应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2005) 03_0356_07

Hamilton 体系辛半解析法及在非均匀电磁波导中的应用*

孙 雁, 谢 军

(上海交通大学 工程力学系, 上海 200030)

(钟万勰推荐)

摘要: 力学中的 Hamilton 体系需用对偶变量来描述, 而电磁场正好有电场和磁场这一对对偶变量。尝试将力学中的 Hamilton 体系理论应用于电磁波导的分析, 以横向电场和磁场作为对偶变量, 将电磁波导的基本方程导向辛几何的形式。基于 Hamilton 变分原理, 导出横向离散的半解析系统方程, 保持体系的辛结构。以非均匀波导为例, 求解了方程的辛本征值问题, 计算结果与解析解相当吻合。

关 键 词: Hamilton; 辛几何; 半解析; 非均匀电磁波导
中图分类号: O35; O241 文献标识码: A

引 言

电磁导波研究电磁波沿传输系统的传播问题。各向同性材料的波导问题, 总可以将电磁波分为 TE 波和 TM 波来分析。但在微波工程的许多实际应用中, 波导被部分填充或被非均匀的电介质填充。这时, 不可能存在纯净的 TE 波或 TM 波, 电场和磁场这两类变量同时存在, 传播模式自然成为混合模式[1~3]。

力学中的 Hamilton 体系采用两个对偶的混合变量来描述系统, 是数学上并行于拉格朗日体系的另一种描述方式。解决非均匀或各向异性材料的波导问题, 势必需要电场和磁场这两个对偶变量, 这正和哈密顿体系相吻合。将力学中的 Hamilton 体系理论应用于电磁波导的研究, 这对电磁波导的分析无疑是有益的。

1 Maxwell 方程

考虑波导被部分填充或被非均匀填充的情况。这时场满足无源 Maxwell 方程组。将波导的长度方向取为 z 坐标, 其横向是 x, y 的直角坐标。此时方程可以表示为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=0,\quad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0, \tag{1a, b}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=-\mu\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t},\quad \nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}, \tag{2a, b}$$

* 收稿日期: 2003_10_14; 修订日期: 2004_11_12
基金项目: 国家自然科学基金(重点)资助项目(10132010); 国家自然科学基金资助项目(10102011)
作者简介: 孙雁(1965—), 女, 上海人, 副教授, 博士(Tel: +86_21_62933081; Fax: +86_21_62933081; E_mail: sunyan@sjtu.edu.cn)。

其中电场强度与磁场强度向量分别为 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$，电位移强度与磁位移强度向量为 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{B}$。它们之间有本构关系

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E},\quad \boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}, \tag{3a, b}$$

其中 ε、μ 分别是媒质的介电常数和磁导率。

2　频域 Maxwell 方程及其 Hamilton 变分原理

Maxwell 方程是在时域列式的。化成频域列式时，电场与磁场可以表示为

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{h}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t},\quad \boldsymbol{E} = \mathrm{i}\boldsymbol{e}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{e}(x, y, z, \omega)$、$\boldsymbol{h}(x, y, z, \omega)$ 待求，他们都是实型函数；ω 是角频率。频域 Maxwell 方程为

$$\omega\mu\boldsymbol{h} = \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{e},\quad \omega\varepsilon\boldsymbol{e} = \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{h}, \tag{5a, b}$$

而

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} & 0 & -\dfrac{\partial}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

是算子矩阵。设有有限域 V（谐振腔），其边界为 S，理想导体的边界条件是

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}_x l + \boldsymbol{i}_y m + \boldsymbol{i}_z n,\qquad \text{在 } S \text{ 上}, \tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{i}_x$、$\boldsymbol{i}_y$、$\boldsymbol{i}_z$ 是沿坐标轴的单位向量。当域内有不同的介质时，可将介电常数当作坐标的函数处理。

向量场 $\boldsymbol{e}$、$\boldsymbol{h}$ 应当由方程(5a, b)以及相应的边界条件解出，对于理想导体边界条件的有限区域 V，其变分原理可以表达为[4, 5]

$$\Pi(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{h}) = \mathrm{Re}\left\{\iiint_V \left[\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\cdot(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{e}) - \frac{1}{2}\mu\omega\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h} - \frac{1}{2}\omega\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\varepsilon\boldsymbol{e}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\right\},\quad \delta\Pi = 0, \tag{8}$$

其中向量 $\boldsymbol{h}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 的各分量为独立变分的函数，而边界条件(7)应当预先满足。

变分原理(8)适用于任意有限的三维区域，故当然可以用于柱形域，长度坐标为 z 而横向坐标为 x, y。柱形域长度坐标 z 的地位与横向坐标 x, y 不同，故将其微商表达为 $(\partial\#)/\partial z = (\dot{\#})$。现组成互为对偶的横向向量 $\boldsymbol{q}$、$\boldsymbol{p}$ 如下

$$\boldsymbol{q} = \{e_x \quad e_y\}^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{p} = \{h_y \quad -h_x\}^{\mathrm{T}}, \tag{9}$$

变分原理对于 e_z、h_z 取极值的变分可以先行完成而给出

$$h_z = \frac{1}{\mu\omega}\left(\frac{\partial q_2}{\partial x} - \frac{\partial q_1}{\partial y}\right),\quad e_z = \frac{1}{\varepsilon\omega}\left(\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial p_2}{\partial y}\right), \tag{10a, b}$$

将(10a, b)代入变分原理，于是其泛函中只有对偶自变量 $\boldsymbol{q}$、$\boldsymbol{p}$ 了。变分原理成为

$$\begin{cases} \Pi(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = \displaystyle\int_{z_a}^{z_b}\mathrm{Re}\left\{\iint_\Omega\left[\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{q}} + \frac{1}{2\mu\omega}\left(\frac{\partial q_1}{\partial y} - \frac{\partial q_2}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{2}\omega\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\varepsilon\boldsymbol{q} + \right.\right. \\ \qquad\left.\left. \dfrac{1}{2\varepsilon\omega}\left(\dfrac{\partial p_1}{\partial x} + \dfrac{\partial p_2}{\partial y}\right)^2 - \dfrac{1}{2}\mu\omega\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}z, \\ \delta\Pi = 0, \end{cases} \tag{11}$$

Hamilton 型变分原理(11)的对偶自变量是 $\boldsymbol{q}$、$\boldsymbol{p}$。显然其 Hamilton 函数是

$$H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = \frac{1}{2}\omega\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\varepsilon\boldsymbol{q} + \frac{1}{2}\mu\omega\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p} - \frac{1}{2\varepsilon\omega}\left(\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial p_2}{\partial y}\right)^2 - \frac{1}{2\mu\omega}\left(\frac{\partial q_1}{\partial y} - \frac{\partial q_2}{\partial x}\right)^2, \tag{12}$$

采用 Hamilton 体系、辛几何的好处是可以运用本征向量展开的方法以处理各种问题[6]•

3 对偶方程组和辛体系

完成(11)的变分运算给出对偶微分方程,对偶方程组为

$$\dot{\boldsymbol{q}}(x,y,z)=\mu\omega\boldsymbol{p}+\boldsymbol{D}_{\mathrm{op}}\boldsymbol{p},\quad \dot{\boldsymbol{p}}(x,y,z)=-\omega\varepsilon\boldsymbol{q}-\boldsymbol{B}_{\mathrm{op}}\boldsymbol{q},\tag{13a, b}$$

其中

$$\boldsymbol{D}_{\mathrm{op}}\overset{\mathrm{def}}{=}\frac{1}{\omega\varepsilon}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}\\ \dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}_{\mathrm{op}}\overset{\mathrm{def}}{=}\frac{1}{\omega\mu}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} & -\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}\\ -\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\end{bmatrix},\tag{14a, b}$$

在对偶向量 $\boldsymbol{q}$、$\boldsymbol{p}$ 上方加上了一个波号,表示它们是(x,y,z)的函数,以便与以后分离变量后的横向坐标函数相区别• 还应当有边界条件• 理想导体的侧边边界条件可以写为

$$\begin{cases}q_1\sin\alpha-q_2\cos\alpha=-e_s=0,\\ e_z=\dfrac{1}{\varepsilon\omega}\left(\dfrac{\partial p_1}{\partial x}+\dfrac{\partial p_2}{\partial y}\right)=0,\end{cases}\quad 在\ \Gamma\ 上,\tag{15}$$

其中 Γ 是横截面的周边•

综合对偶向量而引入状态函数向量 $\boldsymbol{v}$,有综合的微分方程

$$\boldsymbol{v}(x,y,z)\overset{\mathrm{def}}{=}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{q}\\ \boldsymbol{p}\end{Bmatrix},\quad \dot{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{v},\tag{16}$$

显然,两个算子矩阵 $\boldsymbol{D}_{\mathrm{op}}$ 与 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{op}}$ 都是对称的,而对偶方程组是 Hamilton 正则方程之型• 综合算子矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的定义为

$$\boldsymbol{H}\overset{\mathrm{def}}{=}\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \omega\mu\boldsymbol{I}+\boldsymbol{D}_{\mathrm{op}}\\ -\omega\varepsilon\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_{\mathrm{op}} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix},\tag{17}$$

(16)是齐次线性微分方程,可以用分离变量法求解之,令

$$\boldsymbol{v}=\psi(x,y)Z(z),\quad \psi=\left\{\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\right\}^{\mathrm{T}},\tag{18}$$

其中 $Z(z)=\mathrm{e}^{(\gamma z)}$;而 $\boldsymbol{q}(x,y,\omega)$、$\boldsymbol{p}(x,y,\omega)$ 已是横向坐标的函数,其本征方程为

$$\boldsymbol{H}\psi=\gamma\psi,\tag{19}$$

其中 γ 是待求的本征值,而 $\psi(x,y,\omega)$ 是相应的本征向量函数•

方程(19)是4个微分方程联立组成的本征值问题,它的解应当与侧向边界条件一起考虑• 理想导体侧向边界条件是切向电场为零,见(15)• 本征方程(19)的算子矩阵 $\boldsymbol{H}$ 是 Hamilton 型的[4,5]•

对于 Hamilton 算子矩阵,文献[6]有结论:如 γ 是本征值则 $-\gamma$ 一定也是本征值• 因此全部本征值可以分类为两类,即

$$\begin{cases}\alpha)\ \gamma_i,\ \operatorname{Re}(\gamma_i)<0\ 或\ \operatorname{Re}(\gamma_i)=0,\ \operatorname{Im}(\gamma_i)>0,\\ \beta)\ \gamma_{-i},\ \gamma_{-i}=-\gamma_i,\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,\tag{20}$$

其中 $\operatorname{Re}(\gamma_i)=0$ 的本征解相应于传输波的情况,此时纯虚数 γ_i 对应波导的波数,应予特别注意•

本征值 γ_i 和 γ_{-i} 所对应的本征向量函数 ψ_i 和 ψ_{-i} 称为互相辛共轭(symplectic adjoint)• $\boldsymbol{H}$ 阵本征函数向量相互间的共轭辛正交归一关系为

$$\langle\psi_i^{\mathrm{T}},\boldsymbol{J},\psi_j\rangle=0,\ \langle\psi_{-i}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{J},\psi_{-j}\rangle=0,\ \langle\psi_i^{\mathrm{T}},\boldsymbol{J},\psi_{-j}\rangle=\delta_{i,j},\qquad i,j>0,\tag{21}$$

其中 $\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_2\\ -\boldsymbol{I}_2 & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$，是辛几何空间的度量矩阵. 将本征函数向量编排为 ψ_1、ψ_{-1}、ψ_2、ψ_{-2}, …, 这些本征函数向量将成为状态空间的一个完备系. 任何横截面上的状态空间的函数 $\boldsymbol{v}(x,y)$ 皆可以由本征函数向量来展开

$$\boldsymbol{v}(x,y)=\sum_{i=1,2,\cdots}(a_i\psi_i+b_i\psi_{-i}),\quad a_i=-\langle\psi_{-i}^{\mathrm T},\boldsymbol{J},\boldsymbol{v}\rangle,\quad b_i=-\langle\psi_i^{\mathrm T},\boldsymbol{J},\boldsymbol{v}\rangle,\tag{22}$$

这是由共轭辛正交归一关系确定的. 这些一般理论对于波导分析很有用.

4　Hamilton 体系下的辛半解析法

以上的推导是用了解析的方法，但对横截面形状复杂的波导，解析求解是无望的. 对波导横截面域 Ω 离散，采用有限元半解析法是很自然的. 但 Hamilton 型有对偶场 $\boldsymbol{q}(x,y)$，$\boldsymbol{p}(x,y)$ 二类独立变量，其半解析离散有本身的特点.

将波导横截面全域 Ω 划分为共 n_e 个子区域 Ω_i，划分单元后变分原理(11) 成为

$$\begin{cases}\Pi_2(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})=\displaystyle\int_{z_a}^{z_b}\left\{\sum_{i=1}^{n_e}\mathrm{Re}\iint_{\Omega_i}\left[\boldsymbol{p}^{\mathrm T}\dot{\boldsymbol{q}}+\frac{1}{2\mu\omega}\left(\frac{\partial q_1}{\partial y}-\frac{\partial q_2}{\partial x}\right)^2-\frac{1}{2}\omega\boldsymbol{q}^{\mathrm T}\varepsilon\boldsymbol{q}+\right.\right.\\ \qquad\left.\left.\dfrac{1}{2\varepsilon\omega}\left(\dfrac{\partial p_1}{\partial x}+\dfrac{\partial p_2}{\partial y}\right)^2-\dfrac{1}{2}\mu\omega\boldsymbol{p}^{\mathrm T}\boldsymbol{p}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}z,\\ \delta\Pi_2=0,\end{cases}\tag{23}$$

边界条件预先满足. (23) 无非是将横截面全域 Ω 的积分改为各个单元 Ω_i 的积分之和. 离散方法与力学有限元是一样的. 重要的是离散时要保持体系辛结构. 有限元离散采用节点的场量为未知数. 每个节点 j 有未知数 q_{j1}、q_{j2}、p_{j1}、p_{j2} 即 e_{xj}、e_{yj}、h_{yj}、$-h_{xj}$. 设 $N_{\mathrm d}$ 为横截面上的节点个数，则全体电场向量 $\boldsymbol{q}_{\mathrm{dg}}$ 与全体磁场向量 $\boldsymbol{p}_{\mathrm{dg}}$ 的维数同为 $2N_{\mathrm d}$. 泛函 $\Pi_2(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ 的被积分函数中只出现一阶微商，因此只有 C_0 连续的要求.

泛函 $\Pi_2(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ 中的被积函数，离散后用全体向量表示为

$$\boldsymbol{p}_{\mathrm{dg}}^{\mathrm T}\boldsymbol{W}_{\mathrm g}\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{dg}}+\frac{1}{2}\boldsymbol{q}_{\mathrm{dg}}^{\mathrm T}\boldsymbol{B}_{\mathrm g}\boldsymbol{q}_{\mathrm{dg}}-\frac{1}{2}\boldsymbol{p}_{\mathrm{dg}}^{\mathrm T}\boldsymbol{D}_{\mathrm g}\boldsymbol{p}_{\mathrm{dg}},\tag{24}$$

其中，(23) 式中Hamilton 函数离散后有 $\boldsymbol{q}_{\mathrm{dg}}^{\mathrm T}\boldsymbol{B}_{\mathrm g}\boldsymbol{q}_{\mathrm{dg}}/2$, $\boldsymbol{B}_{\mathrm g}$, $\boldsymbol{p}_{\mathrm{dg}}^{\mathrm T}\boldsymbol{D}_{\mathrm g}\boldsymbol{p}_{\mathrm{dg}}/2$ 和 $\boldsymbol{D}_{\mathrm g}$ 是对称矩阵. (23) 式中的 $\boldsymbol{p}^{\mathrm T}\dot{\boldsymbol{q}}$ 项离散后有 $\boldsymbol{p}_{\mathrm{dg}}^{\mathrm T}\boldsymbol{W}_{\mathrm g}\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{dg}}$, 其中 $\boldsymbol{W}_{\mathrm g}$ 矩阵是对称正定矩阵，类似于结构动力学中的质量阵，因此对 $\boldsymbol{W}_{\mathrm g}$ 阵的处理可以有"一致质量阵"或"集中质量"两种处理方式. 以上的结果是按常规有限元法推导的. 全体向量 $\boldsymbol{q}_{\mathrm{dg}}$ 与 $\boldsymbol{p}_{\mathrm{dg}}$ 的维数相同，但他们的分量并不全是未知数，因此未知电场与磁场的维数可能是不同的. 这需要做正则化处理，这样才能保持离散体系的辛结构.

设经辛正则化处理后，$\boldsymbol{q}_{\mathrm d}$ 与 $\boldsymbol{p}_{\mathrm d}$ 已具有相同的维数 n. 离散后的变分原理成为

$$\Pi_{\mathrm d}(\boldsymbol{q}_{\mathrm d},\boldsymbol{p}_{\mathrm d})=\int[\boldsymbol{p}_{\mathrm d}^{\mathrm T}\boldsymbol{W}\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm d}-H_{\mathrm d}(\boldsymbol{q}_{\mathrm d},\boldsymbol{p}_{\mathrm d})]\,\mathrm{d}z,\quad\delta\Pi_{\mathrm d}=0,\tag{25}$$

$$H_{\mathrm d}(\boldsymbol{q}_{\mathrm d},\boldsymbol{p}_{\mathrm d})=-\frac{1}{2}\boldsymbol{q}_{\mathrm d}^{\mathrm T}\boldsymbol{B}_{\mathrm d}\boldsymbol{q}_{\mathrm d}+\frac{1}{2}\boldsymbol{p}_{\mathrm d}^{\mathrm T}\boldsymbol{D}_{\mathrm d}\boldsymbol{p}_{\mathrm d},\tag{25a}$$

其中 $\boldsymbol{W}$ 是 $n\times n$ 对称正定矩阵，$\boldsymbol{B}_{\mathrm d}$、$\boldsymbol{D}_{\mathrm d}$ 是 $n\times n$ 的对称矩阵. 保持离散体系辛结构就是使 $\boldsymbol{W}$、$\boldsymbol{B}_{\mathrm d}$、$\boldsymbol{D}_{\mathrm d}$ 具有以上所述性质.

由于 $\boldsymbol{W}$ 对称正定，必可作 Cholesky 三角分解

$$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{\mathrm T},\ \text{且令}\ \boldsymbol{q}_{\mathrm h}=\boldsymbol{L}^{\mathrm T}\boldsymbol{q}_{\mathrm d},\quad\boldsymbol{p}_{\mathrm h}=\boldsymbol{L}^{\mathrm T}\boldsymbol{p}_{\mathrm d},\tag{26}$$

于是离散后的变分原理(25) 成为

$$\Pi_{\mathrm{h}}(\boldsymbol{q}_{\mathrm{h}}, \boldsymbol{p}_{\mathrm{h}}) = \int_{z_a}^{z_b} [\boldsymbol{p}_{\mathrm{h}}^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{h}} - H_{\mathrm{h}}(\boldsymbol{q}_{\mathrm{h}}, \boldsymbol{p}_{\mathrm{h}})]\mathrm{d}z, \quad \delta\Pi_{\mathrm{h}} = 0, \tag{25$'$}$$

$$H_{\mathrm{h}}(\boldsymbol{q}_{\mathrm{h}}, \boldsymbol{p}_{\mathrm{h}}) = -\frac{1}{2}\boldsymbol{q}_{\mathrm{h}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{\mathrm{h}}\boldsymbol{q}_{\mathrm{h}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{p}_{\mathrm{h}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{\mathrm{h}}\boldsymbol{p}_{\mathrm{h}}, \tag{25a$'$}$$

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{h}} = \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{d}}\boldsymbol{L}^{-\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{D}_{\mathrm{h}} = \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{D}_{\mathrm{d}}\boldsymbol{L}^{-\mathrm{T}}, \tag{27}$$

将离散的基底与变换(26)一起考虑，这就是基底的辛正交归一关系•　显然 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{h}}$、$\boldsymbol{D}_{\mathrm{h}}$ 仍为 $n \times n$ 对称矩阵•　(25)′已经是最常见的Hamilton 体系变分原理了•　$H_{\mathrm{h}}(\boldsymbol{q}_{\mathrm{h}}, \boldsymbol{p}_{\mathrm{h}})$ 在结构力学中称为混合能密度[6]•

从(25)′可导出对偶方程为

$$\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{h}} = \boldsymbol{D}_{\mathrm{h}}\boldsymbol{p}_{\mathrm{h}}, \quad \dot{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{h}} = \boldsymbol{B}_{\mathrm{h}}\boldsymbol{q}_{\mathrm{h}}, \tag{28a, b}$$

方程(28a, b)即为波导问题辛半解析半离散的控制方程•　分离变量后导出的的本征方程为

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{h}}\boldsymbol{v}_{\mathrm{h}} = \gamma\boldsymbol{v}_{\mathrm{h}}, \quad \boldsymbol{H}_{\mathrm{h}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{D}_{\mathrm{h}} \\ \boldsymbol{B}_{\mathrm{h}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_{\mathrm{h}} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{q}_{\mathrm{h}} \\ \boldsymbol{p}_{\mathrm{h}} \end{Bmatrix}, \tag{29}$$

求解该问题的本征值 γ，找出纯虚数的解，即得传输波的波数•

5　非均匀波导的数值算例

考虑部分填充介质的矩形波导，如图1所示•　取空气的介电常数 $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ F/m，磁常数 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m，取 $k_0^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_0$•　取电介质的的相对介电常数 $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0 = 4$，相对磁导率 $\mu_r = \mu/\mu_0 = 1$，取 $k^2 = \omega^2\mu\varepsilon$•　计算时，利用对称性取一半横截面•　在对(24)中 $\boldsymbol{W}_{\mathrm{g}}$ 的处理中，本文采用"集中质量法"的模式•　横截面的有限单元选用最普通的三角形单元，本例中，共划分了45个节点、64个单元，网格划分如图2所示•　前2个主模的色散曲线用图3表示，对应的计算结果列于表1和表2中•

表1　半填充矩形波导波数的计算结果与解析解的比较(第一阶主模)

$k_0 a$	解析解	本文解
4.0	0.254 78	0.252 26
4.4	0.726 66	0.731 96
4.5	0.827 59	0.855 09
4.6	0.922 89	0.956 00
5.0	1.256 48	1.263 38
5.2	1.399 71	1.429 40
5.4	1.530 22	1.555 65
5.6	1.649 75	1.678 97
5.8	1.759 72	1.762 76
6.0	1.861 33	1.866 05
6.2	1.955 56	1.960 72
6.6	2.125 06	2.126 74
6.8	2.201 63	2.201 99
7.0	2.273 43	2.272 17

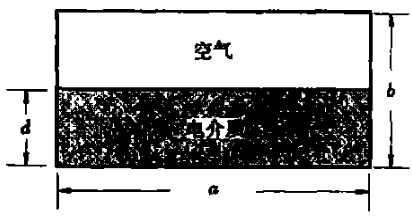

图1　半填充矩形波导($a = 2b$, $b = 2d$)

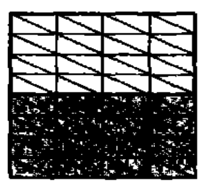
图2　按对称性横截面取一半时的三角形单元网格划分

表 2 半填充矩形波导波数的计算结果与解析解的比较(第二阶主模)

k_0a	解析解	本文解
5.6	0.390 87	0.504 65
6.0	0.764 71	0.840 00
6.2	0.928 55	0.987 84
6.4	1.079 41	1.157 57
6.8	1.218 76	1.294 07
7.0	1.347 85	1.442 91

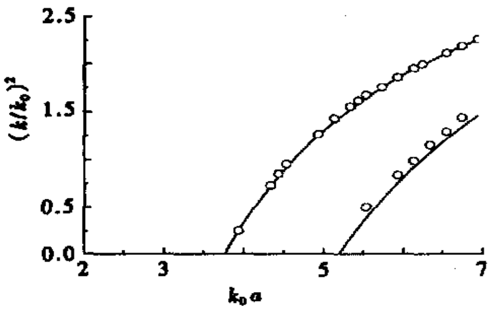

图 3 将对称面看成导电壁获得的色散曲线

图 3 中表示的结果是将对称面看成是导电壁得到的• 图中实线表示解析解[2], 圆圈表示本文解• 由图 3、表 1 和表 2 可以看出, 用 Hamilton 体系的辛半解析法得出的结果与解析解符合得很好•

6 结 束 语

计算电磁学是近几十年来随着计算机发展起来的一门新学科, 涌现了一大批优秀的科研成果• 近年来, 计算电磁学正着重于与其他学科相结合, 拓宽计算电磁学的研究领域• 将力学中的 Hamilton 体系应用于电磁学, 把电磁波导问题导向 Hamilton 体系、辛几何• 辛体系可以用于任意的各向异性材料, 而且便于处理不同介质的界面条件• 辛本征解展开定理对于不同介质的波导、不同截面的波导连接、共振腔等, 提供了很大方便• 对复杂截面波导, 在变分原理的控制下, 采用半解析离散是有效的数值方法• 辛体系在应用力学中已经取得了很大成功, 对于辛本征解的求解已经发展了有效的算法[7], 这些对于电磁波导的分析是很有利的• 本文中对非均匀波导问题的应用, 证明离散求解是有效的•

致谢 在本文的研究工作过程中, 作者得到了钟万勰院士悉心的指导和热情的鼓励• 在此表示衷心的感谢•

[参 考 文 献]

[1] 谢处方, 饶克谨. 电磁场与电磁波[M]. 北京: 高等教育出版社, 1999, 184—219.

[2] Harrington R F. Time_Harmonic Electromagnetic Fields[M]. New York: McGraw_Hill, 1961, 143—189.

[3] 金建铭. 电磁场有限元方法[M]. 王建国 译, 葛德彪 校. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1998, 137—163.

[4] 钟万勰. 电磁波导的辛体系[J]. 大连理工大学学报, 2001, **41**(4): 379—387.

[5] 钟万勰. 周期电磁波导的能带辛分析[J]. 计算力学, 2001, **18**(4): 379—387.

[6] 钟万勰. 弹性力学求解新体系[M], 大连: 大连理工大学出版社, 1995, 37—62.

[7] ZHONG Wan_xie, LIN Jia_hao, ZHU Jian_ping. Computation of gyroscopic systems and symplectic eigensolutions of skew_symmetric matrices[J]. Computers & Structures, 1994, **52**(5): 999—1009.

Hamiltonian Symplectic Semi_Analytical Method and Its Application in Inhomogeneous Electromagnetic Waveguides

SUN Yan, XIE Jun

(Department of Engineering Mechanics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, P.R.China)

Abstract: Dual vectors are applied in Hamilton system of applied mechanics. Electric and magnetic field vectors are the dual vectors in electromagnetic field. The Hamilton system method is introduced into the analysis of electromagnetism waveguide with inhomogeneous materials. The transverse electric and magnetic fields are regarded as the dual. The basic equations are solved in Hamilton system and symplectic geometry. With the Hamilton variational principle, the symplectic semi- analytical equations are derived and preserve their symplectic structures. The given numerical example demonstrates the solution of LSE mode in a dielectric waveguide.

Key words: Hamilton system; symplectic geometry; semi- analytical solution; inhomogeneous electromagnetic waveguide