

文章编号: 1000_0887(2005) 03_0349_07

有限元方法形成三维 Michell 桁架*

周克民^{1,2}, 李俊峰¹

(1. 清华大学 工程力学系, 北京 100084;
2. 华侨大学 土木工程系, 福建 泉州 362021)

(顾元宪推荐)

摘要: 提出了形成三维 Michell 桁架的有限元方法。采用正交异性纤维增强复合材料模型模拟 Michell 桁架。纤维在节点处的密度和方向作为基本设计变量。根据有限元分析得到节点位置的应力和应变。采用迭代方法, 将纤维方向调整到主应力方向; 根据纤维方向的应变改变纤维密度。仅需少量迭代即可得到满足 Michell 准则的应变场和类桁架连续体。最后根据节点处的纤维方向用连续线表示出 Michell 桁架。几个算例表明了算法的有效性和计算效率。

关键词: 结构最优化; 有限元方法; 拓扑优化; Michell 桁架; 应力约束
中图分类号: O343. 8; TU323 **文献标识码:** A

引 言

Michell^[1]的单工况应力约束下结构拓扑优化理论, 在拓扑优化领域占有重要的地位。据此建立的优化结构称为 Michell 桁架, 又称最小重量桁架。后来的研究使该理论得到进一步的发展^[2~8], 并证明 Michell 桁架也是柔度约束下的最小重量桁架。人们用解析方法得出了一些工况下 Michell 桁架的形式^[8~10]。Michell 桁架具有严格的理论基础, 通常可作为一个理论上限来检验各种由数值算法得到的拓扑优化结果。但是, 用解析方法推导 Michell 桁架一直是一件极为困难的工作。尤其是三维 Michell 桁架, 由于具有一些特殊性质^[8], 相关研究工作更少。目前尚无建立 Michell 桁架的一般性解析方法, 所以, 研究数值解法具有重要意义。

为了优化结构拓扑, 人们提出了各种数值方法。基结构方法用于离散结构的拓扑优化, 一般有计算量大, 奇异性^[11, 12]等问题。Bendsøe 和 Kikuchi 提出的均匀化方法^[13]采用均匀化理论计算每个设计单元的材料性质, 将拓扑优化问题转化为材料分布问题。在隋允康提出的独立连续拓扑变量及映射变换方法^[14], Xie 和 Steven 提出的渐进结构优化方法^[15]中, 根据各单元应力水平决定其取舍, 从而使结构拓扑逐步演化。为了得到清晰的(0_1)拓扑设计, 广泛采用抑制中间密度的方法。优化结果一般受单元划分, 罚函数选取等因素影响。拓扑优化结果为带孔洞的板或实体。研究表明, 当体积比趋于零时, 这样的带孔板趋于最小重量桁架。所以

* 收稿日期: 2004_06_20; 修订日期: 2004_11_20

基金项目: 教育部高等学校优秀青年教师教学科研奖励基金资助项目

作者简介: 周克民(1962—), 男, 河北新河人, 教授, 博士(联系人, Tel: + 86_595_22691468; Fax: + 86_595_22692097; E_mail: zhoukemin@tsinghua.org.cn)。

Michell 桁架对验证带孔洞板的数值优化结果也起着重要作用。在自由材料优化^[16-19]问题中,使用一般各向异性材料模型,弹性张量 E_{ijkl} 为设计变量。目前优化结果难以形象化描述,也不适于在工程中直接应用。关于拓扑优化方法的一般研究情况可参见综述文献^[20,21]。

本文以文献[22]为基础,采用正交异性材料模型,用有限元方法建立了三维 Michell 桁架。用连续线段表示 Michell 桁架中的分布杆件。本文还讨论了该材料模型描述 Michell 桁架的合理性,并在算法上对文献[22]作了改进。

1 正交异性材料本构关系

1.1 材料主轴方向的弹性矩阵

Michell 桁架一般是各向异性连续结构。为了用有限元描述该结构,本文采用纤维增强正交异性复合材料模型。在 1.3 节中将要说明,该正交异性复合材料模型同样可以描述 Michell 桁架中杆件非正交的情况。在基材料中嵌入 3 组正交纤维,这些连续分布的正交纤维将形成连续的或离散的 Michell 桁架。3 组正交纤维的方向记作 l_i , 各分量为 $l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} (i = 1, 2, 3)$ 。3 组纤维的应力、应变分别记作 $\sigma_i, \varepsilon_i (i = 1, 2, 3)$ 。以这 3 组纤维方向为法线的平面为材料主平面。纤维密度记作 $t_i (i = 1, 2, 3)$ 。也就是,在材料主平面 i 上取微元面 dA_i , 其中含有纤维的面积为 $t_i dA_i$ 。假设基材料在主平面拉压刚度为零,也就是基材料在主平面不承担法向应力。作用在微元面 dA_i 上的内力为 $\sigma_i t_i dA$ 。作用在微元面 dA_i 上的平均应力(以下简称应力)为

$$\sigma_i = t_i \sigma_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1)$$

假设 3 组纤维的弹性模量都是 E , 纤维的应力应变关系可以表示为:

$$\sigma_i = E \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2)$$

根据 Michell 桁架的特点,相邻的平行杆之间没有相互作用,可以假设横向变形系数为零。结合式(1)、(2),复合材料在纤维方向的应力应变关系可以写作

$$\sigma_i = E t_i \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3)$$

在 Michell 桁架中,内力沿杆件方向。所以,在材料主平面上没有剪应力和剪应变,剪切模量不起作用。但在迭代过程中,在材料主平面上的剪应力和剪应变不为零,所以剪切模量不能为零。否则,刚度矩阵会发生奇异,平衡将不稳定,甚至不可能。从迭代收敛过程分析,剪切弹性模量过小也会导致迭代收敛过慢;剪切弹性模量过大又会使迭代过程出现震荡。本文假设剪应力、应变关系为

$$\begin{bmatrix} \tau_{23} & \tau_{31} & \tau_{12} \end{bmatrix}^T = 0.25E \cdot \text{diag} \left[t_2 + t_3 \quad t_3 + t_1 \quad t_1 + t_2 \right] \begin{bmatrix} \gamma_{23} & \gamma_{31} & \gamma_{12} \end{bmatrix}^T, \quad (4)$$

这里 $\tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31}, \gamma_{12}$ 分别是在主平面上的剪应力和剪应变; diag 表示对角矩阵。算例表明,如此选取剪切模量,在优化结果中,在材料主平面上的剪应力小于最大正应力的 10^{-7} 倍,可以忽略。

结合式(3)、(4),材料的本构关系可以写作

$$\bar{\sigma} = \bar{D} \bar{\varepsilon} \quad (5)$$

这里 $\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}$ 是材料主轴方向的应力、应变列阵。 \bar{D} 是材料主轴方向的弹性矩阵

$$\bar{D}(t_1, t_2, t_3) = E \cdot \text{diag} \left(t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad (t_2 + t_3)/4 \quad (t_3 + t_1)/4 \quad (t_1 + t_2)/4 \right) \quad (6)$$

1.2 整体坐标系下的弹性矩阵

在 $\alpha y z$ 整体坐标系下,应力、应变列阵记作 σ, ε 。在整体坐标系下的本构关系可以写作

$$\sigma = D\varepsilon, \quad (7)$$

D 是整体坐标系下的弹性矩阵

$$D(t_1, t_2, t_3; l_1, l_2, l_3) = T_{\varepsilon}^T(l_1, l_2, l_3) \cdot \bar{D}(t_1, t_2, t_3) \cdot T_{\varepsilon}(l_1, l_2, l_3) =$$

$$E \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 & 0 & t_{31}/2 & t_{12}/2 \\ & t_{22} & 0 & t_{23}/2 & 0 & t_{12}/2 \\ & & t_{33} & t_{23}/2 & t_{31}/2 & 0 \\ & & & (t_0 - t_{11})/4 & t_{12}/2 & t_{31}/4 \\ \text{对} & & & & (t_0 - t_{22})/4 & t_{23}/4 \\ \text{称} & & & & & (t_0 - t_{33})/4 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

其中 T_{ε} 是应变坐标转换矩阵, 其它参数如下:

$$t_0 = \sum_{k=1}^3 t_k, \quad t_{ij} = \sum_{k=1}^3 l_{ik} l_{jk} t_k \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (9)$$

1.3 弹性矩阵的进一步分析

上述材料模型是正交异性, 可以描述 Michell 桁架杆件中的正交杆件。下面说明正交异性材料模型也可以描述 Michell 桁架中非正交杆件的材料性质。

根据 Michell 桁架性质可知, 1) 如果两个杆件不垂直, 在这两个杆件所在的平面内任意方向都可以有杆件, 且这些杆件都达到允许应变。该平面内任意方向都没有剪应变。2) 如果过一点有 3 个杆件不垂直, 也不共面, 该点任意方向都可以有杆件, 且这些杆件都达到允许应变, 该点任意平面都没有剪应变。下面讨论后一种情况, 前一种情况的证明方法类似。

根据上述讨论, 后一种情况下, 任意坐标系下的应变列阵为

$$\varepsilon = \varepsilon_p [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \quad (10)$$

ε_p 为允许应变, 取 $\varepsilon_p = \sigma_p / E$, σ_p 为允许应力。假设某点有 n 个杆件, 杆件密度和方向分别为 l_i, \hat{l}_i ($i = 1, 2, \dots, n$)。材料在整体坐标系下的弹性矩阵为:

$$D = \sum_{i=1}^n T_{\varepsilon}^T(\hat{l}_i, 0, 0) \cdot \bar{D}(l_i, 0, 0) \cdot T(\hat{l}_i, 0, 0). \quad (11)$$

一般是非正交异性的。在整体坐标系下的应力列阵为

$$\sigma = D\varepsilon =$$

$$E\varepsilon_p \left[\sum_{i=1}^n l_{i1}^2 l_i \quad \sum_{i=1}^n l_{i2}^2 l_i \quad \sum_{i=1}^n l_{i3}^2 l_i \quad \sum_{i=1}^n l_{i2} l_{i3} l_i \quad \sum_{i=1}^n l_{i3} l_{i1} l_i \quad \sum_{i=1}^n l_{i1} l_{i2} l_i \right]^T. \quad (12)$$

设主应力的大小为 σ_i^* ($i = 1, 2, 3$)。在应力主方向的应力列阵可以写作

$$\bar{\sigma} = [\sigma_1^* \quad \sigma_2^* \quad \sigma_3^* \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T. \quad (13)$$

如果采用式(6)的正交异性弹性矩阵, 纤维方向取为应力主方向, 纤维密度取为

$$t_i = \sigma_i^* / E\varepsilon_p \quad (i = 1, 2, 3), \quad (14)$$

在式(10)给出的应变状态下, 应力列阵就是式(13)。所以正交异性材料模型可以描述 Michell 桁架中杆件非正交时的材料性质。

2 有限元分析

纤维在节点处的密度和方向作为设计变量, 单元内任一点的弹性矩阵由该单元各节点处

的弹性矩阵利用形函数插值得到。

2.1 迭代算法

- 1) 用有限元划分设计域。
- 2) 初始化设计变量。设 3 组纤维密度均为 1, 分别沿 3 个坐标轴方向。
- 3) 进行有限元分析。节点处的应变由该节点相邻单元在该节点处的应变平均值计算。
- 4) 将纤维方向调整到主应力方向。按照类似应力比方法改变纤维密度,

$$t_{in}^{k+1} = \begin{cases} t_{in}^k \xi_n^k / \xi_p, & t_{in}^k \xi_n^k / \xi_p > t_{th}^k, \\ t_{th}^k, & t_{in}^k \xi_n^k / \xi_p \leq t_{th}^k, \end{cases} \quad t_{th}^k = R \times \max_{\substack{i=1,2,3 \\ n=1,2,\dots,N}} \left\{ t_{in}^k \xi_n^k / \xi_p \right\} \quad (i = 1, 2, 3; n = 1, 2, \dots, N), \quad (15)$$

这里上标 $k, k+1$ 表示迭代数, 下标 i 为材料主轴指标; n 为节点号; t_{th} 是为了避免刚度矩阵奇异而引入的最小密度值, 本文取纤维在所有节点处各方向的密度最大值的 $R = 10^{-7}$ 倍。

重复 3)、4) 步, 直到两次迭代的体积相对误差小于一定的相对误差容许值则认为已经收敛, 迭代结束。本文取迭代的相对误差容许值为 0.5%。

收敛后, 纤维方向与主应力方向趋于一致。在材料主平面的剪应力和剪应变为零。沿纤维方向的应变趋于允许应变。否则, 纤维密度趋于最小密度值(几乎没有材料), 应力(而不是应变)趋于零。这些特征与 Michell 桁架一致。因此, Michell 准则被满足了。本文研究的是单工况, 拉伸和压缩允许应力相等的拓扑优化问题, 所以不存在奇异性问题^[21]。

2.2 形成 Michell 桁架

选择适当的起始点, 如集中力作用点, 沿起点的某一纤维方向作直线, 与单元的边界交点为线段终点。由此得到单元内的一条线段。为提高计算精度, 直线方向采用一次修正。以该线段的终点为下一线段的起点确定下一线段。如此反复, 形成一条连续的折线, 直到达到设计域边界。单元边界上任一点的纤维方向由该点所在单元面 4 个节点处的纤维方向加权平均计算。

3 数值算例

所有算例采用 8 节点立方体等参元。弹性模量为 $E = 210 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ 。允许应力为 $\sigma_p = 160 \times 10^6 \text{ N/m}^2$, 长度单位为 m。

例 1 图 1 是长方体设计域, 下表面所有节点在水平方向固定, 上表面内中点受到扭矩作用。实际计算时, 在最上层中间单元上表面的 4 个节点上作用 4 个集中力构成扭矩。使用 $15 \times 15 \times 7$ 正方体单元。图 2 给出了 6 次迭代后得到的拓扑优化结构。图 3 是由解析方法得到的准确解答。

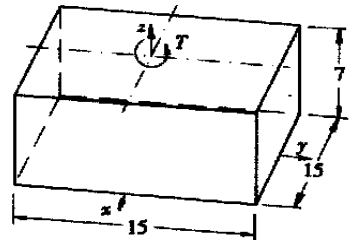


图 1 例 1 设计域及荷载

例 2 图 4 是正方体设计域, 上表面中心受到一个竖直向上集中力作用, 下表面 4 个角点受到可动铰支座支撑。图 5 给出了 6 次迭代后的优化框架。

例 3 图 6 也是正方体设计域, 上表面对称地受到 4 个竖直向上集中力作用, 下表面 4 个角点受到固定铰支座支撑。图 7 给出了 7 次迭代后的优化框架。图 8(a) 给出了理想化后的结构。许多文献的拓扑优化结果对应的理想化后的拓扑结构如图 8(b) 所示。容易验证, 这两个

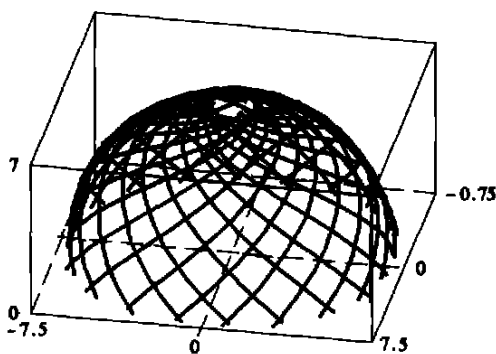


图 2 例 1 优化结构

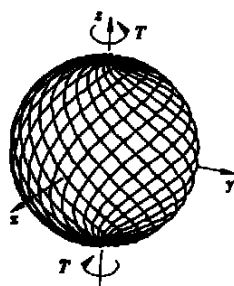


图 3 例 1 Michell 桁架

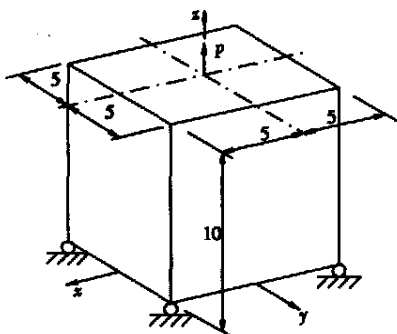


图 4 例 2 设计域, 支撑条件及荷载

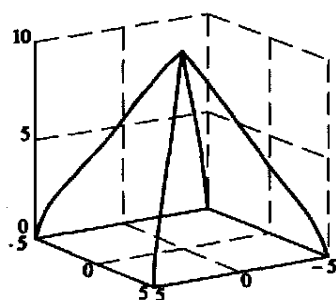


图 5 例 2 优化结构

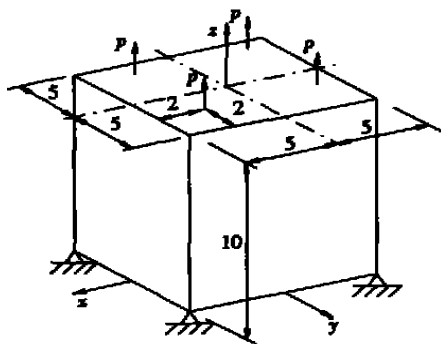


图 6 例 3 设计域, 支撑条件及荷载

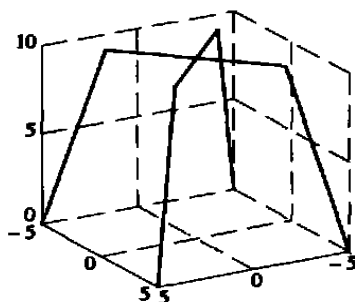
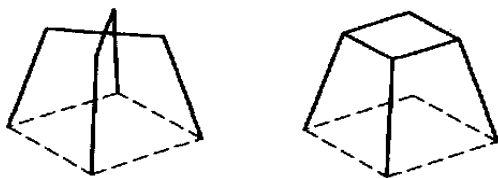


图 7 例 3 优化结构

结构的体积是相同的。实际上, Michell 桁架不是唯一的^[23]。虽然图 8(a) 结构是不稳定的, 但都是 Michell 桁架。

在最后两个算例中, 由于 x, y 坐标面为对称面, 这里仅计算了四分之一。使用了 $10 \times 10 \times 20$ 正方体单元。



(a) (b)

图 8 Michell 桁架

4 结 语

本文提出了用有限元构造三维 Michell 桁架的方法,包括连续的和离散的 Michell 桁架。优化结果以致密的连续折线表示。作为自由材料优化设计问题,本文采用后处理技术给出了更为直观的表述方式。相对其它方法,使用较少的单元就可以得到 Michell 桁架中更细部的结构。致谢 感谢华侨大学科研基金资助。

[参 考 文 献]

- [1] Michell A G M. The limits of economy of material in frame structure[J]. Philosophical Magazine, 1904, 8(6): 589—597.
- [2] Prager W, Rozvany G I N. Optimization of structural geometry[A]. In: Bednarek A R, Cesari L, Eds. Dynamical Systems [C]. New York: Academic Press, 1977, 265—293.
- [3] Rozvany G I N. Structural Design via Optimality Criteria The Prager Approach to Structural Optimization [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1989, 353—368.
- [4] Rozvany G I N. Some shortcomings in Michell's truss theory[J]. Structural Optimization, 1997, 13(2/3): 203—204.
- [5] Rozvany G I N. Partial relaxation of the orthogonality requirement for classical Michell trusses[J]. Structural Optimization, 1997, 13(4): 271—274.
- [6] Rozvany G I N. Generalized Michell structures_exact least_weight truss layouts for combined stress and displacement constraints: Part I — General theory for plane trusses[J]. Structural Optimization, 1995, 9(3): 178—188.
- [7] Rozvany G I N. Generalized Michell structures_exact least_weight truss layouts for combined stress and displacement constraints: Part II — analytical solutions within a two_bar topology[J]. Structural Optimization, 1995, 9(3): 214—219.
- [8] Hemp W S. Optimal Structure[M]. Oxford: Clarendon Press, 1973, 70—101.
- [9] Lewinski T, Zhou M, Rozvany G I N. Extended exact solutions for least_weight truss layouts—Paper I: cantilever with a horizontal axis of symmetry[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 1994, 36(5): 375—398.
- [10] Lewinski T, Zhou M, Rozvany G I N. Extended exact solutions for least_weight truss layouts—Paper II: unsymmetric cantilevers[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 1994, 36(5): 399—419.
- [11] CHENG Geng_dong, ZHENG Jiang. Study on topology optimization with stress constraints[J]. Engineering Optimization, 1992, 20(2): 129—148.
- [12] Rozvany G I N, Bendsoe M P, Kirsch U. Layout Optimization of Structures[J]. Applied Mechanics Reviews, 1995, 48(2): 41—119.
- [13] Bendsoe M P, Kikuchi N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1988, 71(2): 197—224.
- [14] SUI Yun_kang, YANG De_qing. A new method for structural topological optimization based on the concept of independent continuous variable and smooth model [J]. Acta Mechanica Sinica, 1998, 18(2): 179—185.
- [15] Xie Y M, Steven G P. A simple evolutionary procedure for structural optimization[J]. Computers and Structures, 1993, 49(5): 885—896.
- [16] Guedes J M, Taylor J E. On the prediction of material properties and topology for optimal continuum

- structures[J]. *Structural Optimization*, 1997, **14**(3): 193—199.
- [17] Taylor J E. An energy model for optimal design of linear continuum structures[J]. *Structural Optimization*, 1998, **16**(2/3): 116—127.
- [18] Rodrigues H, Soto C, Taylor J E. A design model to predict optimal two-material composite structure[J]. *Structural Optimization*, 1999, **17**(2): 186—198.
- [19] Hömlein H R E M, Kocvara M, Werner R. Material optimization: bridging the gap between conceptual and preliminary design[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2001, **5**(8): 541—554.
- [20] Eschenauer H A, Olhoff N. Topology optimization of continuum structures: A review[J]. *Applied Mechanics Reviews*, 2001, **54**(4): 331—389.
- [21] Rozvany G I N, Bendsoe M P, Kirsch U. Layout Optimization of structures[J]. *Applied Mechanics Reviews*, 1995, **48**(2): 41—119.
- [22] 周克民. 利用有限元构造 Michell 桁架的一种方法[J]. *力学学报*, 2002, **34**(6): 935—940.
- [23] Cox H L. *The Design of Structures of Least Weight*[M]. Oxford: Pergamon Press, 1965, 80—114.

Forming Michell Truss in Three Dimensions by Finite Element Method

ZHOU Ke_min^{1,2}, LI Jun_feng¹

(1. Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University,
Beijing 100084, P. R. China;

2. Department of Civil Engineering, Huaqiao University,
Quanzhou, Fujian 362021, P. R. China)

Abstract: The finite element method to form Michell truss in three dimensions is presented. The orthotropic composite with fiber reinforcement is employed as the material model to simulate Michell truss. The orientation and densities of fibers at nodes are taken as basic design variables. The stresses and strains at nodes are calculated by finite element method. An iteration scheme is suggested to adjust the orientations of fibers to be along the orientations of principal stresses, and the densities of fibers according to the strains in the orientations of fibers. The strain field satisfying Michell criteria and truss-like continuum are achieved after several iterations. Lastly, the Michell truss is showed by continuous lines, which are formed according to the orientations of fibers at nodes. Several examples are used to demonstrate the efficiency of the presented approach.

Key words: structural optimization; finite element method; topology optimization; Michell truss; stress constraint