$, $J_V(x^*, x) = 1 + 3\varepsilon$,

$$S \to S^*, \quad J_S(x^*, x) = 1 + 2\varepsilon\cdot \tag{19b, c}$$

将表达式(19)代入到(16)和(17), 并将(16), (17)展开, 经整理并利用式(3)和(4) 我们可以将 $\Pi^*_{G\lambda'}$ 和 $\Pi^*_{G\lambda}$ 写成:

$$\begin{aligned}\Pi^*_{G\lambda'} = \Pi_{G\lambda'} + \varepsilon\Big[\Pi_{HW} + \iiint_V\Big\{-a_{ijkl}e_{ij}e_{kl} - F_iu_i + \\ 2\sigma_{ij}\Big[e_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})\Big]\Big\}dV + 2\iint_{S_u} n_j\sigma_{ij}u_i dS - \iint_{S_u} n_j\sigma_{ij}u_i dS - \\ \iiint_V \lambda'\Big\{\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl} + \frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} - \sigma_{ij}e_{ij}\Big\}dV\Big],\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}\Pi^*_{G\lambda} = \Pi_{G\lambda} + \varepsilon\Big[\Pi_{HR} + \iiint_V\Big\{b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} + 2\sigma_{ij,j}u_i - F_iu_i\Big\}dV - \\ 2\iint_{S_\sigma} n_j\sigma_{ij}u_i dS - \iint_{S_u} n_j\sigma_{ij}u_i dS - \\ \iiint_V \lambda\Big\{\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl} + \frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} - \sigma_{ij}e_{ij}\Big\}dV\Big],\end{aligned} \tag{21}$$

考虑到 $\varepsilon \neq 0$, 因此泛函 $\Pi_{G\lambda'}$ 在无穷小标度变换(7a~d)下的不变性条件是:

$$\begin{aligned}\Pi_{HW} + \iiint_V\Big\{-a_{ijkl}e_{ij}e_{kl} - F_iu_i + 2\sigma_{ij}\Big[e_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})\Big]\Big\}dV + \\ 2\iint_{S_\sigma} n_j\sigma_{ij}u_i dS - \iint_{S_u} n_j\sigma_{ij}u_i dS - \\ \iiint_V \lambda'\Big\{\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl} + \frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} - \sigma_{ij}e_{ij}\Big\}dV = 0\cdot\end{aligned} \tag{22}$$

比较式(2)和(3), 可以将不变性条件(22)进一步改写成:

$$\begin{aligned}\Pi_{G\lambda'} = \iiint_V\Big\{a_{ijkl}e_{ij}e_{kl} + F_iu_i - 2\sigma_{ij}\Big[e_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})\Big]\Big\}dV - \\ 2\iint_{S_u} n_j\sigma_{ij}u_i dS + \iint_{S_u} n_j\sigma_{ij}u_i dS + \\ 2\iiint_V \lambda'\Big\{\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl} + \frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} - \sigma_{ij}e_{ij}\Big\}dV\cdot\end{aligned} \tag{23}$$

同样推导过程, 我们可以写出泛函 $\Pi_{G\lambda}$ 在无穷小标度变换(7a~d)下的不变性条件:

$$\begin{aligned}\Pi_{HR} + \iiint_V\Big\{b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} + 2\sigma_{ij,j}u_i - F_iu_i\Big\}dV - 2\iint_{S_\sigma} n_j\sigma_{ij}u_i dS - \\ \iint_{S_u} n_j\sigma_{ij}u_i dS - \iiint_V \lambda\Big\{\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl} + \frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} - \sigma_{ij}e_{ij}\Big\}dV = 0\cdot\end{aligned} \tag{24}$$

利用(1)和(4), 不变性条件(24)可以改写成:

$$\Pi_{G\lambda} = \iiint_V\Big\{-b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} - 2\sigma_{ij,j}u_i + F_iu_i\Big\}dV + 2\iint_{S_\sigma} n_j\sigma_{ij}u_i dS +$$

$$\iint_{S_u} n_j \sigma_{ij} u_i \mathrm{d}S + 2\iiint_V \lambda\left\{\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl} + \frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} - \sigma_{ij}e_{ij}\right\}\mathrm{d}V. \tag{25}$$

比较(3)和(4)，我们得到:

$$\Pi_{G\lambda'} - \Pi_{G\lambda} = \iiint_V (1+\lambda'-\lambda)\left\{\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl} + \frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} - \sigma_{ij}e_{ij}\right\}\mathrm{d}V. \tag{26}$$

利用(23)减去(25)，我们可以得到:

$$\begin{aligned}\Pi_{G\lambda'} - \Pi_{G\lambda} = &\iiint_V \left\{a_{ijkl}e_{ij}e_{kl} + b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} - 2\sigma_{ij}\left[e_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\right] + 2\sigma_{ij,j}u_i\right\}\mathrm{d}V + \\ &2\iiint_V(\lambda'-\lambda)\left\{\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl} + \frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} - \sigma_{ij}e_{ij}\right\}\mathrm{d}V - 2\iint_{S_\sigma} n_j\sigma_{ij}u_i\mathrm{d}S - \\ &2\iint_{S_u} n_j\sigma_{ij}u_i\mathrm{d}S = 2\iiint_V(1+\lambda'-\lambda)\left\{\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl} + \frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} - \sigma_{ij}e_{ij}\right\}\mathrm{d}V + \\ &2\iiint_V(\sigma_{ij}u_i)_{,j}\mathrm{d}V - 2\iint_{S_\sigma} n_j\sigma_{ij}u_i\mathrm{d}S - 2\iint_{S_u} n_j\sigma_{ij}u_i\mathrm{d}S.\end{aligned} \tag{27}$$

比较表达式(26)和(27)，我们可以得到:

$$\begin{aligned}&\iiint_V (1+\lambda'-\lambda)\left\{\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl} + \frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} - \sigma_{ij}e_{ij}\right\}\mathrm{d}V = \\ &\quad 2\iiint_V(1+\lambda'-\lambda)\left\{\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl} + \frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\omega_{kl} - \sigma_{ij}e_{ij}\right\}\mathrm{d}V + \\ &\quad 2\iiint_V(\sigma_{ij}u_i)_{,j}\mathrm{d}V - 2\iint_{S_\sigma} n_j\sigma_{ij}u_i\mathrm{d}S - 2\iint_{S_u} n_j\sigma_{ij}u_i\mathrm{d}S.\end{aligned} \tag{28}$$

根据 Green 定理:

$$\iiint_V(\sigma_{ij}u_i)_{,j}\mathrm{d}V - \iint_{S_\sigma} n_j\sigma_{ij}u_i\mathrm{d}S - \iint_{S_u} n_j\sigma_{ij}u_i\mathrm{d}S = 0. \tag{29}$$

则(28)成为:

$$\iiint_V (1+\lambda'-\lambda)\left\{\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl} + \frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} - \sigma_{ij}e_{ij}\right\}\mathrm{d}V = 0. \tag{30}$$

上式(30)正是泛涵 $\Pi_{G\lambda'}$ 和 $\Pi_{G\lambda}$ 之间的等价定理. 现在，我们已经证明了如果泛涵 $\Pi_{G\lambda'}$ 和 $\Pi_{G\lambda}$ 是无穷小标度变换下不变的，那末等价定理成立.

3 泛函 Π_{HR} 和 Π_{HW} 之间等价定理的证明

泛函 Π_{HW} 中含有三个变量并且曾被认为是相互独立的，而泛函 Π_{HR} 含有两个独立的变量. Π_{HW} 曾被认为是弹性力学中更为一般的广义变分原理的泛函. 我们现在证明 Π_{HR} 和 Π_{HW} 之间的等价定理. 类似上述推导过程，我们可以将引入无穷小标度变换后的 Π^*_{HW} 和 Π^*_{HR} 展开为:

$$\begin{aligned}\Pi^*_{HW} = &\iiint_V\left\{(1-4\varepsilon)\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl} - F_iu_i(1-\varepsilon) - \right.\\ &\left.(1-4\varepsilon)\sigma_{ij}\left[e_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\right]\right\}(1+3\varepsilon)\mathrm{d}V - \iint_{S_\sigma}p_iu_i(1-\varepsilon)(1+2\varepsilon)\mathrm{d}S - \\ &\iint_{S_u}(1-2\varepsilon)n_j\sigma_{ij}((1-\varepsilon)u_i - u_i)(1+2\varepsilon)\mathrm{d}S,\end{aligned} \tag{31}$$

$$\Pi^*_{HR} = \iiint_V\left\{-(1-4\varepsilon)\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} - ((1-3\varepsilon)\sigma_{ij,j} + F_i)(1-\varepsilon)u_i\right\}(1+3\varepsilon)\mathrm{d}V +$$

$$\iint_{S_\sigma}(n_j\sigma_{ij}(1-2\varepsilon)-p_i)u_i(1-\varepsilon)(1+2\varepsilon)\,\mathrm{d}S+\iint_{S_u}n_j(1-2\varepsilon)\sigma_{ij}u_i(1+2\varepsilon)\,\mathrm{d}S\cdot \tag{32}$$

我们将(31)和(32)展开并整理,略去关于 ε 的高次项并利用式(1)和(2),可以将其写成:

$$\Pi_{HW}^{*}=\Pi_{HW}+\varepsilon\left(\Pi_{HW}+\iiint_V\left\{-a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}-F_iu_i+2\sigma_{ij}e_{ij}-\sigma_{ij}(u_{i,j}+u_{j,i})\right\}\mathrm{d}V+2\iint_{S_u}n_j\sigma_{ij}u_i\,\mathrm{d}S-\iint_{S_u}n_j\sigma_{ij}u_i\,\mathrm{d}S\right)\cdot \tag{33}$$

$$\Pi_{HR}^{*}=\Pi_{HR}+\varepsilon\left(\Pi_{HR}+\iiint_V\left\{b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}+2\sigma_{ij,j}u_i-F_iu_i\right\}\mathrm{d}V-2\iint_{S_\sigma}n_j\sigma_{ij}u_i\,\mathrm{d}S-\iint_{S_u}n_j\sigma_{ij}u_i\,\mathrm{d}S\right)\cdot \tag{34}$$

这样,我们便分别得到了泛函 Π_{HW} 和 Π_{HR} 在无穷小标度变换下的不变性条件:

$$\Pi_{HW}=-\iiint_V\left\{-a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}-F_iu_i+2\sigma_{ij}\left[e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\right]\right\}\mathrm{d}V-2\iint_{S_\sigma}n_j\sigma_{ij}u_i\,\mathrm{d}S+\iint_{S_u}n_j\sigma_{ij}u_i\,\mathrm{d}S\cdot \tag{35}$$

$$\Pi_{HR}=-\iiint_V\left\{b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-2\sigma_{ij,j}u_i-F_iu_i\right\}\mathrm{d}V+2\iint_{S_\sigma}n_j\sigma_{ij}u_i\,\mathrm{d}S+\iint_{S_u}n_j\sigma_{ij}u_i\,\mathrm{d}S\cdot \tag{36}$$

我们再注意到,由式(2)减去(1),可以得到:

$$\Pi_{HW}-\Pi_{HR}=\iiint_V\left\{\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}+\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-\sigma_{ij}e_{ij}\right\}\mathrm{d}V\cdot \tag{37}$$

用(35)等式的两边减去等式(36)的两边,我们得到:

$$\Pi_{HW}-\Pi_{HR}=\iiint_V\left\{a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}+b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-2\sigma_{ij}e_{ij}\right\}\mathrm{d}V+2\iiint_V(\sigma_{ij}u_i)_{,j}\mathrm{d}V-2\iint_{S_\sigma}n_j\sigma_{ij}u_i\,\mathrm{d}S-2\iint_{S_u}n_j\sigma_{ij}u_i\,\mathrm{d}S\cdot \tag{38}$$

比较(37)和(38)并利用 Green 定理,我们立刻可以得到:

$$\iiint_V\left\{\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}+\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-\sigma_{ij}e_{ij}\right\}\mathrm{d}V=0\cdot \tag{39}$$

因此 $\Pi_{HW}=\Pi_{HR}\cdot$ (40)

由式(39),我们可以写出:

$$\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}+\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-\sigma_{ij}e_{ij}=\frac{1}{2}a_{ijkl}(e_{ij}-b_{ijmn}\sigma_{mn})(e_{kl}-b_{klpq}\sigma_{pq})=0,$$

因此得到:

$$e_{ij}-b_{ijkl}\sigma_{kl}=0\cdot \tag{41}$$

至此,我们证明了泛函 Π_{HW} 和 Π_{HR} 之间的等价定理,泛函 Π_{HW} 中的变量只有两类是独立的,而且泛函中的应变分量和应力分量满足应力应变关系(41)·

4 已知弹性力学广义变分原理的泛函都是等价的

根据上面的讨论,我们容易得到 Liang_Fu 原理的泛函 Π_{LF} 在无穷小标度变换下的表达式:

$$\Pi_{LF}^{*} = \Pi_{LF} - \varepsilon\left\{\Pi_{LF} - \iiint_V \left\{-\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} - \left(e_{ij}\sigma_{ij} - \frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}\right) - 2\sigma_{ij,j}u_i + F_i u_i\right\}\mathrm{d}V - 2\iint_{S_\sigma} n_j\sigma_{ij}u_i\mathrm{d}S - \iint_{S_u} n_j\sigma_{ij}u_i\mathrm{d}S\right\}\cdot \qquad (42)$$

不变性条件为:

$$\Pi_{LF} = \iiint_V \left\{-\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} - \left(e_{ij}\sigma_{ij} - \frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}\right) - 2\sigma_{ij,j}u_i + F_i u_i\right\}\mathrm{d}V + 2\iint_{S_\sigma} n_j\sigma_{ij}u_i\mathrm{d}S + 2\iint_{S_u} n_j\sigma_{ij}u_i\mathrm{d}S\cdot \qquad (43)$$

比较(35)和(43)我们可以得到:

$$\Pi_{HW} - \Pi_{LF} = \iiint_V \left\{\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl} + \frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} - \sigma_{ij}e_{ij}\right\}\mathrm{d}V + 2\iiint_V (\sigma_{ij}u_i)_{,j}\mathrm{d}V - 2\iint_{S_\sigma} n_j\sigma_{ij}u_i\mathrm{d}S - 2\iint_{S_u} n_j\sigma_{ij}u_i\mathrm{d}S\cdot \qquad (44)$$

根据(2)和(5)有:

$$\Pi_{HW} - \Pi_{LF} = \frac{1}{2}\iiint_V \left\{\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl} + \frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} - \sigma_{ij}e_{ij}\right\}\mathrm{d}V + \iiint_V (\sigma_{ij}u_i)_{,j}\mathrm{d}V - \iint_{S_\sigma} n_j\sigma_{ij}u_i\mathrm{d}S - \iint_{S_u} n_j\sigma_{ij}u_i\mathrm{d}S\cdot \qquad (45)$$

比较(44)和(45)式的右边,并利用 Green 定理我们得到:

$$\iiint_V \left\{\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl} + \frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} - \sigma_{ij}e_{ij}\right\}\mathrm{d}V = 0, \qquad (46)$$

因此 $\Pi_{HW} = \Pi_{LF}\cdot$ (47)

对于泛函 Π_{GC},类似上面的推导,其在无穷小标度变换下的不变性条件为:

$$\Pi_{GC} = \iiint_V \left\{a_{ijkl}e_{ij}e_{kl} + F_i u_i - 2\sigma_{ij}e_{ij} - 2\sigma_{ij,j}u_i\right\}\mathrm{d}V + 2\iint_{S_\sigma} n_j\sigma_{ij}u_i\mathrm{d}S + \iint_{S_u} n_j\sigma_{ij}u_i\mathrm{d}S\cdot \qquad (48)$$

用式(35)减(48),得到:

$$\Pi_{HW} - \Pi_{GC} = 2\iiint_V (\sigma_{ij}u_i)_{,j}\mathrm{d}V - 2\iint_{S_\sigma} n_j\sigma_{ij}u_i\mathrm{d}S - 2\iint_{S_u} n_j\sigma_{ij}u_i\mathrm{d}S\cdot \qquad (49)$$

显然 $\Pi_{HW} = \Pi_{GC}\cdot$ (50)

等价定理成立· 利用不变性条件(36)和(43)我们有:

$$\Pi_{HW} - \Pi_{LF} = -\iiint_V \left\{\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl} + \frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} - \sigma_{ij}e_{ij}\right\}\mathrm{d}V\cdot \qquad (51)$$

而由式(1)和(5)可写出:

$$\Pi_{HW} - \Pi_{LF} = -\frac{1}{2}\iiint_V \left\{\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl} + \frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} - \sigma_{ij}e_{ij}\right\}\mathrm{d}V\cdot \qquad (52)$$

比较式(51)和(52),我们得到 Π_{HR} 和 Π_{LF} 之间的等价定理:

$$\Pi_{HR} = \Pi_{LF}\cdot \qquad (53)$$

由不变性条件(36)和(48)我们有:

$$\Pi_{HR} - \Pi_{GC} = -2\iiint_V \left\{\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl} + \frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} - \sigma_{ij}e_{ij}\right\}\mathrm{d}V\cdot \qquad (54)$$

由式(1)和(6)可写出

$$\Pi_{HR}-\Pi_{GC}=-\iiint_V\left\{\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}+\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-\sigma_{ij}e_{ij}\right\}\mathrm{d}V. \tag{55}$$

比较式(54)和(55),显然:

$$\Pi_{HR}=\Pi_{GC}. \tag{56}$$

由不变性条件(43)和(48)我们有:

$$\Pi_{LF}-\Pi_{GC}=-\iiint_V\left\{\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}+\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-\sigma_{ij}e_{ij}\right\}\mathrm{d}V. \tag{57}$$

由式(5)和(6)可写出:

$$\Pi_{LF}-\Pi_{GC}=-\frac{1}{2}\iiint_V\left\{\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}+\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-\sigma_{ij}e_{ij}\right\}\mathrm{d}V. \tag{58}$$

同理,有

$$\Pi_{LF}=\Pi_{GC}. \tag{59}$$

我们在 $\Pi_{G\chi}$ 中假定 χ 不等于零,因为如果 χ 等于零,那么显然泛函 $\Pi_{G\chi}$ 还原成 Π_{HW}. 比较泛函 $\Pi_{G\chi}$ 的不变性条件(23)和 Π_{HW} 的不变性条件(35),两式相减,有

$$\Pi_{G\chi}-\Pi_{HW}=2\iiint_V\chi'\left\{\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}+\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-\sigma_{ij}e_{ij}\right\}\mathrm{d}V. \tag{60}$$

而由式(3)和(2),两式相减给出:

$$\Pi_{G\chi}-\Pi_{HW}=\iiint_V\chi'\left\{\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}+\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-\sigma_{ij}e_{ij}\right\}\mathrm{d}V. \tag{61}$$

因为 χ 不等于零,从(60)和(61)我们得出:

$$\iiint_V\left\{\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}+\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-\sigma_{ij}e_{ij}\right\}\mathrm{d}V=0$$

因此,

$$\Pi_{G\chi}=\Pi_{HW}. \tag{62}$$

5　结　　论

利用泛函在无穷小标度变换下的不变性,我们证明了弹性力学广义变分原理泛函之间的等价性定理. 在这些泛函中只有两类变量是独立的,另一类变量通过应力应变关系联系,或者说所有这些泛函都存在着应力应变关系这一变分约束条件.

[参　考　文　献]

[1] Hellinger. E. Der allgemeine ansatz der meshanik der kontinua[J]. Encyclopadia der Mathematishen Wissenshaten, 1914, **4**(4): 602—694.

[2] Reissner, E. On a variational theorem in elasticity[J]. Journal of Mathematics and Physics, 1950, **29**(2): 90—95.

[3] 胡海昌. 论弹性体力学与受范性体力学的一般变分原理[J]. 物理学报, 1954, **10**(3): 259.

[4] Washizu K. On the variational principles of elasticity and plasticity[R]. Aeroelastic and Structures Research Laboratory, Massachusettes Institute of Technical Report, 25_18.

[5] 钱伟长. 高阶拉氏乘子法和弹性理论中更一般的广义变分原理[J]. 应用数学和力学, 1983, **4**(2): 137—148.

[6] 钱伟长. 再论弹性力学中的广义变分原理——就等价定理问题和胡海昌先生商榷[J]. 力学学报, 1983, (4): 325.

[7] 李灏, 陈树坚. 断裂理论基础[M].〈应用数学和力学〉讲座丛书. 重庆: 重庆出版社, 1983.

[8] Fletcher D C. Conservation laws in linear elastodynamics[J]. Arch Rational Mech Anal, 1976, **60**(2): 329.

Study of the Equivalent Theorem of Generalized Variational Principles in Elasticity

ZHANG Guo_qing, YU Jian_xing
(Civil Engineering College, Tianjin University, Tianjin 300072, P. R. China)

Abstract: The relations of all generalized variational principles in elasticity are studied by employing the invariance theorem of field theory. The infinitesimal scale transformation in field theory was employed to investigate the equivalent theorem. Among the results found particularly interesting are those related to that all generalized variational principles in elasticity are equal to each other. Also studied result is that only two variables are independent in the functionals and the stress_strain relation is the variational constraint condition for all generalized variational principles in elasticity. This work has proven again the conclusion of Prof. Chien Wei_zang.

Key words: elasticity; generalized vatiational principle; equivalent theorem; scale transformation; invariance