

文章编号: 1000_0887(2005) 02_0231_08

结构振动诱导流场及附加质量的数值分析^{*}

苏 里, 李淑娟, 唐国安

(复旦大学 力学与工程科学系, 上海 200433)

(戴世强推荐)

摘要: 将大型柔性结构低速振动诱导流体流场的问题, 归结为无粘性不可压缩无旋流动平面问题。在偶极子配置法基础上, 发展了一种在结构和流体接触面上混合配置源汇和偶极子的奇点配置法, 能够计算翼型、柱型等结构在流体中低速振动时诱导的流体流场并推导出流场的动能表达式, 最终得到流体附加质量。给出了几个具有解析解的算例验证了此方法的可靠性

关键词: 结构; 流体; 振动; 附加质量; 奇点配置法

中图分类号: O327; O351.3 文献标识码: A

引 言

分析流体中结构固有振动特性, 在很多情况下流体的影响是必需考虑的。例如, 船舶的固有振动分析往往需要计算附连水质量^[1]。在进行航天器附件地面模态试验的数值仿真时, 由于这些附件通常都是轻质柔性结构, 而且展开面积很大, 因此空气的影响也相当明显, 不容忽视^[2]。当结构的振动基频较低, 而且振幅远远小于其尺寸时(如太阳能电池阵的基频不足 1 Hz, 正常扰动下的振幅不超过 10 cm), 结构振动诱导的空气流动是比较平稳的, 可忽略可压缩和粘性的影响。因此这种流动可以认为是无粘、不可压缩的无旋定常流动, 其流动的速度场可由势函数表示。

李淑娟^[3], Wang H.^[4] 采用偶极子配置法, 通过基本解的迭加, 并补充流体与结构界面上的流量守恒边界条件, 分析了太阳能电池阵振动诱导的空气流场及附加质量。但是这种方法只适用于计算流体中平板状结构振动的附加质量, 而不适用于工程中经常存在的柱型、以及带翼柱型等更加复杂的结构。本文则提出一种源汇和偶极子混合配置的奇点配置法, 在单侧与流体接触的表面上(如柱型结构)配置源汇基本解, 而在双侧与流体接触的表面上(如翼型结构)配置偶极子基本解。具有解析解的二维流动算例表明这样处理能够有效地分析这类结构在流体中振动的附加质量。

1 结构诱导的流场分析

如图 1 所示, 流体中带翼的柱型结构。用数值或实验模态分析方法可以得到其真空中的

* 收稿日期: 2003_04_29; 修订日期: 2004_07_07

作者简介: 苏里(1980—), 女, 北京人, 硕士研究生;

唐国安(1962—), 浙江人, 教授, 硕士(联系人. Tel: + 86_21_65642743; Fax: + 86_21_65642742; E_mail: tangguoan@fudan.edu.cn)。

前 r 阶固有频率 $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \dots, \omega^{(r)}$ 和对应的关于质量正交归一的固有模态向量 $\Psi^{(1)}, \Psi^{(2)}, \dots, \Psi^{(r)}$ 。根据振动理论^[5], 该结构振动时的位移和速度可以用模态向量 $\Psi^{(k)}$ 和广义坐标 $\xi^{(k)} (k = 1, 2, \dots, r)$ 表示

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^r \Psi^{(k)} \dot{\xi}^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^r \mathbf{u}^{(k)}, \quad \mathbf{v} = \sum_{k=1}^r \Psi^{(k)} \dot{\xi}^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^r \mathbf{v}^{(k)}. \tag{1}$$

可见结构的速度场 \mathbf{v} 为 r 个 $\mathbf{v}^{(k)}$ 的线性组合, 由于理想流体是线性的, 所以完整的流场势函数 φ 也可以表示成

$$\varphi = \sum_{k=1}^r \varphi^{(k)}, \tag{2}$$

其中 $\varphi^{(k)}$ 是结构以速度 $\mathbf{v}^{(k)}$ 运动时诱导的流场势函数。

我们将采用有限元方法计算势函数 $\varphi^{(k)}$ 。为此将结构中的单侧表面划分为 n_1 个单元, 双侧表面划分为 n_2 个单元。单元 $i (i = 1, 2, \dots, n_1 + n_2)$ 的起点和终点坐标分别为 $(x_{i1}, y_{i1}), (x_{i2}, y_{i2})$, 单元长度为 Γ_i 。单元 i 外法线方向的平均速度为

$$v_i = \frac{1}{\Gamma_i} \int_{\Gamma_i} v_n^{(k)} d\Gamma = \frac{1}{\Gamma_i} \int_{\Gamma_i} \mathbf{v}^{(k)} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \frac{\dot{\xi}^{(k)}}{\Gamma_i} \int_{\Gamma_i} \Psi^{(k)} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \frac{\dot{\xi}^{(k)} b_i^{(k)}}{\Gamma_i}, \tag{3}$$

其中 $v_n^{(k)} = \mathbf{v}^{(k)} \cdot \mathbf{n}$ 是法向速度, $b_i^{(k)} = \int_{\Gamma_i} \Psi^{(k)} \cdot \mathbf{n} d\Gamma$, 而 $\mathbf{n} = (l, m)$ 为外法线方向。规定单侧表面上的单元外法线指向结构外部, 而双侧表面上的外法线指向不作规定。流体与结构在边界上法向速度应当连续, 所以 (3) 式也就是流体流动的边界条件。

在每个单侧表面单元的中点处配置一个源汇, 而在双侧表面单元的中点配置一个偶极子, 方向指向单元的法线。(3) 式表明流体的边界速度与单元无关的因子 $\dot{\xi}^{(k)}$ 成比例, 所以单元 $j (j = 1, 2, \dots, n)$ 中点上的源汇或偶极子的强度可以假设为 $\dot{\xi}^{(k)} \lambda_j^{(k)}$, 它们的势函数的表达式是^[6]

$$\varphi_j^{(k)} = \dot{\xi}^{(k)} \lambda_j^{(k)} \varphi_j^{(k)},$$

其中

$$\varphi_j^{(k)} = \begin{cases} \ln[(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2] & (j = 1, 2, \dots, n_1), \\ -\frac{(x - x_j)l_i + (y - y_j)m_i}{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} & (j = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2) \end{cases} \tag{4}$$

为单位强度源汇或偶极子的势函数。公式 (4) 中的 $x_j = (x_{j1} + x_{j2})/2$ 和 $y_j = (y_{j1} + y_{j2})/2$ 是单元 j 的中点坐标。

势函数 $\varphi_j^{(k)}$ 所对应的流场流过单元 i 的流量是

$$\int_{\Gamma_i} \frac{\partial \varphi_j^{(k)}}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = A_{ij} \lambda_j^{(k)} \dot{\xi}^{(k)}, \tag{5}$$

其中

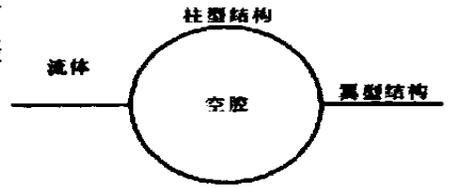


图 1 无限长带有板状翼的柱体

$$A_{ij} = \int_{\Gamma_i} \frac{\partial \varphi_j^{(k)}}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = \begin{cases} \arctan \frac{y_{i2} - y_j}{x_{i2} - x_j} - \arctan \frac{y_{i1} - y_j}{x_{i1} - x_j} & (j = 1, 2, \dots, n_1), \\ \frac{(x_{i1} - x_j)m_i - (y_{i1} - y_j)l_i}{(x_{i1} - x_j)^2 + (y_{i1} - y_j)^2} - \frac{(x_{i2} - x_j)m_i - (y_{i2} - y_j)l_i}{(x_{i2} - x_j)^2 + (y_{i2} - y_j)^2} & (j = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2) \end{cases} \quad (6)$$

根据流体的连续性条件, 所有源汇或偶极子产生的流场流过单元 i 的流量应满足方程

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} \lambda_j^{(k)} = b_i^{(k)} \quad (i = 1, 2, \dots, n_1 + n_2) \quad (7)$$

由这组代数方程可求出源汇或偶极子的强度 $\lambda_j^{(k)} (j = 1, 2, \dots, n_1 + n_2)$, 最终得到结构第 k 阶固有振动诱导的流场势函数为

$$\varphi^{(k)} = \sum_{j=1}^{n_1+n_2} \varphi_j^{(k)} = \sum_{j=1}^{n_1+n_2} \xi_j^{(k)} \lambda_j^{(k)} \varphi_j^{(k)} \quad (8)$$

2 附加广义质量的计算公式

假定结构所处的流体是无界的, 且无穷远处的速度为零, 那么第 k 阶固有振动诱导的流场动能可以表示为^[6]

$$K^{(k)} = \frac{\rho}{2} c^{(k)} Q^{(k)} - \frac{\rho}{2} \oint_{\Gamma} \varphi^{(k)} v_n^{(k)} d\Gamma, \quad (9)$$

其中 $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{n_1+n_2} \Gamma_i$ 表示结构边界, $Q^{(k)}$ 是流体流过边界 Γ 的体积流量, $c^{(k)} = \varphi^{(k)} |_{(x,y) \rightarrow \infty}$ 是常数, ρ 是流体的密度.

当结构存在空腔时, 由于空腔属于单侧表面, 所以在其上面配置的是源汇. 从源汇基本解的表达式(4)可知, $c^{(k)} \rightarrow \infty$ 此时如果 $Q^{(k)} \neq 0$, 即空腔有体积变形, 那么流体的动能 $K^{(k)}$ 就等于无限大, 由此得到的附加质量也是无限大. 显然这是不合常理的. 而不可压缩流体会抑制结构出现低频、低速、空腔体积可变的固有模态. 对于高频振动, 应当考虑流体的可压缩性, 本文不研究这类问题, 故此认为 $Q^{(k)} = 0$. 于是(9)式可以简化为

$$K^{(k)} = - \frac{\rho}{2} \oint_{\Gamma} \varphi^{(k)} v_n^{(k)} d\Gamma = - \frac{\rho}{2} \sum_{i=1}^{n_1+n_2} \int_{\Gamma_i} \varphi^{(k)} v_n^{(k)} d\Gamma. \quad (10)$$

位于单侧表面的单元 $i (i = 1, 2, \dots, n_1)$ 上, 积分直接沿外侧 Γ_i 进行. 而位于双侧表面上的单元 $i (i = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2)$ 上, 积分必须沿上下两侧 Γ_i^+ 和 Γ_i^- 分别进行. 因为法向速度满足条件 $v_n^{(k)} |_{\Gamma_i^+} = -v_n^{(k)} |_{\Gamma_i^-} = v_n^{(k)}$, 并记 $\varphi_+^{(k)} = \varphi^{(k)} |_{\Gamma_i^+}$, $\varphi_-^{(k)} = \varphi^{(k)} |_{\Gamma_i^-}$, 于是(10)可以写成

$$K^{(k)} = - \frac{\rho}{2} \sum_{i=1}^{n_1} \int_{\Gamma_i} \varphi^{(k)} v_n^{(k)} d\Gamma - \frac{\rho}{2} \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} \int_{\Gamma_i^+} (\varphi_+^{(k)} - \varphi_-^{(k)}) v_n^{(k)} d\Gamma. \quad (11)$$

将流场势函数的迭加公式(8)代入其中, 得到

$$K^{(k)} = - \frac{\rho}{2} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_1+n_2} \lambda_j^{(k)} \int_{\Gamma_i} \varphi_j^{(k)} v_n^{(k)} d\Gamma - \frac{\rho}{2} \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} \sum_{j=1}^{n_1+n_2} \lambda_j^{(k)} \int_{\Gamma_i^+} (\varphi_{j+}^{(k)} - \varphi_{j-}^{(k)}) v_n^{(k)} d\Gamma. \quad (12)$$

同样这里记, $\Phi_{j+}^{(k)} = \Phi_j^{(k)} |_{\Gamma_i^+}$, $\Phi_{j-}^{(k)} = \Phi_j^{(k)} |_{\Gamma_i^-}$. 由(4)可知, 势函数 $\Phi_j^{(k)}$ ($j = n_1+1, \dots, n_1+n_2$) 的不连续性只出现在单元 Γ_j 上, 在其他单元 Γ_i ($i \neq j$) 上都是连续的, 而且 $\Phi_{j-}^{(k)} = -\Phi_{j+}^{(k)}$, 所以

$$\Phi_{j+}^{(k)} - \Phi_{j-}^{(k)} = \begin{cases} 2\Phi_{j+}^{(k)}, & j \neq i, \\ 0, & j = i. \end{cases} \quad (13)$$

这样(12)式又可以写成

$$K^{(k)} = -\frac{\dot{\xi}^{(k)}}{2} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_1+n_2} \lambda_j^{(k)} \int_{\Gamma_i} \Phi_j^{(k)} v_n^{(k)} d\Gamma - \dot{\xi}^{(k)} \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} \lambda_j^{(k)} \int_{\Gamma_i^+} \Phi_i^{(k)} v_n^{(k)} d\Gamma. \quad (14)$$

文献[3]中已经证明 $\Phi_i^{(k)}$ 在 Γ_i 是 Dirac- δ 函数, (14)中第2个积分为

$$\int_{\Gamma_i^+} \Phi_i^{(k)} v_n^{(k)} d\Gamma = \pi v_{ni}^{(k)}, \quad (15)$$

其中 $v_{ni}^{(k)} = v_n^{(k)}(x_i, y_i)$, 即单元 i ($i = n_1+1, \dots, n_1+n_2$) 中点处的法向速度. 于是(14)简化为

$$K^{(k)} = -\frac{\rho}{2} \dot{\xi}^{(k)} \left[\sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_1+n_2} \lambda_j^{(k)} \int_{\Gamma_i} \Phi_j^{(k)} v_n^{(k)} d\Gamma + 2\pi \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} \lambda_j^{(k)} v_{ni}^{(k)} \right]. \quad (16)$$

因为 $v_n^{(k)} = \dot{\xi}^{(k)} \Psi^{(k)} \cdot \mathbf{n}$, 所以从上式得到

$$K^{(k)} = -\frac{\rho}{2} (\dot{\xi}^{(k)})^2 \left[\sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_1+n_2} \lambda_j^{(k)} \int_{\Gamma_i} (\Psi^{(k)} \cdot \mathbf{n}) \Phi_j^{(k)} d\Gamma + 2\pi \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} (\Psi_i^{(k)} \cdot \mathbf{n}) \lambda_j^{(k)} \right], \quad (17)$$

其中 $\Psi_i^{(k)} = \Psi^{(k)}(x_i, y_i)$.

在(17)式中 $\Psi^{(k)} \cdot \mathbf{n}$ 是连续函数, $\Phi_j^{(k)}$ ($j = n_1+1, \dots, n_1+n_2$) 在 Γ_i ($i = 1, \dots, n_1$) 上也是连续函数. 而 $\Phi_i^{(k)}$ ($i = 1, \dots, n_1$) 虽然在 Γ_i 上具有 $\ln \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}$ 的奇异性, 但是广义积分 $\int_{\Gamma_i} (\Psi^{(k)} \cdot \mathbf{n}) \Phi_j^{(k)} d\Gamma$ 是存在的, 因此(17)式中的积分是有意义的.

如果将流体的动能写成

$$K^{(k)} = \frac{1}{2} m^{(k)} (\dot{\xi}^{(k)})^2 \quad (18)$$

的形式, 其中 $m^{(k)}$ 是关于第 k 阶固有模态的附加广义质量. 比较(17)和(18)两式, 显然

$$m^{(k)} = -\rho \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_1+n_2} \lambda_j^{(k)} \int_{\Gamma_i} \Phi_j^{(k)} (\Psi^{(k)} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma - 2\pi\rho \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} \lambda_j^{(k)} (\Psi_i^{(k)} \cdot \mathbf{n}). \quad (19)$$

3 结构振动诱导的流场和附加广义质量计算实例

3.1 带翼圆柱的弹性振动

如图2, 置于流体中的无限长带翼的圆柱. 本例用于检验采用源汇和偶极子混合配置技术分析具有单侧和双侧表面的结构振动诱导流场的数值方法. 圆柱横截面半径为2, 4块翼板

长都是1, 均匀地分布在圆柱上, 翼板的厚度不计。分析流场时在圆柱上划分了200个单元 ($n_1 = 200$), 在每条翼板上划分了10个单元 ($n_2 = 40$)。

图3(a)是结构沿Y轴以单位速度作刚性平动时的流体流场。图3(b)是结构绕中心轴以单位角速度作刚性转动时的流体流场。图3(c)和图3(d)分别是结构以第1和第2阶关于质量归一的固有模态作弹性振动时的流体流场, 更高阶固有模态下的流体流场不再显示。

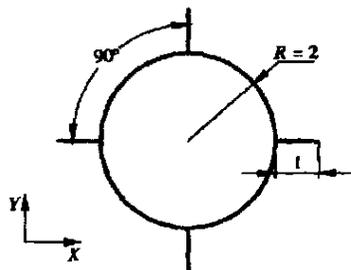
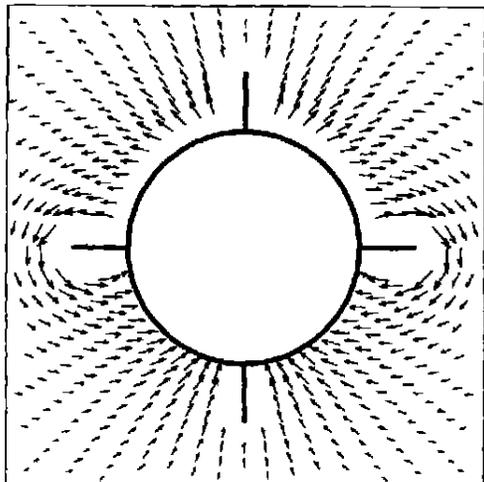
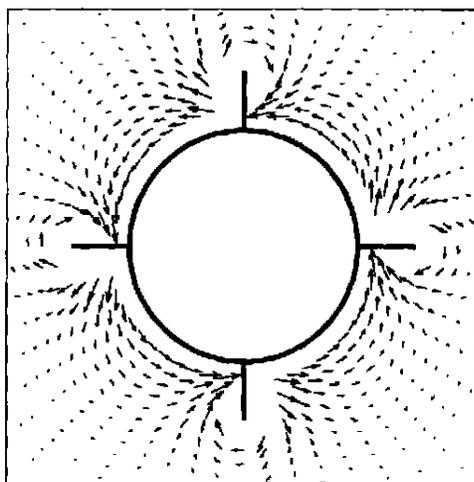


图2 无限长带有板状翼的圆柱

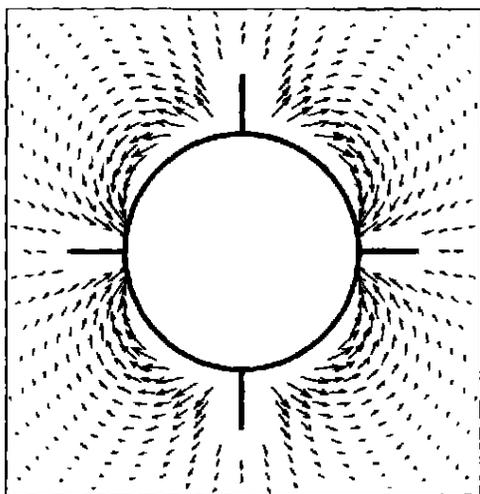
相应的附加广义质量计算结果见表1。表中可以查阅



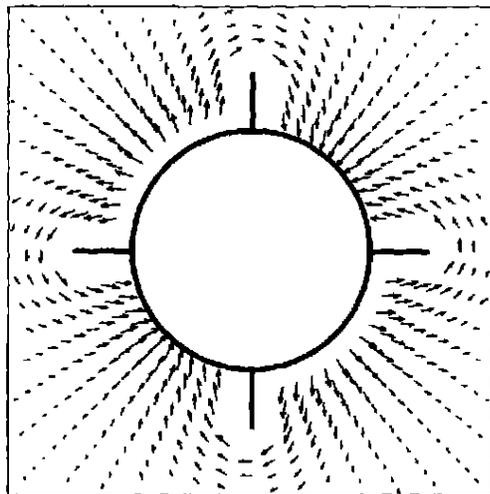
(a) 结构平动诱导的流场



(b) 结构转动诱导的流场



(c) 一阶固有模态诱导的流场



(d) 二阶固有模态诱导的流场

图3 带翼圆柱的弹性振动

到的附加质量只有刚性平动时的解析结果。

3.2 拱形柱壳刚性平动

置于流体中的无限长圆弧形横截面拱形柱壳。横截面弦长为 $2\sqrt{3}$, 圆心角为 120° , 板的厚度不计, 如图 5。本例是少数有解析解的曲线横截面结构的算例。附录 A 中用共形映照方法可以计算出拱形板沿 Y 轴以单位速度作平动时的附加质量为 $(7/8)\pi\rho$ 。用本文的方法分析流场时, 圆弧上划分了 200 个单元 ($n_1 = 0, n_2 = 200$), 并布上偶极子。附加质量计算结果为 2.7595ρ , 相对误差为 0.39% 。

表 1

	附加广义质量 m		相对误差 $R_r/(%)$
	本文数值结果	文献[7]的解析结果	
刚体平动	21.6485 ρ	21.2931 ρ	1.67
刚体转动	33.5037 ρ	无解析结果	—
第 1 阶弹性模态	0.6759 ρ	无解析结果	—
第 2 阶弹性模态	1.6464 ρ	无解析结果	—

3.3 圆柱弹性振动

置于流体中的无限长圆柱, 横截面半径为 1, 如图 4。附录 B 中求得了当圆柱边界以径向速度 $\cos 2\theta$ 作弹性变形时的附加质量解析值为 $0.5\pi\rho$ 。采用数值计算时将整个圆周划分成 200 个单元 ($n_1 = 200, n_2 = 0$), 并布上源汇。得到的附加质量数值结果为 1.5646ρ , 二者的相对误差为 0.39% 。

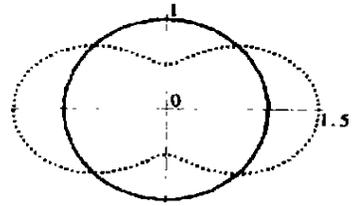


图 4 无限长圆柱的弹性变形

4 结束语

本文将大型柔性结构振动诱导空气流场的问题归结为无粘性不可压缩无旋流动平面问题。详细阐述了如何用奇点配置法计算二维结构振动所诱导的空气流场, 推导出流场的动能表达式, 又在此基础上得到空气的附加质量。这种方法简便易行, 而且通过算例验证了它的可靠性。本方法可以推广到三维流场分析及相应的动能计算。

附录 A 流体中拱形柱壳平动时的附加质量

如图 5 所示, 拱形柱壳的横截面是 XY 平面上弦长 $2\sqrt{3}$, 圆心角 120° 的圆弧板。共形映照

$$z = \omega(\zeta) = \frac{1}{2} \left[\zeta + \frac{1}{2}i + \frac{3}{4\zeta + 2i} \right] \quad (\text{A1})$$

将 ζ 平面的单位圆映射成该圆弧, 其中 $z = x + iy, \zeta = \xi + i\eta, i = \sqrt{-1}$ 。其逆变换是

$$\zeta = \omega^{-1}(z) = z - \frac{1}{2}i + \sqrt{z^2 + \frac{3}{4}} \quad (\text{A2})$$

柱壳以单位速度沿 Y 轴平动时诱导的流场, 等价于无穷远处 Y 方向单位速度的来流绕过静止拱形柱壳的流场(简称流场 1), 和沿 $-Y$ 方向均匀流动的流场(简称流场 2)的迭加。

对于 Z 平面上的流场 1, 由于共形映照(A1)具有渐进性质

$$\left. \frac{dz}{d\zeta} \right|_{\zeta \rightarrow \infty} = \frac{1}{2}, \quad (\text{A3})$$

所以在 ζ 平面上对应的是无穷远处 η 方向 $1/2$ 速度的来流绕过单位圆的流场。 ζ 平面上圆柱绕流的复势为^[6]

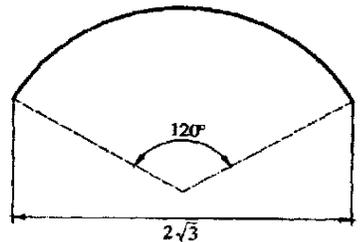


图 5 拱形柱壳横截面

$$w_1(\zeta) = \frac{i}{2} \left[\frac{1}{\zeta} - \zeta \right]. \tag{A4}$$

由(A2)得到 Z 平面上的复势是

$$w_1(z) = w_1(\omega^{-1}(z)) = \frac{i}{2z - i + \sqrt{4z^2 + 3}} - \frac{2iz + 1 + i\sqrt{4z^2 + 3}}{4}. \tag{A5}$$

对于流场 2 可以直接写出 Z 平面上的复势

$$w_2(z) = iz, \tag{A6}$$

利用(A1)则可得到 ζ 平面上相应的复势为

$$w_2(\zeta) = w_2(\omega^{-1}(z)) = \frac{i\zeta}{2} - \frac{1}{4} + \frac{3}{4\zeta + 2i}. \tag{A7}$$

由此可以得到 Z 平面上柱壳沿 Y 轴以单位速度平动诱导的流场的复势为(忽略常数项)

$$w(z) = w_1(z) + w_2(z) = \frac{2iz - i\sqrt{4z^2 + 3}}{4} + \frac{i}{2z - i + \sqrt{4z^2 + 3}} \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(x, y) + i\phi(x, y), \tag{A8}$$

其中 $\Phi(x, y)$ 为相应的势函数, $\phi(x, y)$ 为相应的流函数

ζ 平面上相应的复势为(忽略常数项)

$$w(\zeta) = w_1(\zeta) + w_2(\zeta) = \frac{i}{2\zeta} + \frac{i}{2\zeta + 1} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(\xi, \eta) + i\phi(\xi, \eta), \tag{A9}$$

其中 $\varphi(\xi, \eta)$ 为相应的势函数, $\phi(\xi, \eta)$ 为相应的流函数

因为柱壳作刚性运动, 流过柱壳表面的总流量为零, 所以流场动能为^[6]

$$K = -\frac{\rho}{2} \int_{\Gamma} \varphi(x, y) \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = -\frac{\rho}{2} \int_{\Gamma} \varphi(\xi, \eta) \frac{\partial \varphi(\xi, \eta)}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma, \tag{A10}$$

其中 Γ 表示 Z 平面上柱壳横截面圆弧的边界, \mathbf{n} 表示该圆弧边界的外法向单位矢量, Γ 表示 ζ 平面上单位圆的边界, \mathbf{n} 表示单位圆的外法向矢量

在 ζ 平面的上 ζ 用极坐标可以表示为

$$\zeta = re^{i\theta}, \tag{A11}$$

代入(A10)得到动能

$$K = -\frac{\rho}{2} \int_0^{2\pi} \varphi(1, \theta) \frac{\partial \varphi(1, \theta)}{\partial r} d\theta = \frac{7}{16} \pi \rho, \tag{A12}$$

所以附加质量为 $(7/8)\pi\rho$

附录 B 圆柱弹性变形诱导的空气流场及附加质量

如图 6 所示, 长度无限的圆柱壳的横截面为 XY 平面上的单位圆, 单位圆上各个点的径向速度为

$$v_n = \cos 2\theta, \tag{B1}$$

这时柱壳所诱导的流场势函数应满足的边界条件是(极坐标表示)

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=1} = \cos 2\theta. \tag{B2}$$

设势函数

$$\varphi(r, \theta) = F(r) \cos 2\theta, \tag{B3}$$

代入 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0, \tag{B4}$$

导出 $F(r)$ 所满足的方程

$$F''(r) + \frac{1}{r} F'(r) - \frac{4}{r^2} F(r) = 0, \tag{B5}$$

求解此方程, 并利用边界条件(B2), 得

$$F(r) = -\frac{1}{2r^2}. \tag{B6}$$

于是

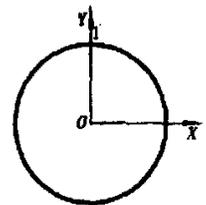


图 6 长度无限的圆柱壳的横截面

$$\varphi(r, \theta) = -\frac{1}{2r^2} \cos 2\theta \quad (B7)$$

因为 $\varphi|_{r \rightarrow \infty} = 0$, 所以此流场的动能为^[6]

$$K = -\frac{\rho}{2} \oint_{r=1} \varphi(r, \theta) \frac{\partial \varphi(r, \theta)}{\partial r} r d\theta = \frac{\rho}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2 2\theta d\theta = \frac{\rho}{4} \pi, \quad (B8)$$

则附加质量为 $0.5\pi\rho$.

[参 考 文 献]

- [1] 王文亮, 杜作润. 结构振动与动态子结构方法[M]. 上海: 复旦大学出版社, 1985, 434—439.
- [2] Jiang K C, Gahart R. Analysis and modal survey test of intelsat VIIA deployed solar array[A]. In: MSC Software Corporation Ed. MSC 1994 World Users' Conf Proc [C][EB]. Paper No 27, June 1994.
- [3] 李淑娟, 王皓, 黄涛, 等. 太阳帆板振动诱导空气流场分析及其附加质量计算[J]. 复旦大学学报(自然科学版), 2000, 8(4): 441—445.
- [4] Wang H, Li S J, Huang T, et al. Ground test data correction of solar array[A]. In: Wen B C Ed. Proceedings of the Asia Pacific Vibration Conference [C]. Shenyang: Jilin Science and Technology Press, 2001, 877—880.
- [5] Thomson W T, Dahleh M D. Theory of Vibration With Applications [M]. 5th Ed. New Jersey: Prentice Hall, 1997, 183—187.
- [6] 周光, 严宗毅, 许世雄, 等. 流体力学[M]. 上册. 北京: 高等教育出版社, 2001, 265—271, 281—290, 307—322.
- [7] Robert D. Blenvis Ph D. Formulas for Natural Frequency and Mode Shape [M]. Malabar Florida: Krieger Publishing Company, 2001, 391—399.

Numerical Analysis of Fluid Flow and Added Mass Induced by Vibration of Structure

SU Li, LI Shu_juan, TANG Guo_an

(Department of Mechanics and Engineering Science, Fudan University, Shanghai 200433, P. R. China)

Abstract: The fluid flow induced by light_density, low_stiffness structures was treated as inviscid, incompressible irrotational and steady plane flow. On the basis of the dipole configuration method, a singularity distribution method of distributing sources/sinks and dipoles on interfaces of the structure and fluid was developed to solve the problem of fluid flow induced by the vibration of common structures, such as columns and columns with fins, deduce the expression of kinetic energy of the fluid flow, and obtain the added mass finally. The calculational instances with analytical solutions prove the reliability of this method.

Key words: structure; fluid; vibration; added mass; singularity distribution method