

文章编号: 1000\_0887(2005) 03\_0309\_07

# 具有非均匀界面相的颗粒和纤维增强复合材料弹性静力学问题的解析解\*

段慧玲, 王建祥, 黄筑平, 黄红波

(北京大学 湍流与复杂系统国家重点实验室 力学与工程科学系, 北京 100871)

(本刊编委黄筑平来稿)

**摘要:** 通过将以位移表示的平衡方程转化为黎卡提方程, 得到了具有非均匀界面相的颗粒和纤维增强复合材料非均匀界面相内弹性场的解析解。所得的解析解是弹性模量呈幂次方变化的非均匀界面相解的通用形式。任意给定 1 个幂指数, 可以得到具有非均匀界面相的颗粒和纤维增强复合材料体积模量的解析表达式。通过改变幂指数及幂次方项的系数, 此解析解可适用于具有多种不同性质的非均匀界面相。结果表明: 界面相模量和厚度对复合材料模量有很大的影响, 当界面相存在时, 粒子将出现一种“尺寸效应”。

**关键词:** 非均匀界面相; 颗粒增强复合材料; 纤维增强复合材料; 解析解; 体积模量  
**中图分类号:** TB330.1      **文献标识码:** A

## 引 言

近年来, 具有均匀和非均匀界面相的复合材料引起了许多研究者的兴趣<sup>[1~7]</sup>。非均匀界面相有些是人为设计的, 有些是在复合材料的制造过程中由于化学反应产生的。从复合材料力学的观点来看, 研究具有界面相的复合材料的基本问题之一是如何预测其等效模量。已经有许多种预测复合材料等效模量的方法, 例如: 广义自洽方法(GSCM)、复合球和复合圆柱模型(CCA 和 CSA) 以及 IDD 估计等<sup>[8~11]</sup>。把这些方法应用于预测具有非均匀界面相复合材料的等效模量遇到的关键问题就是求解非均匀界面相的弹性场。现有文献仅给出了非均匀界面相模量呈现几种特殊变化形式时弹性场的解析解<sup>[5~7]</sup>。

本文的目的是给出具有非均匀界面相的颗粒和纤维增强复合材料弹性静力学问题的解析解, 从而得到颗粒和纤维增强复合材料体积模量的解析表达式。为此, 首先把平衡方程转化为黎卡提方程, 得到黎卡提方程的通解。然后采用半逆解法得到位移的通解, 避免了复杂的积分。在许多文献和许多关于非均匀介质的弹性力学问题中, 都假设非均匀界面相的弹性模量是空间变量的幂次方函数。本文给出了非均匀界面相模量呈一般性幂次变化情况时的解析解, 此解在文献中未见报道, 而且目前已有的解是本文所给通解的特例。更重要的是, 本文给出的解析解还可以用来分析无限大基体中具有非均匀界面相的单个夹杂或夹杂稀疏分布情况下的界

\* 收稿日期: 2003\_07\_13; 修订日期: 2004\_12\_03

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10032010, 10072002, 10372004)

作者简介: 段慧玲(1970-), 女, 蒙古族, 内蒙古人, 博士(E-mail: hlduan@pku.edu.cn);

王建祥(联系人, Tel: + 86\_10\_62757948; Fax: + 86\_10\_62751812; E-mail: jxwang@pku.edu.cn)。

面脱粘问题

1 物理模型和数学方法

具有非均匀界面相的复合材料可认为是一种功能梯度复合材料(FGMs), 经过特殊设计的一些界面相通常可用来提高断裂强度、改善化学相容性以及调节组成相之间的热传导系数。本文采用三层同心球壳模型作为代表体积单元(RVE)来预测颗粒增强复合材料的等效体积模量, 用三层同心圆柱壳模型作为代表体积单元(RVE)来预测纤维增强复合材料的等效平面应变体积模量。假设基体、颗粒和纤维是均匀的, 基体与颗粒或纤维之间的界面相是非均匀的并且弹性模量沿径向变化, 三层球壳模型是由一个球和两个同心球壳组成, 颗粒、界面相和基体的外半径分别为  $a_p$ 、 $a_I$  和  $a_m$ 。三层同心圆柱壳模型是由一个圆柱和两个同心圆柱壳组成, 纤维、界面相和基体外半径分别为  $a_f$ 、 $a_I$  和  $a_m$ 。根据 Hashin<sup>[9]</sup>、Hashin 和 Rosen<sup>[10]</sup> 的观点, 这两类复合材料可分别用一系列大小不等的三层同心球壳和三层同心圆柱壳来堆积, 使得复合材料体逐渐被填满, 直到复合材料体积单元之间没有留下基体的空间。颗粒和纤维的体积分数分别表示为  $c_p = (a_p/a_m)^3$  和  $c_f = (a_f/a_m)^2$ , 界面相的体积分数分别表示为  $c_I = (a_I^3 - a_p^3)/a_m^3$  和  $c_I = (a_I^2 - a_f^2)/a_m^2$ 。对于颗粒和纤维增强复合材料, 基体的体积分数分别为  $c_m = 1 - (c_p + c_I)$  和  $c_m = 1 - (c_f + c_I)$ 。为了简化起见, 用无量纲化参数  $r/a_m$  来代表体系中物质点的位置, 则  $r = c_p^{1/3}$  和  $r = c_f^{1/2}$  分别代表两类复合材料中颗粒和界面相以及纤维和界面相的界面,  $r = (c_p + c_I)^{1/3}$  和  $r = (c_f + c_I)^{1/2}$  分别代表界面相和基体的界面。  $r = 1$  代表 RVE 的外边界。体积模量、平面应变体积模量、剪切模量、弹性模量和泊松比分别用  $\kappa$ 、 $k$ 、 $\mu$ 、 $E$  和  $\nu$  表示, 下标  $p$ 、 $f$ 、 $I$  和  $m$  分别代表颗粒、纤维、界面相和基体。颗粒增强复合材料的体积模量用希腊字母  $\kappa$  表示, 纤维增强复合材料的平面应变体积模量用  $k$  表示。

为了得到颗粒增强复合材料的等效体积模量及纤维增强复合材料的等效平面应变体积模量, 在 RVE 的外边界上施加径向位移或静水载荷。这 2 种边界条件都导致在 RVE 内只产生球量部分的变形, 可通过边值问题求解。求解颗粒和纤维增强复合材料体积模量所需平衡方程的一般形式为

$$\frac{d^2 u_r(r)}{dr^2} + \beta_1(r) \frac{du_r(r)}{dr} + \beta_2(r) u_r(r) = 0, \tag{1}$$

其中,  $u_r(r)$  是 RVE 中任一点的径向位移。对于颗粒和纤维增强复合材料中的非均匀界面相, (1) 式中的系数不是常量, 因此(1)式仅在某些特殊情况下具有封闭的解析解。令

$$y(r) = \frac{u_r(r)}{u_r(r)}, \tag{2}$$

其中,  $u_r(r) = du_r(r)/dr$ , 则(1)式可写成

$$\frac{dy(r)}{dr} = -\beta_2(r) - \beta_1(r)y(r) - y^2(r), \tag{3}$$

$y^2(r)$  项的系数不等于零, 所以(3)式是黎卡提方程。如果能找到(3)式的一个特解, 则通过变量替换就可得到其通解。若  $y_p$  是(3)式的一个特解, 则通过变量替换, 即:

$$y(r) = y_p(r) - \frac{c_1}{q(r)}, \tag{4}$$

可得到关于  $q(r)$  的一阶微分方程

$$\frac{dq(r)}{dr} - [\beta_1(r) + 2y_p(r)]q(r) = -c_1, \tag{5}$$

其中,  $c_1$  为常数,  $q(r)$  是  $r$  的函数, 若能得到  $q(r)$  的解,  $v(r)$  可由(4)式决定,  $u(r)$  可用半逆解法确定。

## 2 颗粒增强复合材料的解析解

在RVE的外边界上施加径向位移或静水载荷所得到的颗粒增强复合材料的等效体积模量相同, 因此, 这里只考虑在RVE的外边界施加径向位移  $u_r|_{r=1} = \varepsilon_t = \varepsilon_{mm}/3$  重复指标  $m$  表示从1到3求和)· 在粒子区域, 位移和应力场为

$$u_r = A_p r, \quad \sigma_r = \sigma_{\theta} = \sigma_{\phi} = 3k_p A_p \quad (6)$$

在基体区域, 位移和应力场为

$$u_r = B_1 r + \frac{B_2}{r^2}, \quad \sigma_r = 3k_m B_1 - \frac{4\mu_m B_2}{r^3}, \quad \sigma_{\theta} = \sigma_{\phi} = 3k_m B_1 + \frac{2\mu_m B_2}{r^3} \quad (7)$$

其中,  $A_p$ 、 $B_1$  和  $B_2$  为待定的常数· 在非均匀界面相区域, 以径向位移表示的平衡方程为:

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du_r}{dr} - 2 \frac{u_r}{r^2} + \frac{\left[ \frac{dk_1}{dr} + \frac{4}{3} \frac{d\mu_1}{dr} \right]}{\left[ k_1 + \frac{4}{3} \mu_1 \right]} \frac{du_r}{dr} + \frac{\left[ \frac{dk_1}{dr} - \frac{2}{3} \frac{d\mu_1}{dr} \right]}{\left[ k_1 + \frac{4}{3} \mu_1 \right]} \frac{2u_r}{r} = 0 \quad (8)$$

考虑非均匀界面相的弹性模量按以下情况变化

$$k_1 = k_0 + l_k r^Q, \quad \mu_1 = \mu_0 + l_\mu r^Q \quad (9)$$

其中,  $l_k$ 、 $l_\mu$  和  $Q$  为常量,  $k_1$  和  $\mu_1$  需满足各向同性介质的一般热力学限制条件· 将(9)式代入(8)式中, 令

$$\zeta = \frac{(k_0 + 4\mu_0/3)}{(l_k + 4l_\mu/3)}, \quad \xi = \frac{(l_k + 4l_\mu/3)}{(l_k - 2l_\mu/3)} \quad (10)$$

得到界面相区域关于径向位移的平衡方程

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \left[ 2 + \frac{Qr^Q}{(\zeta + r^Q)} \right] \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} + \left[ \frac{Qr^Q}{\xi(\zeta + r^Q)} - 1 \right] \frac{2u_r}{r^2} = 0 \quad (11)$$

上式中各项的系数不是常量, 只有在特殊的  $\zeta$  和  $\xi$  值时(11)式才有封闭形式的解析解· 当  $l_k = 0$  和  $l_\mu = 0$  表明界面相是均匀的· 当  $\zeta = 0$  表明  $k_0 = 0$  和  $\mu_0 = 0$ , 模量从原点开始变化, 即弹性模量呈幂次变化而泊松比为常量, 此时(11)式可退化成欧拉方程, Wang 和 Jasiuk<sup>[5]</sup>得到了此种情况时颗粒增强复合材料相应的解析解· Ding 和 Weng<sup>[6]</sup>利用复合球模型得到了二相RVE时基体为弹性不可压( $\nu = 1/2$ )以及基体模量呈线性变化时( $Q = 1$ )的解析解

当  $Q$  为任意实数时, 把(2)式代入(11)式, 则(11)式转化为黎卡提方程

$$\frac{dY(r)}{dr} + Y^2(r) + \left[ 2 + \frac{Qr^Q}{\zeta + r^Q} \right] \frac{Y(r)}{r} + \left[ \frac{Qr^Q}{\xi(\zeta + r^Q)} - 1 \right] \frac{2}{r^2} = 0 \quad (12)$$

(12)式的一个特解为

$$r_p(r) = c/r, \quad (13)$$

其中,  $c$  为常数· 将(13)式代入(12)式得

$$c^2 + c - 2 + \frac{Qr^Q}{\zeta + r^Q} \left[ c + \frac{2}{\xi} \right] = 0 \quad (14)$$

当  $\zeta \neq 0$  时,  $c^2 + c - 2 = 0$  和  $c + 2/\xi = 0$  同时成立, 得到两组解为

$$c = -2, \quad \xi = 1; \quad c = 1, \quad \xi = -2 \quad (15)$$

相应的特解分别为

$$r_p(r) = -2/r; \quad Y_p(r) = 1/r, \quad (16)$$

以下将讨论(15)式中的两组解。首先,  $c = -2$  和  $\xi = 1$  对应  $l_\mu = 0$ , 即剪切模量恒定而体积模量按(9)式变化。利用(4)式进行变量替换,  $r_p(r) = -2/r$  化为  $\forall(r) = -2/r - c_1/q(r)$ , (12)式确定了关于  $q(r)$  的一阶微分方程

$$q'(r) + \left[ \frac{2}{r} - \frac{Qr^{Q-1}}{(\zeta + r^Q)} \right] q(r) = -c_1, \quad (17)$$

对上式积分得到  $q(r)$  的表达式, 然后把  $q(r)$  代入到  $\forall(r)$  的表达式中得

$$\forall(r) = \frac{u_r(r)}{u_r(r)} = -\frac{2}{r} - \frac{c_1}{q(r)} = -\frac{2}{r} - r^2 \left\{ \left[ (\zeta + r^Q) \left( d - \int \frac{r^2}{(\zeta + r^Q)} dr \right) \right] \right\}, \quad (18)$$

其中,  $d$  为常数。位移场可由积分  $u_r(r) = \exp \left[ \int \forall(r) dr \right]$  确定, 但是若采用积分方法,  $u_r(r)$  的表达式将包含二重积分, 很难得到结果。这里将采用半逆解法, 令

$$u_r(r) = D_1 \sqrt{r^2} + D_2 f(r), \quad (19)$$

其中,  $f(r)$  是  $r$  的函数,  $D_1$  和  $D_2$  是待定常数。把  $u_r(r)$  和  $u_r'(r)$  代入(18)式, 得到  $f(r)$  从而得到  $u_r(r)$

$$u_r(r) = \frac{D_1}{r^2} + \frac{D_2}{r^2} \int \frac{r^2}{\zeta + r^Q} dr. \quad (20)$$

其次,  $c = 1$  和  $\xi = -2$  对应  $l_k = 0$ , 利用以上求解过程可得到位移场

$$u_r(r) = D_1 r + D_2 f(r) = D_1 r + D_2 r \int \frac{1}{r^4 (\zeta + r^Q)} dr. \quad (21)$$

若  $Q$  为某一指定的实数, 通过方程(20)式和(21)式就可以确定位移场, 常数  $A_p, B_1, B_2, D_1$  和  $D_2$  可由  $u_r$  和  $\sigma_r$  在两界面处的连续条件及在外边界上  $u_r = \varepsilon$  的边界条件确定, 三层球壳模型的平均径向应力为  $\sigma_{rr} = \sigma_r |_{(r=1)}$ 。复合材料的等效体积模量可由下式确定:

$$\kappa = \frac{\sigma_{rr}}{3\varepsilon_i} = \frac{3\kappa_m B_1 - 4\mu_m B_2}{3\varepsilon_i}. \quad (22)$$

### 3 纤维增强复合材料的解析解

在RVE的外边界上施加径向位移或静水载荷所得到的纤维增强复合材料的等效平面应变体积模量相同, 因此, 这里只考虑在RVE外边界施加径向位移  $u_r |_{r=1} = \varepsilon = \varepsilon_n / 2$  (重复指标表示  $n$  从1到2求和)。在纤维区域, 位移和应力场为

$$u_r = A_f r, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = 2k_f A_f, \quad (23)$$

在基体区域, 位移和应力场为

$$u_r = B_1 r + \frac{B_2}{r}, \quad \sigma_r = 2k_m B_1 - \frac{2\mu_m B_2}{r^2}, \quad \sigma_{\theta\theta} = 2k_m B_1 + \frac{2\mu_m B_2}{r^2}, \quad (24)$$

其中,  $A_f, B_1$  和  $B_2$  是待定常数。考虑非均匀界面相的弹性模量按以下情况变化

$$k_l = k_0 + l_k r^Q, \quad \mu_l = \mu_0 + l_\mu r^Q, \quad (25)$$

其中,  $l_k$  为常数, 则界面相区域以径向位移表示的平衡方程为

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \left[ 1 + \frac{Qr^Q}{\zeta + r^Q} \right] \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} + \left[ \frac{Qr^Q}{\xi(\zeta + r^Q)} - 1 \right] \frac{u_r}{r^2} = 0, \quad (26)$$

其中  $\zeta = \frac{k_0 + \mu_0}{l_k + l_\mu}, \quad \xi = \frac{l_k + l_\mu}{l_k - l_\mu}$ 。

(26)式与(11)式具有相同的形式, 所以可按同样的过程求解。当非均匀界面相的弹性模量按(25)式变化时, Jasiuk 和 Kouider<sup>[7]</sup> 通过求解欧拉形式的平衡方程已得到模量从原点开始变化 ( $k_0 = 0, \mu_0 = 0$ ) 时纤维增强复合材料非均匀界面相内位移场的解析解。Ding 和 Weng<sup>[6]</sup>

利用复合圆柱模型得到了二相 RVE 时基体为弹性不可压 ( $\nu = 1/2$ ) 以及基体模量呈线性变化时 ( $Q = 1$ ) 的解析解。现在要寻求  $Q$  为任意实数时纤维增强复合材料界面相位移场更一般形式的解。类似于颗粒增强复合材料的求解过程将 (2) 式代入 (26) 式, 后者转化为黎卡提方程

$$\frac{dY(r)}{dr} + Y^2(r) + \left[ 1 + \frac{Qr^Q}{\zeta + r^Q} \right] \frac{Y(r)}{r} + \left[ \frac{Qr^Q}{\xi(\zeta + r^Q)} - 1 \right] \frac{1}{r^2} = 0, \quad (27)$$

(27) 式具有与 (12) 式形式相同的特解, 将 (13) 式代入 (27) 式得

$$c^2 - 1 + \frac{Qr^Q}{\zeta + r^Q} \left( c + \frac{1}{\xi} \right) = 0, \quad (28)$$

当  $\zeta \neq 0$  时,  $c^2 - 1 = 0$  和  $c + 1/\xi = 0$  同时成立, 得到两组解为

$$c = -1, \quad \xi = 1, \quad c = 1, \quad \xi = -1, \quad (29)$$

相应的特解分别为

$$Y_p(r) = -1/r; \quad Y_p(r) = 1/r, \quad (30)$$

下面将讨论 (29) 式的两组解。首先,  $c = -1$  和  $\xi = 1$  对应  $l_\mu = 0$ , 即剪切模量恒定而平面应变体积模量按 (25) 式变化。按照与颗粒情形同样的步骤得

$$u_r(r) = \frac{D_1}{r} + \frac{D_2}{r} \int \frac{r}{\zeta + r^Q} dr. \quad (31)$$

其次,  $c = 1$  和  $\xi = -1$  对应  $l_k = 0$ , 即平面应变体积模量恒定而剪切模量按 (25) 式变化。按照与颗粒情形同样的步骤得

$$u_r(r) = D_1 r + D_2 r \int \frac{1}{r^3(\zeta + r^Q)} dr. \quad (32)$$

任意给定实数  $Q$ , 通过方程 (31) 式和 (32) 式积分就可确定出位移场, 常数  $A_k, B_1, B_2, D_1$  和  $D_2$  也可由连续性条件和边界条件得到。三层圆柱壳的平均应力为  $\sigma_r = \sigma_r|_{(r=1)}$ , 平面应变体积模量  $k$  为

$$k = \frac{\sigma_r}{2\varepsilon_s} = \frac{2k_m B_1 - 2\mu_m B_2}{2\varepsilon_s}. \quad (33)$$

## 4 结果和讨论

复合材料的等效体积模量(或等效平面应变体积模量)取决于各相的模量和界面相厚度。这里以颗粒增强复合材料为例, 分析界面相的模量和厚度等因素对复合材料等效模量的影响。考虑界面相的模量呈如下变化形式:

$$\kappa_1 = \kappa_0 + l_k r^Q, \quad \mu_1 = \mu_0, \quad (34)$$

在数值计算中, 用碳化硅作为颗粒增强材料, 6061-T6 铝作为基体材料, 模量数据取自于文献<sup>[6]</sup>。SiC:  $\kappa_p = 247.47$  GPa,  $\mu_p = 209.40$  GPa; Al:  $\kappa_m = 66.96$  GPa,  $\mu_m = 25.67$  GPa。界面相的模量参数为:  $\kappa_0 = 20$  GPa,  $\mu_0 = 8$  GPa,  $l_k = 10$  GPa,  $l_\mu = 0$ 。

图 1 给出了在不同幂指数  $Q$  值时颗粒增强复合材料等效体积模量随界面相厚度的变化关系。根据所给的数据, 界面相比基体和颗粒软, 因此等效体积模量随界面相厚度的增加而减小。  $Q = -1$  的界面相要比  $Q = 0$  的界面相要硬,  $Q = 1$  的界面相要比  $Q = 0$  的界面相软。  $Q = 0$ , 即均匀界面相的情况,  $\kappa$  随界面相厚度的减小比  $Q = 1$  时要慢; 而对于  $Q = -1$ ,  $\kappa$  随界面相厚度的减小比  $Q = 0$  时慢。通常, 在参量  $l_k, l_\mu, \kappa_0$  和  $\mu_0$  保持恒定时,  $Q > 0$  时的曲线总在  $Q = 0$  的下方,  $Q < 0$  时的曲线总在  $Q = 0$  的上方。

若颗粒、界面相和基体三相的模量给定, 界面相的厚度对  $\kappa$  有很大影响。例如, 在复合材料制造过程中, 界面相可能是由于化学反应产生的, 这种情况下界面相厚度可能和颗粒大小无

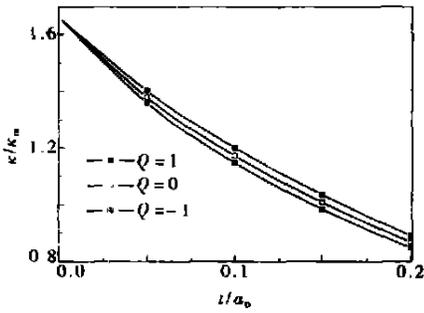


图1 等效体积模量随界面相厚度的变化关系

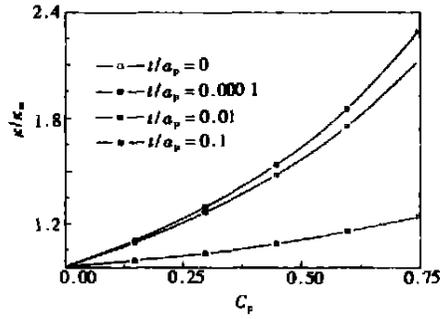


图2 等效体积模量随颗粒体积分数的变化关系( $Q = -2$ )

关。此时,界面相厚度对体积模量的影响因颗粒大小不同而显著不同。图2给出了不同  $t/a_p$  值时颗粒增强复合材料等效体积模量随颗粒体积分数的变化关系。若存在一个厚度为  $t = 100 \text{ nm}$  的界面相,颗粒半径为  $1 \text{ mm}$ ,则  $t/a_p = 0.0001$ ,意味着界面相很薄。由图2可见, $t/a_p = 0.0001$ 的曲线和  $t/a_p = 0$ 的曲线重合,表明界面相的影响可以忽略。对同样的界面相厚度,若颗粒半径为  $10 \text{ }\mu\text{m}$ ,则  $t/a_p = 0.01$ 。从图2中可见  $t/a_p = 0.01$ 的曲线和  $t/a_p = 0$ 的曲线显著不同,界面相的影响增大。若颗粒半径减小到  $a_p = 1 \text{ }\mu\text{m}$ ,则  $t/a_p = 0.1$ ,这意味着界面相厚度和颗粒半径具有相同的数量级,此时复合材料的体积模量远低于  $t/a_p = 0$ 时的情形。因此,若有界面相存在,颗粒将表现出一种“尺寸效应”。通过以上理论和数值分析,可以得出以下结论:

(I) 通过把以位移分量表示的平衡方程转化为黎卡提方程,并利用黎卡提方程的特解,得到了具有非均匀界面相的颗粒和纤维增强复合材料弹性场的解析解,所得的解析解比现有的解析解更广泛和普遍。

(II) 当非均匀界面相的弹性模量呈幂次方变化时,给定一个幂指数  $Q$ ,可得到颗粒和纤维增强复合材料体积模量的解析表达式。通过变换幂指数和幂次方项的系数,此解析解可适用于具有多种不同性质的非均匀界面相,对实际应用很有意义。

(III) 非均匀界面相模量和厚度的变化对复合材料的等效体积模量有很大影响。 $Q$  越大影响越显著。若界面相的厚度给定,当界面相厚度和颗粒半径之比很大时,界面对体积模量的影响变得非常显著,例如  $t/a_p = 0.1$ 时的情况。若有界面相存在,颗粒将出现一种“尺寸效应”。

### [参 考 文 献]

- [1] Dai L H, Huang Z P, Wang R. Explicit expressions for bounds for the effective moduli of multi-phased composites by the generalized self-consistent method[J]. Composites Science and Technology, 1999, 59(11): 1691—1699.
- [2] 仲政. 含柔性涂层的颗粒增强复合材料弹性模量估计[J]. 固体力学学报, 2000, 21(4): 350—354.
- [3] Wu Y M, Huang Z P, Zhong Y, et al. Effective moduli of particle-filled composite with inhomogeneous interphase: Part I—bounds[J]. Composites Science and Technology, 2004, 64(9): 1345—1351.
- [4] Zhong Y, Wang J, Wu Y M, et al. Effective moduli of particle-filled composite with inhomogeneous interphase: Part II—mapping method and evaluation[J]. Composites Science and Technology, 2004, 64(9): 1353—1362.

- [5] Wang W, Jasiuk I. Effective elastic constants of particulate composites with inhomogeneous interphases[J]. *Journal of Composite Materials*, 1998, **32**(15): 1391—1424.
- [6] Ding K, Weng G J. The influence of moduli slope of a linearly graded matrix on the bulk moduli of some particle and fiber reinforced composites[J]. *Journal of Elasticity*, 1999, **53**(1): 1—22.
- [7] Jasiuk I, Kouider M W. The effect of an inhomogeneous interphase on the elastic constants of transversely isotropic composites[J]. *Mechanics of Materials*, 1993, **15**(1): 53—63.
- [8] Christensen R M, Lo K H. Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1979, **27**(3): 315—330.
- [9] Hashin Z. The elastic moduli of heterogeneous materials[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1962, **29**(1): 143—150.
- [10] Hashin Z, Rosen B W. The elastic moduli of fiber reinforced materials[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1964, **31**(2): 223—232.
- [11] Zheng Q S, Du D X. An explicit and universally applicable estimate for the effective properties of multiphase composites which account for inclusion distribution[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2001, **49**(11): 2765—2788.

## Analytical Solutions for Elastostatic Problems of Particle\_ and Fiber\_Reinforced Composites With Inhomogeneous Interphases

DUAN Hui\_ling, WANG Jian\_xiang, HUANG Zhu\_ping, HUANG Hong\_bo  
(LTCS and Department of Mechanics and Engineering Science, Peking University,  
Beijing 100871, P. R. China)

**Abstract:** By transforming the governing equations for displacement components into Riccati equations, analytical solutions for displacements, strains and stresses for RVEs of particle\_ and fiber\_reinforced composites containing inhomogeneous interphases were obtained. The analytical solutions derived here are new and general for power\_law variations of the elastic moduli of the inhomogeneous interphases. Given a power exponent, analytical expressions for the bulk moduli of the composites with inhomogeneous interphases can be obtained. By changing the power exponent and the coefficients of the power terms, the solutions derived here can be applied to inhomogeneous interphases with many different property profiles. The results show that the modulus variation and the thickness of the inhomogeneous interphase have great effect on the bulk moduli of the composites. The particle will exhibit a sort of “size effect”, if there is an interphase.

**Key words:** inhomogeneous interphase; particle\_reinforced composite; fiber\_reinforced composite; analytical solution; bulk modulus