应用数学和力学,第 26 卷 第 3 期(2005 年 3 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2005)03_0341_08

时滞神经网络全局渐近稳定性条件*

周冬明[1,3], 曹进德[2], 张立明[1]

(1. 复旦大学 电子工程系, 上海 200433;
2. 东南大学 应用数学系, 南京 210096;
3. 云南大学 电子工程系, 昆明 650091)

(刘曾荣推荐)

摘要: 利用 Liapunov 泛函方法, 结合矩阵不等式技巧, 分析了时滞细胞神经网络(DCNNs)的平衡点存在的唯一性和全局渐近稳定性, 保证 DCNNs 的全局稳定性的一个新的充分判据被得到• 所得判据提供了一些参数来适当地弥补了反馈矩阵与时滞反馈矩阵之间所需要的平衡关系• 这些判据可以容易被使用来设计和检验全局稳定的网络• 此外, 所得判据是与时滞参数无关, 且比已有文献具有更少的限制•

关 键 词: 细胞神经网络; 全局稳定性; 矩阵不等式; 时滞
中图分类号: O175; TP183 文献标识码: A

1 引言及问题提出

近几年来, 细胞神经网络(CNNs)和时滞细胞神经网络(DCNNs)的稳定性研究已经吸引了许多研究者, 并且得到了许多重要的结果, 但多数作者考虑的是适合图像处理应用的完全稳定的 CNNs 和 DCNNs• 细胞神经网络已被广泛用于图像处理, 而动态图像的处理却需要引入时滞, 但时滞可能导致网络振荡甚至于不稳定[1]• 由此, DCNNs 的稳定性得到了广泛研究[1~17]• 在文献[2]至文献[4]中, 通过使用比较方法, Liapunov 方法, M_矩阵和准对角占优技术, DCNNs 的几个稳定性条件被得到• 在文献[5]至文献[8]中, 通过构造适当的 Liapunov 泛函且引入一些参数, 以及结合不等式技巧, 几个有用的结果被得到• 在文献[9]至[11]中, 一些稳定性的判据是依赖于时滞反馈矩阵• 在已有文献中, 我们重点参考了文献[2]至[12], 我们的结果基本上改善和扩展了文献[2]至[11]的结果• 时滞细胞神经网络的数学模型由如下的状态方程来描述

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = -\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{A}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t-\tau)) + \boldsymbol{u} \tag{1}$$

或者

$$\dot{x}_i(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} f_j(x_j(t-\tau)) + u_i$$

* 收稿日期: 2003_04_28; 修订日期: 2004_09_15
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60171036)
作者简介: 周冬明(1963—), 男, 湖南人, 副教授, 博士(E_mail: dmzhou@ynu.edu.cn);
张立明(1943-), 女, 上海人, 教授, 博导(联系人. Tel: + 86_21_55664041; Fax: + 86_21_65648783; E_mail: lmzhang@fudan.edu.cn)•

$$(i = 1, 2, \cdots, n), \tag{2}$$

式中 $\boldsymbol{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)]^{\mathrm{T}} \in R^n$ 是与神经元有关的状态向量, $\boldsymbol{C} = \mathrm{diag}\{c_i > 0\}$(正定对角矩阵), $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ 和 $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{n\times n}$ 分别是反馈矩阵和时滞反馈矩阵, $\boldsymbol{u} = [u_1, u_2, \cdots, u_n]^{\mathrm{T}} \in R^n$ 是常数输入向量, τ 是时滞参数且为非负常数, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)) = [f_1(x_1(t)), f_2(x_2(t)), \cdots, f_n(x_n(t))]^{\mathrm{T}} \in R^n$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t-\tau)) = [f_1(x_1(t-\tau)), f_2(x_2(t-\tau)), \cdots, f_n(x_n(t-\tau))]^{\mathrm{T}} \in R^n$. 激活函数 $f_j(\cdot)$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ 由下式给出

$$f_j(x_j) = \frac{1}{2}(|x_j + 1| - |x_j - 1|) \qquad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

我们假定系统(1)对于给定的 $\boldsymbol{u}$ 有一个平衡点 $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)^{\mathrm{T}}$. 为了简化我们的证明, 我们将式(1)的平衡点 $\boldsymbol{x}^*$ 转移到原点. 使用如下变换

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}^*, \quad \boldsymbol{y}(t-\tau) = \boldsymbol{x}(t-\tau) - \boldsymbol{x}^*,$$

系统(1)可以被变换成如下形式

$$\dot{\boldsymbol{y}}(t) = -\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{A}\phi(\boldsymbol{y}(t)) + \boldsymbol{B}\phi(\boldsymbol{y}(t-\tau)) \tag{3}$$

即

$$\dot{y}_i(t) = -c_i y_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\phi_j(y_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\phi_j(y_j(t-\tau)) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

式中 $\boldsymbol{y}(t) = [y_1(t), \cdots, y_n(t)]^{\mathrm{T}} \in R^n$ 是变换以后的状态向量, $\boldsymbol{C} = \mathrm{diag}\{c_i > 0\}$(正定对角矩阵), $\phi(\boldsymbol{y}(t)) = [\phi_1(y_1(t)), \cdots, \phi_n(y_n(t))]^{\mathrm{T}} \in R^n$ 具有 $\phi_i(y_i(t)) = f_i(y_i(t) + x_i^*) - f_i(x_i^*)$ 和 $\phi(0) = 0$.

2 全局渐近稳定性分析

在这一节里, 我们将得出系统(1)的平衡点的全局渐近稳定性的新的充分条件. 其证明是基于 Liapunov 方法以及结合矩阵不等式技巧.

引理 1 对任意向量 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in R^n$, 存在正定矩阵 $\boldsymbol{P} \in R^{n\times n}$ 使得如下矩阵不等式成立

$$2\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y} \leqslant \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Y}.$$

证明 对于任意向量 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)^{\mathrm{T}}$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)^{\mathrm{T}}$, 我们有

$$\sum_{i=1}^{n} 2\alpha_i\beta_i \leqslant \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^2 + \beta_i^2), \tag{4}$$

不等式(4)可以写成如下的向量_矩阵形式

$$2\alpha^{\mathrm{T}}\beta \leqslant \alpha^{\mathrm{T}}\alpha + \beta^{\mathrm{T}}\beta, \tag{5}$$

由于矩阵 $\boldsymbol{P}$ 是正定的, 因而存在一个非奇异的对称阵 $\boldsymbol{P}_1$ 使得 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1$.

假定 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}_1^{-1}\alpha$, $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{P}_1\beta$, 利用(5)式, 我们得

$$2(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{Y}) \leqslant (\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{X} + (\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{Y})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{Y})$$

即

$$2\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y} \leqslant \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Y}.$$

证毕.

引理 2 对于函数 $f(\cdot)$, $f(x_i(t)) = 0.5(|x_i(t) + 1| - |x_i(t) - 1|)$ $(x, y \in \mathbf{R})$, 有如下不等式成立

(i) $(x - y)(f(x) - f(y)) \geqslant (f(x) - f(y))^2$,

(ii) $|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|$,

(iii) $\int_y^x (f(s) - f(y))\mathrm{d}s \geqslant \frac{1}{2}(f(x) - f(y))^2$.

引理 2 的证明可以参考文献[12].

根据引理 2, 显然函数 $\phi_i(\cdot)$ 满足:

$$y_i\phi_i(y_i) \geqslant 0 \qquad (\forall y_i \in \mathbf{R}, \quad i = 1, 2, \cdots, n)$$

和

$$\phi_i^2(y_i) \leqslant y_i\phi_i(y_i) \qquad (\forall y_i \in \mathbf{R}, \quad i = 1, 2, \cdots, n). \tag{6}$$

于是, 我们有

$$\lim_{|y_i| \to +\infty} \int_0^{y_i} \phi_i(\theta)\mathrm{d}\theta = +\infty. \tag{7}$$

定理 1 如果存在正定对角矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 使得如下条件成立

$$2\boldsymbol{PC} - (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{PA} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{PBD}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}) > \mathbf{0},$$

则系统(1)的平衡点是唯一的和全局渐近稳定的且与时滞无关.

证明 我们证明该定理分两步进行. 首先, 我们证明平衡点的唯一性; 然后, 证明其全局渐近稳定性.

第 1 步 我们采用反证法来证明平衡点的唯一性. 考虑(3)式的平衡态方程

$$\boldsymbol{Cy}^* - \boldsymbol{A}\phi(\boldsymbol{y}^*) - \boldsymbol{B}\phi(\boldsymbol{y}^*) = \mathbf{0}. \tag{8}$$

如果 $\phi(\boldsymbol{y}^*) = \mathbf{0}$, 则 $\boldsymbol{y}^* = \mathbf{0}$, 结论为真. 现让 $\phi(\boldsymbol{y}^*) \neq \mathbf{0}$. 用 $\mathbf{2}\phi^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}^*)\boldsymbol{P}$ 乘(8)式的两边, 得

$$2\phi^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}^*)\boldsymbol{PCy}^* - 2\phi^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}^*)\boldsymbol{PA}\phi(\boldsymbol{y}^*) - 2\phi^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}^*)\boldsymbol{PB}\phi(\boldsymbol{y}^*) = \mathbf{0}. \tag{9}$$

我们重写(9)为如下形式

$$\begin{aligned} &2\phi^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}^*)\boldsymbol{PCy}^* - \phi^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}^*)\boldsymbol{PA}\phi(\boldsymbol{y}^*) - \phi^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}^*)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\phi(\boldsymbol{y}^*) = \\ &\quad 2\phi^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}^*)\boldsymbol{PB}\phi(\boldsymbol{y}^*). \end{aligned} \tag{10}$$

根据引理 2, 我们可以写出如下的不等式

$$\begin{aligned} &\phi^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}(t))\boldsymbol{PCy}(t) = \sum_{i=1}^{n}\phi_i(y_i(t))p_ic_iy_i(t) \geqslant \sum_{i=1}^{n}p_ic_i\phi_i^2(y_i(t)) = \\ &\quad \phi^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}(t))\boldsymbol{PC}\phi(\boldsymbol{y}(t)), \end{aligned} \tag{11}$$

式中 $\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}\{p_i\}$, 其中 $p_i > 0 \ (i = 1, 2, \cdots, n)$.

利用(11)式, 结合(10)式和引理 1, 有

$$\begin{aligned} &2\phi^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}^*)\boldsymbol{PC}\phi(\boldsymbol{y}^*) - \phi^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}^*)\boldsymbol{PA}\phi(\boldsymbol{y}^*) - \phi^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}^*)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\phi(\boldsymbol{y}^*) \leqslant \\ &\quad 2\phi^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}^*)\boldsymbol{PB}\phi(\boldsymbol{y}^*) \leqslant \phi^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}^*)\boldsymbol{D}\phi(\boldsymbol{y}^*) + \phi^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}^*)\boldsymbol{PBD}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\phi(\boldsymbol{y}^*), \end{aligned}$$

式中, $\boldsymbol{D}$ 为正定对角矩阵.

于是我们可得出如下的不等式

$$\phi^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}^*)[2\boldsymbol{PC} - (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{PA} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{PBD}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})]\phi(\boldsymbol{y}^*) \leqslant 0. \tag{12}$$

又因为矩阵 $2\boldsymbol{PC} - (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{PA} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{PBD}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})$ 是正定的, 所以我们又有

$$\phi^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}^*)[2\boldsymbol{PC} - (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{PA} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{PBD}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})]\phi(\boldsymbol{y}^*) > 0 \quad (\forall \phi(\boldsymbol{y}^*) \neq 0). \tag{13}$$

显然, (13)式与(12)式矛盾, 这个矛盾就暗示着在平衡点有 $\phi(\boldsymbol{y}^*) = \mathbf{0}$, 即有 $\boldsymbol{y}^* = \mathbf{0}$. 由此, 我们得出, 对于(8)式, 系统(3)的原点是唯一的解, 因此, 系统(1)对于给定的 $\boldsymbol{u}$ 有唯一的平衡点 $\boldsymbol{x}^*$.

第 2 步 考虑 Liapunov 泛函

$$V(y(t)) = 2\sum_{i=1}^{n} p_i \int_0^{y_i(t)} \phi_i(s)\,\mathrm{d}s + \sum_{i=1}^{n} d_i \int_{t-\tau}^{t} \phi_i^2(y_i(\theta))\,\mathrm{d}\theta, \tag{14}$$

式中 $p_i > 0$, $d_i > 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$.

让我们定义一个函数 $G(y)$

$$G(y) = 2\sum_{i=1}^{n} p_i \int_0^{y_i} \phi_i(\theta)\,\mathrm{d}\theta. \tag{15}$$

由引理2 可知, 我们可以得

$$G(y) \geqslant \sum_{i=1}^{n} p_i \phi_i^2(y_i). \tag{16}$$

由于(7) 式和(15) 式, 它有 $G(\mathbf{0}) = 0$; 对所有 $y \neq \mathbf{0}$, 又有 $G(y) > 0$, 且当 $|y| \to +\infty$, $G(y) \to +\infty$. 由(16) 式可知, 易检验 $V(y(t))$ 是有界的, 即

$$G(y) \leqslant V(y(t)). \tag{17}$$

现沿着(3) 式的解来计算 V 的变化率, 得

$$\begin{aligned}
\dot{V}(y(t))|_{(3)式} = {} & 2\phi^{\mathrm{T}}(y(t))P\dot{y}(t) + \phi^{\mathrm{T}}(y(t))D\phi(y(t)) - \\
& \phi^{\mathrm{T}}(y(t-\tau))D\phi(y(t-\tau)) = \\
& -2\phi^{\mathrm{T}}(y(t))PCy(t) + 2\phi^{\mathrm{T}}(y(t))PA\phi(y(t)) + \\
& 2\phi^{\mathrm{T}}(y(t))PB\phi(y(t-\tau)) + \phi^{\mathrm{T}}(y(t))D\phi(y(t)) - \\
& \phi^{\mathrm{T}}(y(t-\tau))D\phi(y(t-\tau)) = \\
& -2\phi^{\mathrm{T}}(y(t))PCy(t) + \phi^{\mathrm{T}}(y(t))PA\phi(y(t)) + \\
& \phi^{\mathrm{T}}(y(t))A^{\mathrm{T}}P\phi(y(t)) + 2\phi^{\mathrm{T}}(y(t))PB\phi(y(t-\tau)) + \\
& \phi^{\mathrm{T}}(y(t))D\phi(y(t)) - \phi^{\mathrm{T}}(y(t-\tau))D\phi(y(t-\tau)).
\end{aligned}$$

根据引理1, 有

$$\begin{aligned}
2\phi^{\mathrm{T}}(y(t))PB\phi(y(t-\tau)) \leqslant {} & \phi^{\mathrm{T}}(y(t-\tau))D\phi(y(t-\tau)) + \\
& \phi^{\mathrm{T}}(y(t))PBD^{-1}B^{\mathrm{T}}P\phi(y(t)).
\end{aligned} \tag{18}$$

利用(11) 式和(18) 式, 我们得

$$\begin{aligned}
\dot{V}(y(t))|_{(3)式} \leqslant {} & -2\phi^{\mathrm{T}}(y(t))PC\phi(y(t)) + \phi^{\mathrm{T}}(y(t))PA\phi(y(t)) + \\
& \phi^{\mathrm{T}}(y(t))A^{\mathrm{T}}P\phi(y(t)) + \phi^{\mathrm{T}}(y(t))D\phi(y(t)) + \\
& \phi^{\mathrm{T}}(y(t))PBD^{-1}B^{\mathrm{T}}P\phi(y(t)) = \\
& -\phi^{\mathrm{T}}(y(t))[2PC - (D + PA + A^{\mathrm{T}}P + PBD^{-1}B^{\mathrm{T}}P)]\phi(y(t)) = \\
& -\phi^{\mathrm{T}}(y(t))H\phi(y(t)),
\end{aligned} \tag{19}$$

式中 $H = 2PC - (D + PA + A^{\mathrm{T}}P + PBD^{-1}B^{\mathrm{T}}P)$ 是正定的. 因此, 对任意的 $\phi(y(t)) \neq \mathbf{0}$ 有 $\dot{V}(y(t)) < 0$, 它也暗示着有 $V(y(t))$ 总是有界. 于是(3) 式的轨迹也总是有界. 由 LaSalle 不变定理可知, 该轨迹总会逼近集合 $M = \{y: \dot{V}(y(t)) = 0\}$, 准确地为集合 $M = \{\mathbf{0}\}$. 因此系统(3) 的原点是全局渐近稳定的, 同样系统(1) 的平衡点 x^* 也是全局渐近稳定的. 证毕.

对于系统(1), 如果 $c_i \equiv 1$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 且激活函数 $f_i(x)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 由分段线性函数 $f_i(x) = 0.5(|x + 1| - |x - 1|)$ 来描述, 则系统(1) 变为如下系统.

$$\dot{x}(t) = -x(t) + Af(x(t)) + Bf(x(t-\tau)) + u. \tag{20}$$

对于系统(20), 我们有如下推论:

推论 如果系统(20) 的激活函数由分段线性函数 $f_i(x) = 0.5(|x + 1| - |x - 1|)$ 来描述, 且存在正定对角矩阵 P 和 D 使得如下条件成立

$$2P - (D + PA + A^{\mathrm{T}}P + PBD^{-1}B^{\mathrm{T}}P) > 0,$$

则系统(20)的平衡点是唯一的和全局渐近稳定的且与时滞无关•

在此我们将给出几个例子来说明我们的结果. 为了与已有文献比较方便, 我们重述文献[2]、[4]和文献[9]至文献[11]的结论•

定理2[2] 如果ⅰ) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的非对角元素有非负的, ⅱ) 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 有非负元素, ⅲ) 矩阵 $-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$ 是行和优势矩阵, 则系统(20)有一个全局渐近稳定的平衡点•

定理3[4] 让

$$S_{ij}=\begin{cases}1-a_{ii}-|b_{ii}| & (i=j),\\ -(|a_{ij}|+|b_{ij}|) & (i\neq j),\end{cases}$$

且 $\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|\neq 0$ 对于每个 i• 如果 $\boldsymbol{S}=\{s_{ij}\}$ 是一个非奇异的 M_矩阵(即, $\boldsymbol{S}$ 的每个特征值的实部是正实数), 则系统(20)有一个全局渐近稳定的平衡点•

定理4[9] 如果存在正定对角矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{K}$, 使得如下条件成立•

ⅰ) $\boldsymbol{PA}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{K}$ 是负定•

ⅱ) $-2\boldsymbol{P}-\boldsymbol{K}+\boldsymbol{I}+\boldsymbol{PBB}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$ 是半负定•

则系统(20)的平衡点是唯一的且是全局渐近稳定的•

定理5[10] 如果存在一个正实数 $\beta>0$, 使得如下条件成立•

ⅰ) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\beta\boldsymbol{I}$ 是负定•

ⅱ) $\|\boldsymbol{B}\|_2\leqslant\sqrt{1+\beta}$•

则系统(20)的平衡点是唯一的且是全局渐近稳定的•

定理6[11] 如果存在一个正实数 $\beta>0$, 使得如下条件成立•

ⅰ) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\beta\boldsymbol{I}$ 是负定;

ⅱ) $\|\boldsymbol{B}\|_2\leqslant\sqrt{1+\beta+\alpha}$, 式中 $\|\boldsymbol{B}\|_2\leqslant\sqrt{\lambda_{\max}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})}$, $\alpha=\lambda_{\min}[-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\beta\boldsymbol{I})]>0$,

则系统(20)的平衡点是唯一的且是全局渐近稳定的•

例1 取

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0.6 & -1.1 & 1\\ 1.1 & 0.6 & -1.2\\ -1 & 1.2 & 0.5\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0.1 & 0.1 & 0.01\\ 0.05 & 0.2 & 0.1\\ 0.1 & 0.02 & 0.3\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}•$$

根据推论, 我们可得 $2\boldsymbol{P}-(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{PA}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{PBD}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})$ 是正定的, 即:

$$2\boldsymbol{P}-(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{PA}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{PBB}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0.5196 & -0.104 & -0.1\\ -0.104 & 0.39 & -0.176\\ -0.1 & -0.176 & 0.4784\end{pmatrix},$$

系统(20)的平衡点 $\boldsymbol{x}^*$ 是全局渐近稳定的•

矩阵 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$ 为

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=\begin{pmatrix}1.2 & 0 & 0\\ 0 & 1.2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}•$$

显然地, 矩阵 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$ 不是负定的• 于是, 文献[9]至[11]的条件不成立•

最近文献[5]、[7]和[8]分别得出了系统(20)的稳定性条件

$$\sum_{j=1}^{n}(|a_{ij}|+|b_{ij}|+|a_{ji}|+|b_{ji}|)<2\qquad(i=1,2,\cdots,n),$$

$$\sum_{j=1}^{n}(|a_{ij}|^{2\eta_j^*}+|b_{ij}|^{2\eta_j}+|a_{ji}|^{2\xi_j^*}+|b_{ji}|^{2\xi_j})<2\qquad(i=1,2,\cdots,n),$$

式中 η_j^*、ξ_j^*、η_j、$\xi_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是满足 $\eta_j^*+\xi_j^*=1,\ \eta_j+\xi_j=1$ 任意的实常数•

$$\sum_{j=1}^{n}\left(|a_{ij}|^{2\eta_{ij}^*}+|b_{ij}|^{2\eta_{ij}}+\frac{w_j}{w_i}(|a_{ji}|^{2\xi_{ji}^*}+|b_{ji}|^{2\xi_{ji}})\right)<2\qquad(i=1,2,\cdots,n),$$

式中 $w_i>0$，η_{ij}^*、ξ_{ij}^*、η_{ij}、$\xi_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 是满足 $\eta_{ij}^*+\xi_{ij}^*=1,\ \eta_{ij}+\xi_{ij}=1$ 任意的实常数•

对于例题1，我们也可以看出

$$\sum_{j=1}^{3}(|a_{ij}|+|b_{ij}|+|a_{ji}|+|b_{ji}|)>2\qquad(i=1,2,3),$$

因此，文献[5]、[7]和[8]的条件此时不能应用• 然而，我们的结果是满足的•

例2　考虑如下矩阵:

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\mathrm T}=\begin{pmatrix}-3&0\\0&-3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^{\mathrm T}=\begin{pmatrix}2.5&0\\0&2.5\end{pmatrix}•$$

取 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{D}=\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}$，得到矩阵 $2\boldsymbol{PC}-(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{PA}+\boldsymbol{A}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{PBD}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm T}\boldsymbol{P})$ 为

$$\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm T}+\boldsymbol{BB}^{\mathrm T})=\begin{pmatrix}0.75&0\\0&0.75\end{pmatrix}>0,$$

根据定理1，我们的定理中的条件是满足的• 因此系统(1)有一个唯一的且全局渐近稳定的平衡点•

如果用文献[10]中的方法进行讨论，很难作出稳定性判断，我们试了几个 β 参数，都不能使文献[10]中的定理条件满足，比如 $\beta=5$，得到矩阵 $-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm T}+\beta\boldsymbol{I})$ 为

$$-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm T}+\beta\boldsymbol{I})=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

$\|\boldsymbol{B}\|_2=2.5$• 显然，$\|\boldsymbol{B}\|_2=2.5>\sqrt{1+\beta}$• 因此，我们的结果扩展和改善了文献[10]的结果•

例3　考虑如下的矩阵:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-c&-1\\0&-d\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}^{\mathrm T}=\begin{pmatrix}-c&0\\-1&-d\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^{\mathrm T}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt2&\sqrt2\\\sqrt2&\sqrt2\end{pmatrix}•$$

取 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{D}=\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}$，得到矩阵 $2\boldsymbol{PC}-(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{PA}+\boldsymbol{A}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{PBD}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm T}\boldsymbol{P})$ 为

$$\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm T}+\boldsymbol{BB}^{\mathrm T})=\begin{pmatrix}2c&0\\0&2d\end{pmatrix},$$

式中 c,d 是两个正数• 我们可以检验 $\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm T}+\boldsymbol{BB}^{\mathrm T})$ 是正定的对所有的 $c>0,d>0$•

在文献[4]中，矩阵 $\boldsymbol{S}$ 为

$$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}1+c-\sqrt2/2&-(1+\sqrt2/2)\\-\sqrt2/2&1+d-\sqrt2/2\end{pmatrix},$$

对满足 $2cd+(2-\sqrt2)(c+d)<3\sqrt2-2$ 的 c 和 d，$\boldsymbol{S}$ 不是一个非奇异的 M_矩阵•

我们也注意到，如果用文献[9]至[11]中的方法进行讨论，很难作出稳定性判断，例如

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm T}+\boldsymbol{I})=\begin{pmatrix}1-2c&-1\\-1&1-2d\end{pmatrix}•$$

显然, 对满足 $4cd-2c-2d\leqslant 0$ 的 $c>0$ 和 $d>0$, 矩阵$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{I})$ 不是负定的• 在另一方面, 我们又有

$$-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix} c-\sqrt{2}/2 & 1-\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & d-\sqrt{2}/2 \end{pmatrix},$$

对所有的 $c>1, 0<d<\sqrt{2}$, 如上矩阵不是一个行和优势矩阵(即, 在矩阵的每一行中, 非对角线上的元素的绝对值之和要小于相应的对角线上元素的值), 而且矩阵 $\boldsymbol{S}$ 既不是行和优势矩阵也不是一个非奇的M_矩阵• 定义一个集合 B_{cd}:

$$B_{cd}=\{(c,d)\mid c>1, 0<d<\sqrt{2}, 2cd+(2-\sqrt{2})(c+d)<3\sqrt{2}-2\}•$$

易知 $B_{cd}\neq\varnothing$ 且当$(c,d)\in B_{cd}$, 文献[2] 和[4] 的结果不成立• 因此, 我们的结果扩展和改善了文献[2]、[4]、[9] 至[11] 的结果• 进行计算机仿真, 系统(20) 的反馈矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和$\boldsymbol{B}$ 采用例题 3 中给出的, 取 $c=1.1$ 和 $d=0.5$, 输入为 $\boldsymbol{u}=[0.3\quad 0.5]^{\mathrm{T}}$, 时滞 $\tau=0.2$ 且初始条件为 $\boldsymbol{x}_0=[0.2\quad 0.3]^{\mathrm{T}}$• 此时系统(20) 有唯一的且全局渐近稳定的平衡点 $\boldsymbol{x}^*=(0.069\,7\quad 0.692\,8)^{\mathrm{T}}$•

3 结　　论

我们通过 Liapunov 泛函方法, 结合矩阵不等式技巧, 得到时滞细胞神经网络的平衡点的唯一性和全局渐近稳定性的新的充分判据• 我们的条件提供了一些参数来适当地弥补了反馈矩阵和时滞反馈矩阵之间所需要的平衡关系• 这些判据可以容易被使用来设计和检验全局稳定的网络• 而且, 本文所得的稳定性条件不会受到时滞参数的影响, 比已有文献具有更少的限制• 文中所举例子也表明了我们提出的结果的有效性•

[参　考　文　献]

[1] Civalleri P P, Gilli L M, Pabdolfi L. On tability of cellular neural networks with delay[J]. IEEE Trans Circuits Syst I, 1993, **40**(3): 157—165.

[2] Roska T, Wu C W, Chua L O. Stability of cellular neural networks with dominant nonlinear and delay_type template[J]. IEEE Trans Circuits Syst I, 1993, **40**(4): 270—272.

[3] Arik S, Tavsanoglu V. On the global asymptotic stability of delayed cellular neural networks[J]. IEEE Trans Circuits Syst I, 2000, **47**(4): 571—574.

[4] Arik S, Tavsanoglu V. Equilibrium analysis of delayed CNNs[J]. IEEE Trans Circuits Syst I, 1998, **45**(2): 168—171.

[5] CAO Jin_de, ZHOU Dong_ming. Stability analysis of delayed cellular neural networks[J]. Neural Networks, 1998, **11**(9): 1601—1605.

[6] Feng C H, Plamondon R. On the stability analysis of delayed neural networks systems[J]. Neural Networks, 2001, **14**(9): 1181—1188.

[7] CAO Jin_de. On stability of delayed cellular neural networks[J]. Physics Letters A, 1999, **261**(5_6): 303—308.

[8] CAO Jin_de. A set of stability criteria for delayed cellular neural networks[J]. IEEE Trans Circuits Syst I, 2001, **48**(4): 494—498.

[9] Arik S. An improved global stability result for delayed cellular neural networks[J]. IEEE Trans Circuits Systems I, 2002, **49**(8): 1211—1214.

[10] Liao T L, Wang F C. Global stability for cellular neural networks with time delay[J]. IEEE Trans Neural Networks, 2000, **11**(6): 1481—1484.

[11] CAO Jin_de. Global stability conditions for delayed CNNs[J]. IEEE Trans Circuits Syst I, 2001, **48** (11): 1330—1333.

[12] Zhang Y, Yu J B, Wu Y. Global stability analysis on a class of cellular neural networks[J]. Science in China (Series E), 2001, **44**(1): 1—11.

[13] CAO Jin_de, Wang L. Exponential stability and periodic oscillatory solution in BAM networks with delays[J]. IEEE Trans Neural Networks, 2002, **13**(2): 457—463.

[14] CAO Jin_de. Exponential stability and periodic solutions of delayed cellular neural networks[J]. Science in China (series E), 2000, **43**(3): 328—336.

[15] Huang H, CAO Jin_de, Wang J. Global exponential stability and periodic solutions of recurrent neural networks with delays[J]. Physics Letters A, 2002, **298**(5_6): 393—404.

[16] CAO Jin_de. New results concerning exponential stability and periodic solutions of delayed cellular neural networks[J]. Physics Letters A, 2003, **307**(2_3): 136—147.

[17] CAO Jin_de, Wang J. Global asymptotic stability of a general class of recurrent neural networks with time_varying delays[J]. IEEE Trans Circuits Syst I, 2003, **50**(1): 34—44.

Global Asymptotic Stability Conditions of Delayed Neural Networks

ZHOU Dong_ming[1,3], CAO Jin_de[2], ZHANG Li_ming[1]

(1. Department of Electronic Engineering, Fudan University, Shanghai 200433, P.R. China;

2. Department of Applied Mathematics, Southeast University, Nanjing 210096, P.R. China;

3. Department of Electronic Engineering, Yunnan University, Kunming 650091, P. R. China)

Abstract: Utilizing the Liapunov functional method and combining the inequality of matrices technique to analyze the existence of a unique equilibrium point and the global asymptotic stability for delayed cellular neural networks (DCNNs), a new sufficient criterion ensuring the global stability of DCNNs is obtained. Our criteria provide some parameters to appropriately compensate for the tradeoff between the matrix definite condition on feedback matrix and delayed feedback matrix. The criteria can easily be used to design and verify globally stable networks. Furthermore, the condition presented here is independent of the delay parameter and is less restrictive than that given in the references.

Key words: cellular neural network; global stability; inequality of matrix; delay