

文章编号: 1000_0887(2005) 02_0215_07

含界面电极压电介质的 Green 函数*

高存法, H·巴尔克

(德累斯顿理工大学 固体力学研究所, 德累斯顿 01062, 德国)

(我刊原编委樊蔚勋推荐)

摘要: 研究了由两个不同压电材料和一半无限长电极组成的复合材料系统的广义二维问题。基于 Stroh 公式, 提供了当一个线力、线电荷和一个线电偶极子施加在电极端附近时, 精确的 Green 函数解。进一步地, 获得了相应的场强度系数。这些结果可作为边界元的基本解, 以分析更加复杂的压电复合材料断裂问题。

关键词: 压电复合材料; 内电极; Green 函数; 耦合场

中图分类号: O343; O482 文献标识码: A

引 言

压电材料已被广泛应用于致动器、传感器和其它元器件结构。在这些结构中, 最常见的几何形式是由压电材料和电极交替重叠组成的层状结构。为了增强这种层状结构的粘接强度, 电极常常一端内置在压电材料内而另一端外置与一外电极条相连, 见图 1。在电极内端附近, 电场发生局部集中, 从而引起裂纹萌生, 裂纹扩展, 并最终导致元器件失效。因此, 在最近几年, 内置电极附近的电弹场问题引起许多研究者的关注。

Winzer 等^[1]应用有限元法研究了具有二次电致收缩效应的电介质的应力集中问题。Yang 和 Suo^[2]利用二次电致收缩定律计算了一理想电致收缩材料内电极端附近的应力强度因子。Hao^[3]等分析了陶瓷层状结构中非线性的机电耦合问题。Dos 等^[4]利用非线性有限元法研究了一压电介质内电极附近的应力场问题。Deng 和 Meguid^[5]对两压电介质之间有限长电极附近的电弹场问题做了理论研究, 他们的结果表明在电极端附近, 电弹场可呈现传统的反平方根的奇异性、非平方根的奇异性或振荡性, 这取决于上下两压电介质的弹性常数间的关系。Ru^[6]应用 Stroh 公式的方

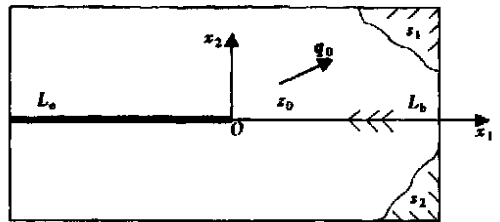


图 1 压电材料受一广义线力 q_0 作用

* 收稿日期: 2003_03_02; 修订日期: 2004_09_25

基金项目: 德国洪堡基金资助项目

作者简介: 高存法(1962—), 男, 安徽灵璧人, 副教授, 博士(联系人, 目前地址: 香港科技大学 机械工程系, 清水湾, 九龙, 中国香港. Tel: + 852_2358_8657; Fax: + 852_2358_1543; E_mail: cfgao@yahoo.com)

法,给出了含一有限长内电极双压电介质的解析解。Wang 和 Shen^[7]发展了一种一般的方法以分析两压电材料之间的任意界面缺陷问题。他们的解表明在一柔性内电极端附近,电弹场仅呈现传统的反平面的奇异性。

对于某些工程实际问题,结构的几何形状和发生在电场端附近的物理现象可能是极其复杂的。对于此类问题,求其解析解非常困难。此时数值法,如边界元法可以被用来求其近似解。边界元法的核心是 Green 函数。因此为了研究压电复合材料内的复杂断裂问题,分析含电极压电材料系统的 Green 函数解具有重要意义。

本文应用 Suo 的方法^[8]研究含一无限长柔性电极的双压电材料系统的 Green 函数。内容如下:在第 1 节我们概述 Stroh 公式;在第 2 节,我们推导当内电极端附近作用一广义线力时,Green 函数和场强度因子基本解。在第 3 节,我们推广第 2 节的结果到介质受一电偶极子作用的情况。最后,第 4 节对本文作了总结。

1 Stroh 公式

在一固定直角坐标系 $x_j (j = 1, 2, 3)$ 内,考虑一压电固体。假设此固体内的所有场变量仅与 x_1 和 x_2 两个变量有关,则对此广义二维问题,广义位移函数 u 和广义应力函数 ϕ 可表示为^[9]:

$$u = 2\text{Re}[A f(z)], \quad \phi = 2\text{Re}[B f(z)], \quad (1a, b)$$

$$f(z) = [f_1(z_1), f_2(z_2), f_3(z_3), f_4(z_4)]^T, \quad z_\alpha = x_1 + \mu_\alpha x_2 \quad (\alpha = 1, \dots, 4),$$

这里 Re 表示取实部,上标 T 代表矩阵转置, A 和 B 是两个材料常数矩阵, μ_α 是特征值,其虚部为正, $f_\alpha(z_\alpha)$ 是复函数,其将通过解边界值问题确定。

在 $f(z)$ 即 $f_\alpha(z_\alpha)$ 确定之后,所有的电弹场的变量可表示为:

$$q_1 = -\phi_{,2}, \quad q_2 = \phi_{,1} \quad (j = 1, 2, 3), \quad (2a, b)$$

$$D_1 = -\phi_{,4,2}, \quad D_2 = \phi_{,4,1}, \quad E_1 = -u_{,4,1}, \quad E_2 = -u_{,4,2} \quad (3a \sim d)$$

这里逗号表示对于 x_i 求微分, q_j 、 D_i 和 $E_i (i = 1, 2)$ 分别代表应力、电位移和电场分量。

2 一广义线力的解

考虑两压电半空间 s_1 和 s_2 , 其间含一半无限长电极 L_e , 如图 1 所示。假设 s_1 和 s_2 在广义线力 $q_0 = [t_{10}, t_{20}, t_{30}, -e]^T$ 的作用下,在 $x_1 x_2$ 平面内处于广义平面应变状态,此处 t_{j0} 是线力的分量, e 是线电荷。由于电极的厚度非常小,它的机械刚度可忽略不计,因此电极层上的机械边界条件可表示为:

$$u_j^+ = u_j^-, \quad \sigma_{2j}^+ = \sigma_{2j}^-, \quad \text{在 } L_e \text{ 上。} \quad (4a, b)$$

电极上的电边界条件可表示为:

$$E_1^+ = E_1^-, \quad \int_{L_e} [D_2^+(x_1) - D_2^-(x_1)] dx_1 = 0, \quad \text{在 } L_e \text{ 上。} \quad (5a, b)$$

另一方面,在电极之外的界面上,连续性条件可表示为:

$$E_1^+ = E_1^-, \quad D_2^+ = D_2^-, \quad u_j^+ = u_j^-, \quad \sigma_{2j}^+ = \sigma_{2j}^-, \quad \text{在 } L_b \text{ 上。} \quad (6a \sim d)$$

为了后面的应用,引入下面两个矢量 $u_{,1}$ 和 $\phi_{,1}$:

$$u_{,1} = 2\text{Re}[A F(z)], \quad \phi_{,1} = 2\text{Re}[B F(z)], \quad (7a, b)$$

这里 $F(z) = df(z)/dz$ 。

方程(7b)可进一步化为:

$$\phi_{,1} = -2\text{Im}[YF(z)], \quad (8)$$

这里

$$Y = Y^{-1} = -iBA^{-1}, \quad Y = iAB^{-1}.$$

2.1 复势

对目前的问题, 复函数 $F(z)$ 具有形式:

$$F_k(z) = \delta_{k1}G_{10}(z) + F_{k0}(z), \quad k = 1, 2, \quad (9)$$

这里 δ_{k1} 是 Kronecker 系数, $F_{k0}(z)$ 为分别在 s_1 和 s_2 内解析的未知函数, 且 $F_{k0}(\infty) = \mathbf{0}$. $G_{10}(z)$ 是在点 $z_{\alpha 0} = x_{10} + p_{\alpha}x_{20}$ 处的奇异函数^[10]:

$$G_{10}(z) = \left\langle\left\langle \frac{1}{z - z_{\alpha 0}} \right\rangle\right\rangle \mathbf{q}, \quad \mathbf{q} = \frac{1}{2\pi i} \mathbf{A}^T \mathbf{q}_0. \quad (10a, b)$$

这里 $\langle\langle \rangle\rangle$ 表示一对角矩阵, 其分量随 α 而变化. 如果用一广义位错 $\mathbf{b}_0 = (b_1, b_2, b_3, b_4)^T$ 代替 z_0 点的广义力, 这里 b_j 是 Burgers 矢量的分量, b_4 是电势跳跃, 那么式(10)中的 \mathbf{q} 应重新表示为:

$$\mathbf{q} = \frac{1}{2\pi i} \mathbf{B}^T \mathbf{b}_0. \quad (11)$$

因此, 下面所得的解对于一个位错同样成立, 只要用式(11)代替下面结果中的 \mathbf{q} .

回到我们的问题, 根据(4)、(5)和(6)可得

$$\mathbf{u}_{,1}^+(x_1) = \mathbf{u}_{,1}^-(x_1), \quad -\infty < x_1 < \infty \quad (12)$$

把式(7a)、(9)和(10)代入(12)

$$\begin{aligned} A_1 F_{10}^+(x_1) + A_1 F_{10}(x_1) + A_1 G_{10}(x_1) + A_1 \overline{G_{10}(x_1)} = \\ A_2 F_{20}^-(x_1) + A_2 F_{20}(x_1), \quad -\infty < x_1 < \infty \end{aligned} \quad (13)$$

根据式(13)得^[11]

$$A_1 F_{10}(z) - A_2 F_{20}(z) + A_1 G_{10}(z) = \mathbf{0}, \quad z \in s_1, \quad (14)$$

$$A_2 F_{20}(z) - A_1 F_{10}(z) + A_1 G_{10}(z) = \mathbf{0}, \quad z \in s_2. \quad (15)$$

现在, 引入一跳跃函数 $\Delta\phi_{,1}(x_1)$:

$$\Delta\phi_{,1}(x_1) = \phi_{,1}^{(1)}(x_1) - \phi_{,1}^{(2)}(x_1). \quad (16)$$

把式(8)代入式(16)得

$$-\Delta\phi_{,1}(x_1) = 2\text{Im}[Y_1 A_1 F_1(z) - Y_2 A_2 F_2(z)]. \quad (17)$$

把式(9)和(10)代入式(17), 然后再应用式(14)和式(15)得

$$-i\Delta\phi_{,1}(x_1) = \mathbf{K}^+(x_1) - \mathbf{K}^-(x_1), \quad (18)$$

这里

$$\mathbf{K}(z) = \begin{cases} H A_1 F_{10}(z) - (\overline{Y_1} - \overline{Y_2}) \overline{A_1} G_{10}(z), & z \in s_1, \\ H A_2 F_{20}(z) - (\overline{Y_1} + Y_1) A_1 G_{10}(z), & z \in s_2, \end{cases} \quad (19)$$

$$H = Y_1 + Y_2.$$

在 L_b 上, 由于 $\Delta\phi_{,1} = \mathbf{0}$, 因此式(18)和式(19)表明 $\mathbf{K}(z)$ 在平面上除 L_e 外, 是处处解析的函数, 且 $\mathbf{K}(\infty) = \mathbf{0}$.

此外, 在 x_1 轴上, 应力连续条件要求:

$$[\Delta\phi_{,1}]_j = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad -\infty < x_1 < \infty, \quad (20)$$

这里 $[X]_j$ 表示取 X 的第 j 行。

把式(18)代入式(20)得

$$K_j^+(x_1) - K_j^-(x_1) = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad -\infty < x_1 < \infty, \quad (21)$$

式(21)的解是^[11]:

$$K_j(z), \quad j = 1, 2, 3. \quad (22)$$

把式(9)代入式(7a)得

$$u_{,1}^+(x_1) = A_1 F_{10}^+(x_1) + A_1 F_{10}^-(x_1) + A_1 G_{10}(x_1) + A_1 \overline{G_{10}(x_1)}. \quad (23)$$

应用式(14)和式(15), 式(23)可化为:

$$u_{,1}^+(x_1) = A_1 F_{10}^+(x_1) + A_2 F_{20}^+(x_1) + A_1 \overline{G_{10}(x_1)}. \quad (24)$$

式(24)可进一步化为:

$$u_{,1}^+(x_1) = H^{-1} K^+(x_1) + \overline{H^{-1} K^-(x_1)} + 2\text{Re}[M G_{10}(x_1)], \quad (25)$$

这里

$$M = \overline{H^{-1}}(Y + \overline{Y})A_1.$$

取式(25)等号右边第3项, 并应用式(22)得

$$-E_1(x_1) = h_{44} K_4^+(x_1) + h_{44} K_4^-(x_1) + 2\text{Re}\left[\sum_{j=1}^4 M_{4j} G_{j10}(x_1)\right], \quad (26)$$

这里 h_{44} 是 H^{-1} 的第4个对角元素。

由于 Y 是 Hermite 矩阵^[9], 可以证明 H^{-1} 也是 Hermite 矩阵。这就意味着 h_{44} 是实的。利用电极上的条件 $E_1 = 0$, 式(26)给出

$$K_4^+(x_1) + K_4^-(x_1) = K_{40}(x_1), \quad -\infty < x_1 < 0, \quad (27)$$

这里

$$K_{40}(x_1) = -2h_{44}^{-1} \text{Re}\left[\sum_{j=1}^4 M_{4j} G_{j10}(x_1)\right]. \quad (28)$$

式(27)的一般解是^[11]

$$K_4(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{L_c} \frac{K_{40}(x_1)}{X^+(x_1)(x_1 - z)} dx_1 + \frac{c_{40}}{X(z)}, \quad (29)$$

这里 c_{40} 是一待定的常数, $X(z)$ 为:

$$X(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}, \quad (30)$$

此处选择 $X(z)$ 的分支沿电极层。

把式(10)代入式(28)得

$$K_{40}(x_1) = -2h_{44}^{-1} \sum_{j=1}^4 \left[\frac{M_{4j} q_j}{x_1 - z_{j0}} + \overline{\frac{M_{4j} q_j}{x_1 - z_{j0}}} \right]. \quad (31)$$

然后, 再把式(30)和(31)代入式(29)得

$$K_4(z) = -\frac{1}{2h_{44}} \sum_{j=1}^4 \left[\frac{M_{4j} q_j}{z - z_{j0}} + \overline{\frac{M_{4j} q_j}{z - z_{j0}}} \right] + \frac{1}{2h_{44}\sqrt{z}} \sum_{j=1}^4 \left[\frac{M_{4j} q_j \sqrt{z_{j0}}}{z - z_{j0}} + \overline{\frac{M_{4j} q_j \sqrt{z_{j0}}}{z - z_{j0}}} \right] + \frac{c_{40}}{\sqrt{z}}. \quad (32)$$

为了确定 c_{40} , 必须应用(5b), 此式可化为

$$\int_{L_e} \Delta \phi_{41}(x_1) dx_1 = 0 \quad (33)$$

把式(18)代入式(33)得

$$\int_{L_e} [K_4^+(x_1) - K_4^-(x_1)] dx_1 = 0 \quad (34)$$

把式(32)代入式(34)可得 $c_{40} = 0$, 因此式(32)变为

$$K_4(z) = -\frac{1}{2h_{44}} \sum_{j=1}^4 \left[\frac{M_{4j} q_j}{z - z_{j0}} + \frac{\overline{M_{4j} q_j}}{z - z_{j0}} \right] + \frac{1}{2h_{44} \sqrt{z}} \sum_{j=1}^4 \left[\frac{M_{4j} q_j \sqrt{z_{j0}}}{z - z_{j0}} + \frac{\overline{M_{4j} q_j} \sqrt{z_{j0}}}{z - z_{j0}} \right] \quad (35)$$

在 $K_j(z)$ ($j = 1, \dots, 4$) 由式(35)和式(22)确定之后, 根据式(19)、(2)和式(3)可分别确定 $F_{k0}(z)$ 和所有的场变量。

2.2 场强度因子

根据式(8)可得

$$\phi_{,1}^{(1)} = -2\text{Im}[Y_1 A_1 F_1(x_1)] \quad (36)$$

应用式(9)和式(19)得

$$\phi_{,1s}^{(1)} = -2\text{Im}[S \cdot K^+(x_1)] \quad (37)$$

这里 $\phi_{,1s}^{(1)}$ 代表 $\phi_{,1}^{(1)}$ 的奇异主部, 且 $S = Y_1 H^{-1}$ 。

应用式(22), 式(37)可化为

$$\phi_{,1s}^{(1)} = -2\text{Im}[S_4 K_4^+(x_1)] \quad (38)$$

这里 S_4 是 S 的第 4 列。

在 $x_1 = 0_+$ 处定义场强度系数为:

$$k(\mathbf{0}_+) = \sqrt{2\pi} \lim_{x_1 \rightarrow 0_+} x_1^{1/2} \phi_{,1s}^{(1)}(x_1) \quad (39)$$

这里 $x_1 = 0_+$ 代表 x_1 从材料界面上趋近电极界面。

类似地, 可定义

$$k(\mathbf{0}_-) = \sqrt{2\pi} \lim_{x_1 \rightarrow 0_-} (-x_1)^{1/2} \phi_{,1s}^{(1)}(x_1) \quad (40)$$

这里 $x_1 = 0_-$ 表示 x_1 从电极内部趋近电极端。

把式(38)代入式(39)和(40)得

$$k(\mathbf{0}_+) = -2 \sqrt{2\pi} \text{Im}[S_4 \lim_{x_1 \rightarrow 0_+} x_1^{1/2} K_4^+(x_1)] \quad (41)$$

$$k(\mathbf{0}_-) = -2 \sqrt{2\pi} \text{Im}[S_4 \lim_{x_1 \rightarrow 0_-} (-x_1)^{1/2} K_4^+(x_1)] \quad (42)$$

然后, 再把式(35)代入式(41)和(42)得

$$k(\mathbf{0}_+) = Z_f \cdot \text{Im}[S_4] \quad (43)$$

$$k(\mathbf{0}_-) = -Z_f \cdot \text{Re}[S_4] \quad (44)$$

这里

$$Z_f = \frac{\sqrt{2\pi}}{h_{44}} \text{Re} \left[\sum_{j=1}^4 \frac{M_{4j} q_j}{\sqrt{z_{j0}}} \right] \cdot$$

3 一个电偶极子的解

如图 2 所示, 当一电偶极子作用在电极尖端附近 z_0 点时, 复势 $F(z)$ 仍具有式(9)的形式,

但式(10)中的 $G_{10}(z)$ 需重新推导。由于一个电偶极子可看作两个大小为 e , 方向相反的线电荷, 当两者之间的距离 d 趋近零, 但保持偶极矩 $e \cdot d$ 为常数 p_0 的极限情况。因此 $G_{10}(z)$ 可通过极限的方法获得。结果是^[12]:

$$G_{10}(z) = p_0 \llbracket \frac{\varphi_a}{(z - z_{a0})^2} \rrbracket q_4, \quad (45)$$

这里

$$\varphi_a = \cos \varphi + \mu_a \sin \varphi$$

对于目前的情况, 方程(12)至(30)仍然成立, 但式(29)中 $K_{40}(x_1)$ 应重新表示为:

$$K_{40}(x_1) = -2h_{44}^{-1} \cdot p_0 \sum_{j=1}^4 \left[\frac{M_{4j} q_{4j} \varphi_j}{(x_1 - z_{j0})^2} + \frac{\overline{M_{4j} q_{4j} \varphi_j}}{(x_1 - z_{j0})^2} \right]. \quad (46)$$

类似地, 利用式(46)和(29)可得

$$\begin{aligned} K_4(z) = & -\frac{p_0}{2h_{44}} \sum_{j=1}^4 \left[\frac{M_{4j} q_{4j} \varphi_j}{(z - z_{j0})^2} + \frac{\overline{M_{4j} q_{4j} \varphi_j}}{(z - z_{j0})^2} \right] + \\ & \frac{p_0}{2h_{44} \sqrt{z}} \sum_{j=1}^4 \left\langle M_{4j} q_{4j} \varphi_j \left[\frac{\sqrt{z_{j0}}}{(z - z_{j0})^2} + \frac{1}{2\sqrt{z_{j0}}} \frac{1}{z - z_{j0}} \right] + \right. \\ & \left. \overline{M_{4j} q_{4j} \varphi_j} \left[\frac{\sqrt{z_{j0}}}{(z - z_{j0})^2} + \frac{1}{2\sqrt{z_{j0}}} \frac{1}{z - z_{j0}} \right] \right\rangle. \end{aligned} \quad (47)$$

最后, 把式(47)代入式(41)和(42)可得应力强度因子解为

$$k(\mathbf{0}_+) = -\mathbf{K}_m \cdot \text{Im}[S_4] p_0, \quad (48)$$

$$k(\mathbf{0}_-) = \mathbf{K}_m \cdot \text{Re}[S_4] p_0, \quad (49)$$

这里

$$\mathbf{K}_m = \frac{\sqrt{2\pi}}{h_{44}} \text{Re} \left[\sum_{j=1}^4 \frac{M_{4j} q_{4j} \varphi_j}{z_{j0}^{3/2}} \right].$$

4 结 论

我们研究了一含界面内电极双压电介质的电弹场问题。应用 Stroh 公式, 当一介质承受一广义线力或一电偶极子时, 推导了精确的 Green 函数解和场强度因子解。由于这些解非常简洁, 因此可把它们作为边界元法的积分核以求解压电复合材料结构的复杂断裂问题。

[参 考 文 献]

- [1] Winzer S R, Shankar N, Ritter A P. Designing cofired multilayer electrostrictive actuators for reliability[J]. J Am Ceram Soc, 1989, 72(11): 2246-2257.
- [2] Yang W, Suo Z. Cracking in ceramic actuators caused by electrostriction[J]. J Mech Phys Solids, 1994, 42(4): 649-663.
- [3] Hao T H, Gong X, Suo Z. Fracture mechanics for the design of ceramic multiplayer actuators[J]. J Mech Phys Solids, 1996, 44(1): 23-48.
- [4] Dos Santos e Lucato S L, Lupascu D C, Kamlah M, et al. Constraint induced crack initiation at electrode edges in piezoelectric ceramics[J]. Acta Mater, 2001, 49(14): 2751-2759.
- [5] Deng D, Meguid S A. Analysis of conducting rigid inclusion at the interface of two dissimilar piezo-

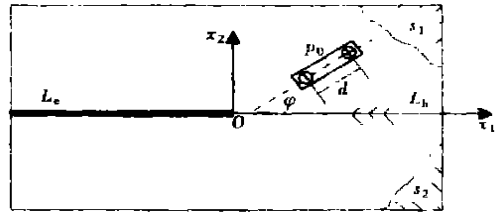


图 2 压电材料受一线偶极子 p_0 作用

- electric materials[J]. *J Appl Mech*, 1998, **65**(1): 76—84.
- [6] Ru C Q. Exact solution for finite electrode layers embedded at the interface of two piezoelectric half-planes[J]. *J Mech Phys Solids*, 2000, **48**(4): 693—708.
- [7] Wang X, Shen Y P. Exact solution for mixed boundary value problems at anisotropic piezoelectric bi-material interface and unification of various interface defects[J]. *Internat J Solids and Structures*, 2002, **39**(6): 1591—1619.
- [8] Suo Z. Singularities, interfaces and Cracks in dissimilar anisotropic media[J]. *Proc R Soc A*, 1990, **427** (1873): 331—358.
- [9] Suo Z, Kuo C M, Barnett D M, et al. Fracture mechanics for piezoelectric ceramics[J]. *J Mech Phys Solids*, 1992, **40**(4): 739—765.
- [10] Gao C F, Wang M Z. Green's functions of an interfacial crack between two dissimilar piezoelectric media[J]. *Internat J Solids and Structures*, 2001, **38**: 5323—5334.
- [11] Muskhelishvili N I. Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity [M]. Leyden: Noordhoff, 1975.
- [12] Wang J W, Kuang Z B. The interaction between crack and electric dipole of piezoelectricity[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2000, **13**(3): 283—289.

Green's Functions of Internal Electrodes Between Two Dissimilar Piezoelectric Media

GAO Cun_fa, Herbert Balke

(Institute of Solid Mechanics, Dresden University of Technology 01062, Dresden, Germany)

Abstract: The generalized 2D problem of a half-infinite interfacial electrode layer between two arbitrary piezoelectric half-spaces is studied. Based on the Stroh formalism, exact expressions for the Green's functions of a line force, a line charge and a line electric dipole applied at an arbitrary point near the electrode edge, were presented, respectively. The corresponding solutions for the intensity factors of fields were also obtained in an explicit form. These results can be used as the foundational solutions in boundary element method (BEM) to solve more complicated fracture problems of piezoelectric composites.

Key words: piezoelectric material; internal electrode; Green's function; coupled field