

文章编号: 1000_0887(2005) 04_0394_09

四点弯曲压电梁导电裂纹尖端附近的横观各向同性损伤

杨新华, 董 靛, 王 乘, 陈传尧, 胡元太

(华中科技大学 力学系, 武汉 430074)

(我刊编委王乘来稿)

摘要: 根据电焓密度函数建立了压电材料静态损伤本构模型, 详细讨论了横观各向同性力电损伤的一些特征, 最后通过对四点弯曲 PZT-PIC151 梁跨中导电裂纹附近横观各向同性损伤的数值分析, 研究了裂纹深度和外加力、电载荷对损伤分布的影响规律。结果表明: 裂纹深度和力载荷对力电损伤都有非常明显相似的影响, 随着裂纹深度和力载荷的增大, 裂纹尖端的力电损伤明显增大, 范围也相应扩大; 电载荷对力损伤完全不同于对电损伤的影响, 电载荷单调地改变裂纹尖端力损伤的大小, 不改变力损伤的区域尺寸, 但是对电损伤的影响则比较复杂。

关键词: 横观各向同性损伤; 导电裂纹; 压电陶瓷; 四点弯曲梁

中图分类号: O343 **文献标识码:** A

引 言

在外加力电载荷作用下, 压电陶瓷的脆性可能引起微裂纹或损伤, 经过缓慢扩展, 最终形成宏观裂纹, 导致破坏。因此, 研究压电陶瓷的断裂机理, 以便开展压电设备的可靠性预测和寿命预估, 非常重要。基于线性断裂理论得出的结论^[1~3] 已经被证明和实验现象^[4,5] 存在难以解释的矛盾: 线性理论预测应力强度因子与外加电场强度无关, 但是实验结果表明, 外加电场要么促进要么阻碍裂纹的扩展。为了解决这一矛盾, 必须考虑裂纹尖端的力电非线性。将压电陶瓷看作一种具有力学脆性和电学延性的材料, Gao 等人^[6] 提出了一个条带饱和模型来模拟压电陶瓷的电非线性。但是, 由于没有考虑力非线性, 该模型的可靠性值得怀疑。压电裂纹尖端的力电多尺度非线性现象已经受到人们的广泛关注。作者根据连续损伤力学理论^[7] 研究压电材料的非线性问题^[8,9], 所获得的结果与已有的实验结论^[4,5] 基本一致, 从而较好地解决了线性断裂理论遇到的困难。

压电陶瓷通常具有横观各向同性。当结构几何、载荷和边界条件都具有一定对称性时, 横观各向同性损伤就可能发生。本文基于静态压电损伤本构模型, 定量分析四点弯曲压电梁跨中导电裂纹深度和外加力、电载荷对裂纹附近横观各向同性损伤分布的影响规律。

收稿日期: 2004_02_13; 修订日期: 2004_11_30

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10172036; 50378041)

作者简介: 杨新华(1967), 男, 湖北天门人, 副教授, 博士(联系人, Tel: + 86_27_87543538; Fax: + 86_27_87543501; E_mail: yangxinh@263.net)

1 压电损伤模型的一般性描述

考虑压电结构中一个温度恒定、包含力电损伤的微小单元 从连续介质力学的观点来看, 这一单元可以看作宏观上的一个点, 其尺寸比结构本身小很多, 但在微观上又足够大, 包含足够的物质粒子, 其内部的物理量并不均匀 采用应变、电场强度 E 、力损伤 D^M 和电损伤 D^E 作为独立的状态变量, 压电单元的电焓密度就可以表示为

$$h(\bar{y}, E, D^M, D^E) = \frac{1}{2} \bar{y}_{ij} - \frac{1}{2} D_i E_i, \tag{1}$$

式中, \bar{y} 和 D 为考察单元的应力和电位移 微分(1)式得

$$\begin{aligned} -\frac{h}{\bar{y}} d\bar{y} + \frac{h}{E_i} dE_i + \frac{h}{D_{ij}^M} dD_{ij}^M + \frac{h}{D_{ij}^E} dD_{ij}^E = \\ \frac{1}{2} \left[\bar{y}_{mn} + \bar{y}_{ij} - \frac{\bar{y}_{ij}}{mn} - E_i \frac{D_i}{mn} \right] d\bar{y}_{mn} + \frac{1}{2} \left[\bar{y}_{ij} - \frac{\bar{y}_{ij}}{E_m} - D_m - E_i \frac{D_i}{E_m} \right] dE_m + \\ \frac{1}{2} \left[\bar{y}_{ij} - \frac{\bar{y}_{ij}}{D_{mn}^M} - E_i \frac{D_i}{D_{mn}^M} \right] dD_{mn}^M + \frac{1}{2} \left[\bar{y}_{ij} - \frac{\bar{y}_{ij}}{D_{mn}^E} - E_i \frac{D_i}{D_{mn}^E} \right] dD_{mn}^E \end{aligned} \tag{2}$$

定义

$$c_{mn} = \frac{h}{mn}, \quad D_m = - \frac{h}{E_m}, \tag{3}$$

并且比较(2)式左右两边的相同项, 不难得出

$$c_{mn} = \bar{y}_{ij} - \frac{\bar{y}_{ij}}{mn} - E_i \frac{D_i}{mn}, \quad D_m = - \bar{y}_{ij} - \frac{\bar{y}_{ij}}{E_m} + E_i \frac{D_i}{E_m} \tag{4}$$

引进下面的记号^[8,9]

$$c_{ijmn} = \frac{\bar{y}_{ij}}{mn}, \quad e_{mij} = \frac{D_m}{ij} = - \frac{ij}{E_m}, \quad im = \frac{D_i}{E_m}, \tag{5}$$

可以将(4)改写为

$$\bar{y}_{ij} = c_{ijkl} kl - e_{kij} E_k, \quad D_i = e_{ikl} kl + ik E_k, \tag{6}$$

式中, c 、 e 和 \bar{y} 分别为有效弹性、压电和介电系数 这就是一个适合分析压电材料静态力电损伤的本构模型 运用能量等效原理, 可以导出材料有效系数和无损常数之间的关系^[8,9]

$$c_{ijmn} = N_{klj} N_{qmi} c_{klpq}, \quad e_{imn} = N_{klmn} G_{ji} e_{kl}, \quad il = G_{ji} G_{kl} jk, \tag{7}$$

式中 c 、 e 和 \bar{y} 分别为无损弹性、压电和介电常数, N 和 G 为力、电损伤影响张量

从实用的角度考虑, 参照弹塑性材料的损伤分析^[10], 采用二阶张量 根据下式构造 N

$$N_{ijkl} = 0.5 (ik jl + ik jl), \tag{8}$$

这里, δ_{ij} 为 Kronecker 张量, \bar{y} 为连续性张量 D^M 和 D^E 通过下面两式与 \bar{y} 和 G 相联系:

$$D_{ij}^M = \bar{y}_{ij} - ik kj, \quad D_{ij}^E = \bar{y}_{ij} - G_{ik} G_{kj} \tag{9}$$

2 横观各向同性损伤

(6)式可以改写成矩阵形式

$$\bar{y} = c - e^T E, \quad D = e + E \tag{10}$$

其中,

$$c = N^T cN, e = G^T eN, = G^T G \tag{11}$$

根据(8)式,力损伤影响矩阵可以表示成

$$N = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 13 & 0.5 & 12 \\ 0 & 22 & 0 & 0.5 & 23 & 0 & 0.5 & 12 \\ 0 & 0 & 33 & 0.5 & 23 & 0.5 & 13 & 0 \\ 0 & 23 & 23 & 0.5(22+33) & 0.5 & 12 & 0.5 & 13 \\ 13 & 0 & 13 & 0.5 & 12 & 0.5(11+33) & 0.5 & 23 \\ 12 & 12 & 0 & 0.5 & 13 & 0.5 & 23 & 0.5(11+22) \end{bmatrix} \tag{12}$$

一般来说,压电陶瓷具有横观各向同性,因此其无损材料常数 c 、 e^T 和 G 具有下面的形式

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{15} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 33 \end{bmatrix} \tag{13}$$

式中, $c_{66} = 0.5(c_{11} - c_{12})$ 可以证明,如果 N 和 G 具有下面的形式,力电损伤就不会改变压电陶瓷的对称性

$$N = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} & 0 & 0 & 0 \\ N_{12} & N_{11} & N_{13} & 0 & 0 & 0 \\ N_{13} & N_{13} & N_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{66} \end{bmatrix}, \tag{14}$$

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & 0 & 0 \\ 0 & G_{11} & 0 \\ 0 & 0 & G_{33} \end{bmatrix} \tag{15}$$

事实上,将此二式代入(11),可以得到有效材料系数 c 、 e^T 和 G

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{15} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 33 \end{bmatrix} \tag{16}$$

其中

$$\begin{cases} c_{11} = (N_{11}^2 + N_{12}^2)c_{11} + 2N_{11}N_{12}c_{12} + 2(N_{11} + N_{12})N_{13}c_{13} + N_{13}^2c_{33}, \\ c_{12} = 2N_{11}N_{12}c_{11} + (N_{11}^2 + N_{12}^2)c_{12} + 2(N_{11} + N_{12})N_{13}c_{13} + N_{13}^2c_{33}, \\ c_{13} = (N_{11} + N_{12})N_{13}(c_{11} + c_{12}) + [(N_{11} + N_{12})N_{33} + 2N_{13}^2]c_{13} + N_{13}N_{33}c_{33}, \\ c_{33} = 2N_{13}^2(c_{11} + c_{12}) + 4N_{13}N_{33}c_{13} + N_{33}^2c_{33}, \\ c_{44} = N_{44}c_{44}, \quad c_{66} = N_{66}c_{66}, \quad e_{31} = (N_{11} + N_{12})G_{33}e_{31} + N_{13}G_{33}e_{33}, \\ e_{33} = 2N_{13}G_{33}e_{31} + N_{33}G_{33}e_{33}, \quad e_{15} = N_{44}G_{11}e_{15}, \quad \epsilon_{11} = G_{11}^2 \epsilon_{11}, \quad \epsilon_{33} = G_{33}^2 \epsilon_{33} \end{cases} \quad (17)$$

可见, 受损后的有效材料系数与无损材料常数具有相同的形式。由于(14)和(15)式中 N 和 G 分别具有与 c 和 e 相同的对称性, 我们称这类损伤为横观各向同性损伤。根据(17), 为使 $c_{66} = 0.5(c_{11} - c_{12})$ 得到满足, 要求 $N_{66} = N_{11} - N_{12}$ 。因此, 只需要 7 个标量就可以描述横观各向同性损伤, 其中 5 个标量 N_{11} 、 N_{12} 、 N_{13} 、 N_{33} 和 N_{44} 描述力损伤; 另外 2 个标量 G_{11} 和 G_{33} 描述电损伤。

比较(14)和(12)两式, 可以得到

$$N = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5(\epsilon_{11} + \epsilon_{33}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5(\epsilon_{11} + \epsilon_{33}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon_{11} \end{bmatrix} \quad (18)$$

很明显, 采用 N 构造 N 以后, 由于力损伤的一些信息被丢掉, 甚至只需要 2 个标量 ϵ_{11} 和 ϵ_{33} 就可以描述横观各向同性损伤。

3 四点弯曲压电梁的损伤分析

考虑由均匀极化压电陶瓷 PZT-PIC151 制成的四点弯曲梁, 其无损材料常数见文献[5]。梁尺寸 4 mm × 3 mm × 22 mm, 沿 x_3 方向极化。在梁跨中上部, 有一条平行于极化方向, 深度为 a 的导电裂纹。梁受集中力 F 和电压 U 作用, 见图 1。考虑到梁的几何尺寸、载荷和边界条件都关于 x_3 轴对称, 可以假设加载过程中梁发生横观各向同性损伤。采用有限元方法, 计算裂纹尖端周围的损伤场。由于问题中力损伤分量 D_{11}^M 和电损伤分量 D_{33}^E 占主导地位, 因此只给出这两个损伤分量的分布, 分别研究裂纹深度、外加力电载荷的影响。

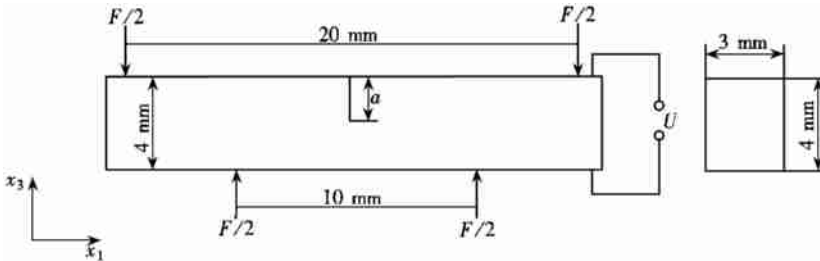


图 1 四点弯曲压电梁简图

3.1 裂纹深度对损伤场的影响

为了研究裂纹深度对损伤场的影响, 在梁上施加恒定的力电载荷 $F = 35 \text{ N}$ 和 $U = -2.4$

kV, 令裂纹深度从 0.5 mm 开始, 到 1 mm, 1.5 mm, 再到 2 mm 计算裂纹尖端周围的损伤场, 并将 D_{11}^M 和 D_{33}^E 的等值线分布绘于图 2 和图 3 从图 3 可以看出, 裂纹尖端力电损伤区域都呈扇形, 但是相同载荷条件下的力电损伤区域尺寸明显不同, 形状也存在明显差异 同时, 裂纹深度对力电损伤的分布都有很大的影响, 随着裂纹深度增加, 裂纹尖端处的力电损伤增大, 损伤范围也迅速扩大

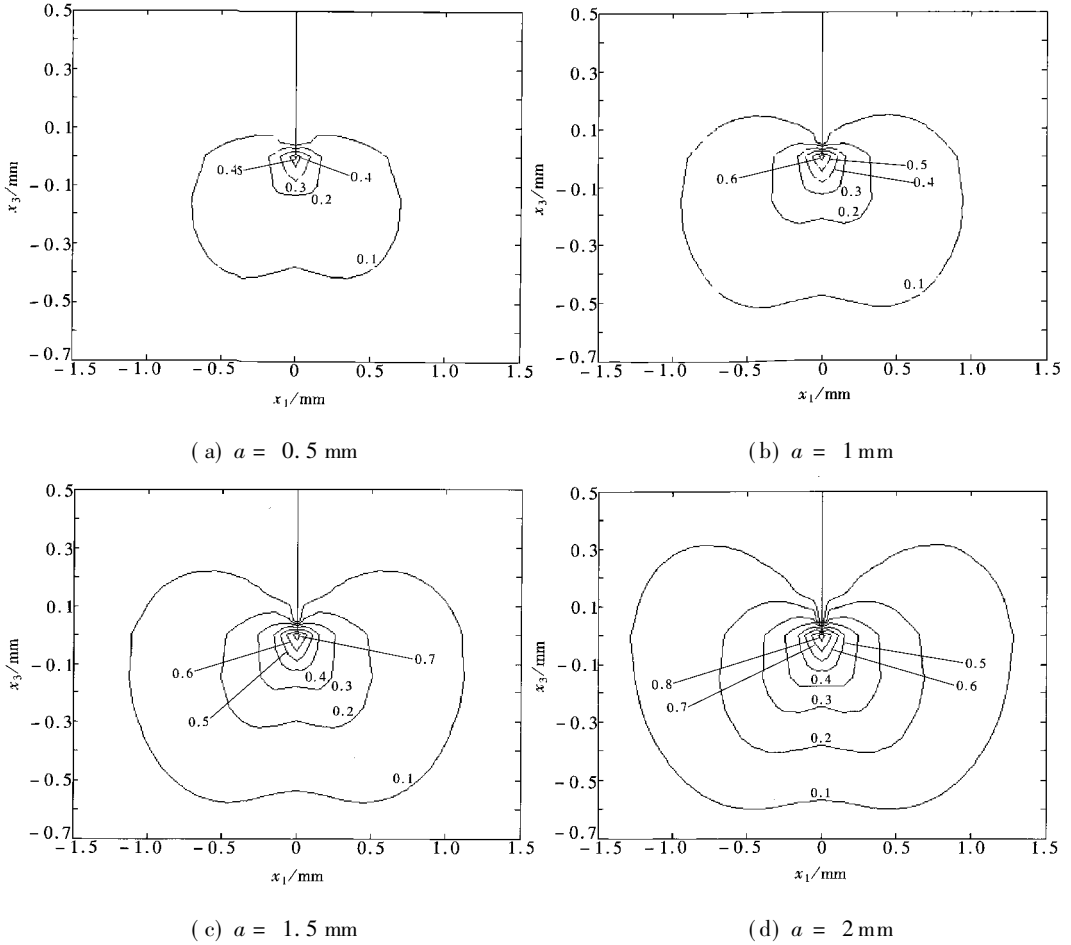


图 2 裂纹深度对力损伤的影响

3.2 力载荷对损伤场的影响

为了分析力载荷对损伤场的影响, 令裂纹深度 a 固定在 2 mm, 电载荷固定在 -2.4 kV, 力载荷从 35 N 变化到 25 N, 再到 15 N 计算裂纹尖端周围的损伤场 $F = 35 \text{ N}$ 时的力电损伤等值线分布已在图 2(d) 和图 3(d) 中给出, $F = 25 \text{ N}$ 和 15 N 时的损伤等值线分布分别见图 4 和图 5 很明显, 力载荷对力电损伤的影响相似 随着力载荷减小, 力电损伤相应减小, 范围也相应缩小

3.3 电场对损伤场的影响

由于力电耦合, 研究电场对损伤场的影响非常重要 令裂纹深度 a 保持 2 mm 不变, 力载荷保持 35 N 不变, 外加电压从 -1.2 kV 变化到 0 kV, 1.2 kV, 再到 2.4 kV 计算裂纹尖端周围的损伤, 并将力电损伤等值线分布分别绘于图 6 和图 7 明显地, 外加电场对力损伤区域尺寸几乎没有任何影响 然而, 随着电压增加, 裂纹尖端的力损伤减小, 表明正电场阻碍裂纹扩展,

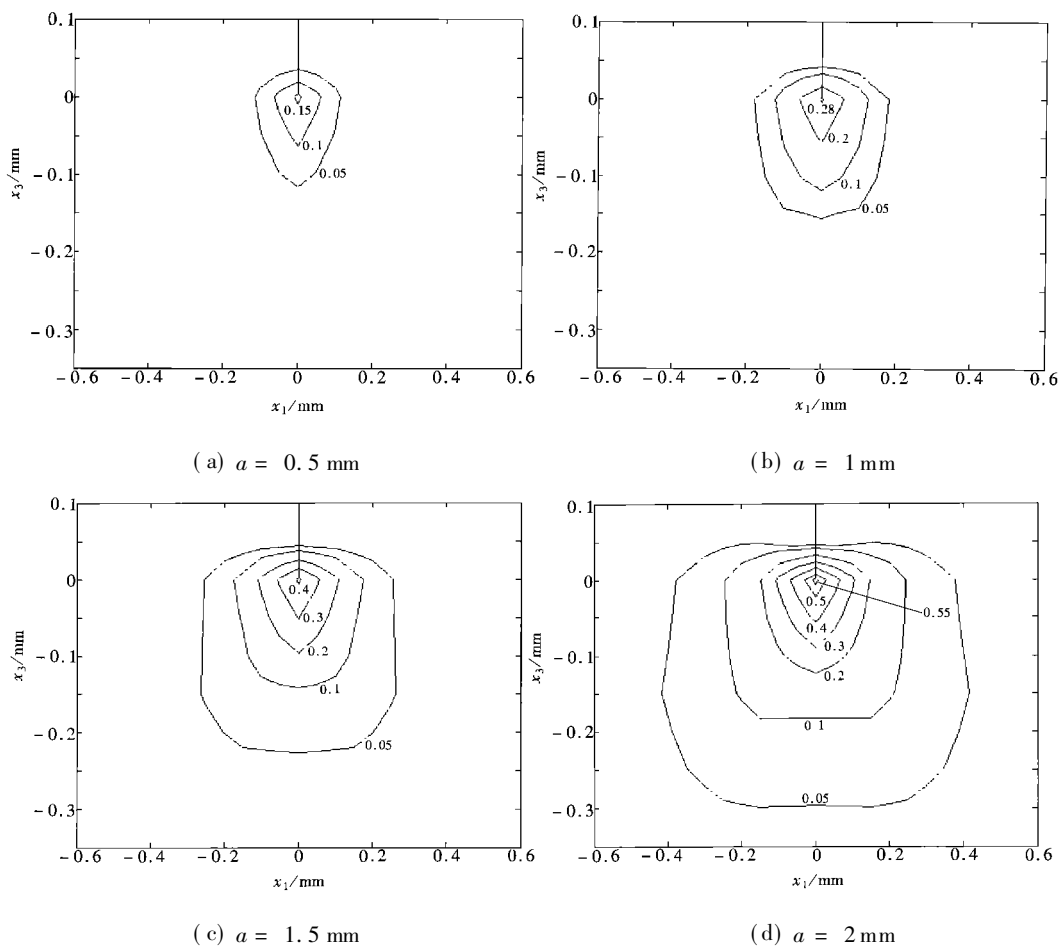


图3 裂纹深度对电损伤的影响

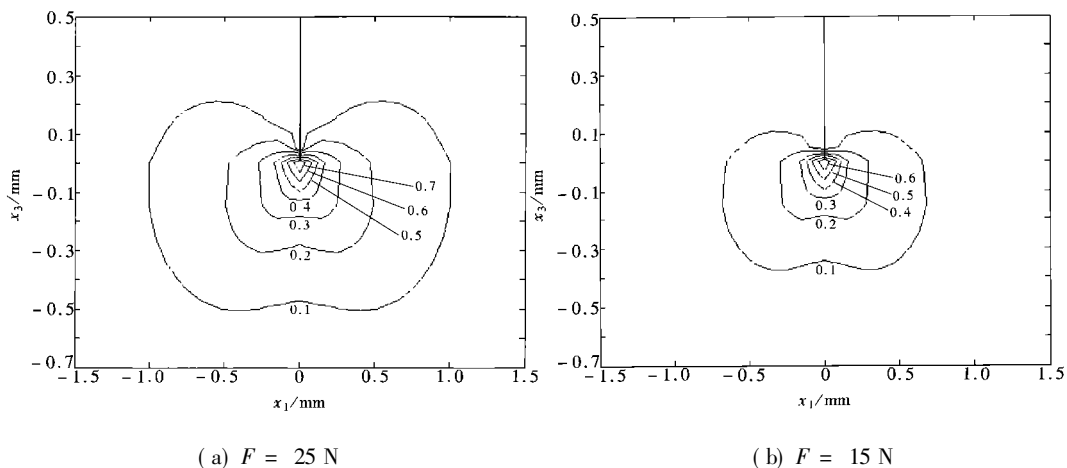


图4 力载荷对力损伤的影响

负电场促进裂纹扩展,这与已有的实验结论一致^[5] 和力损伤情况不同,外加电场对电损伤的大小和区域范围都有很大影响 当电压从-1.2 kV 上升到 1.2 kV 时,电损伤及其区域尺寸迅速减小到零,但是当电压从 1.2 kV 上升到 2.4 kV 时,电损伤及其区域尺寸又会迅速增大

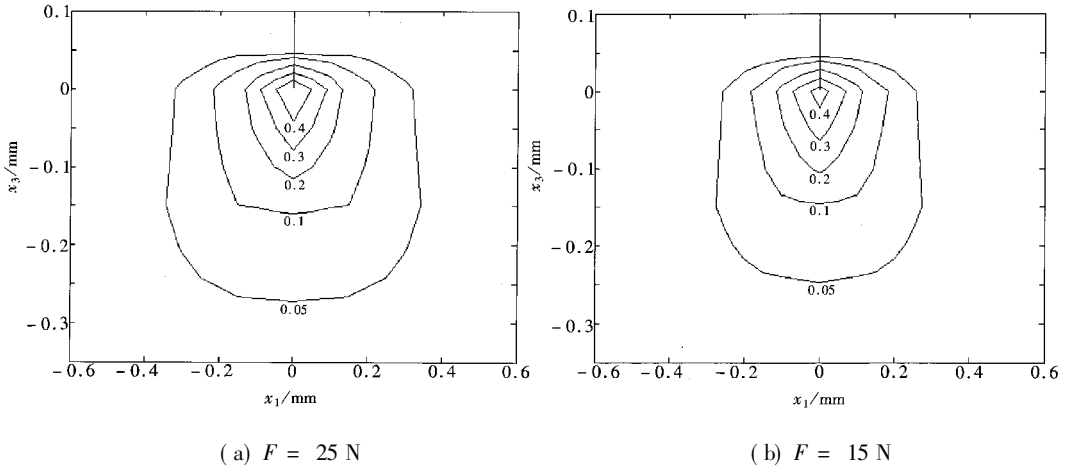


图5 力载荷对电损伤的影响

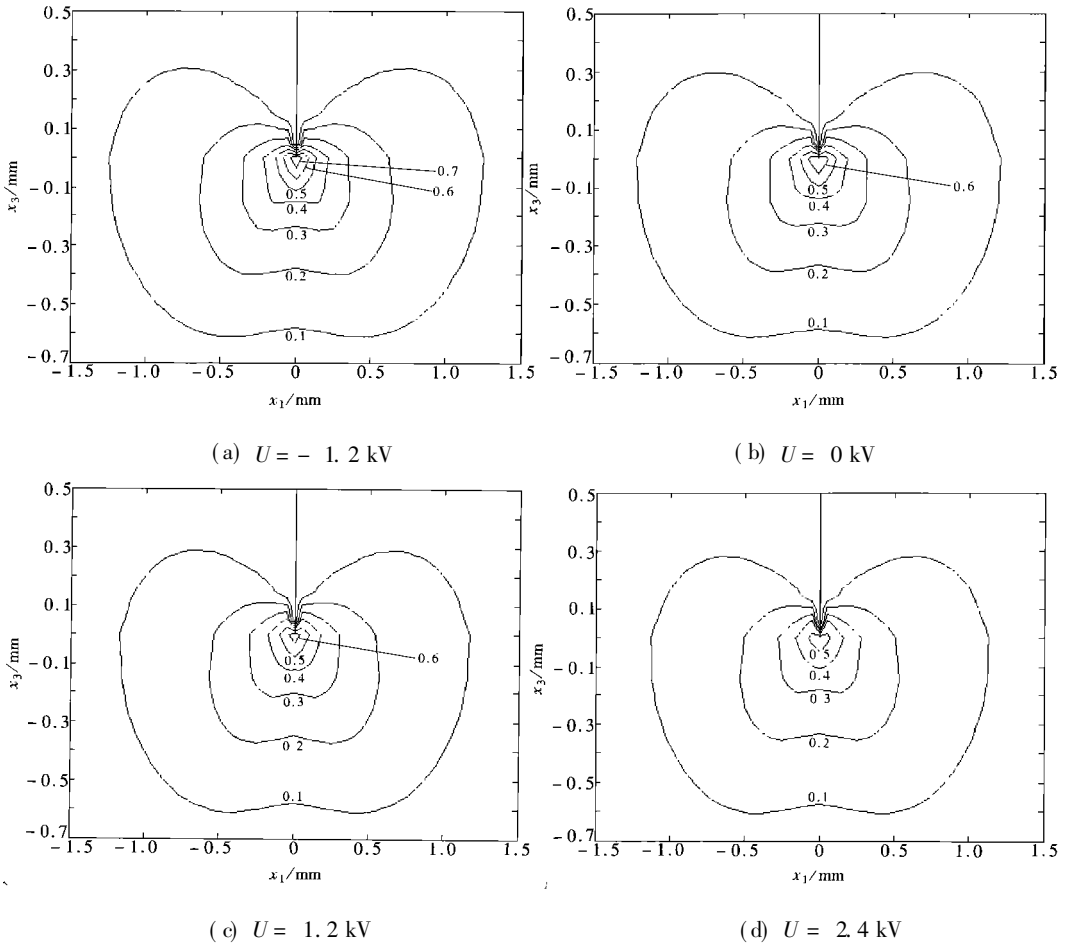


图6 电载荷对力损伤的影响

4 结 论

横观各向同性损伤的力电影响张量分别具有与压电陶瓷弹性和介电常数相同的对称性。在对称载荷作用和对称边界条件约束下,具有对称几何尺寸的压电体可能发生横观各向同性

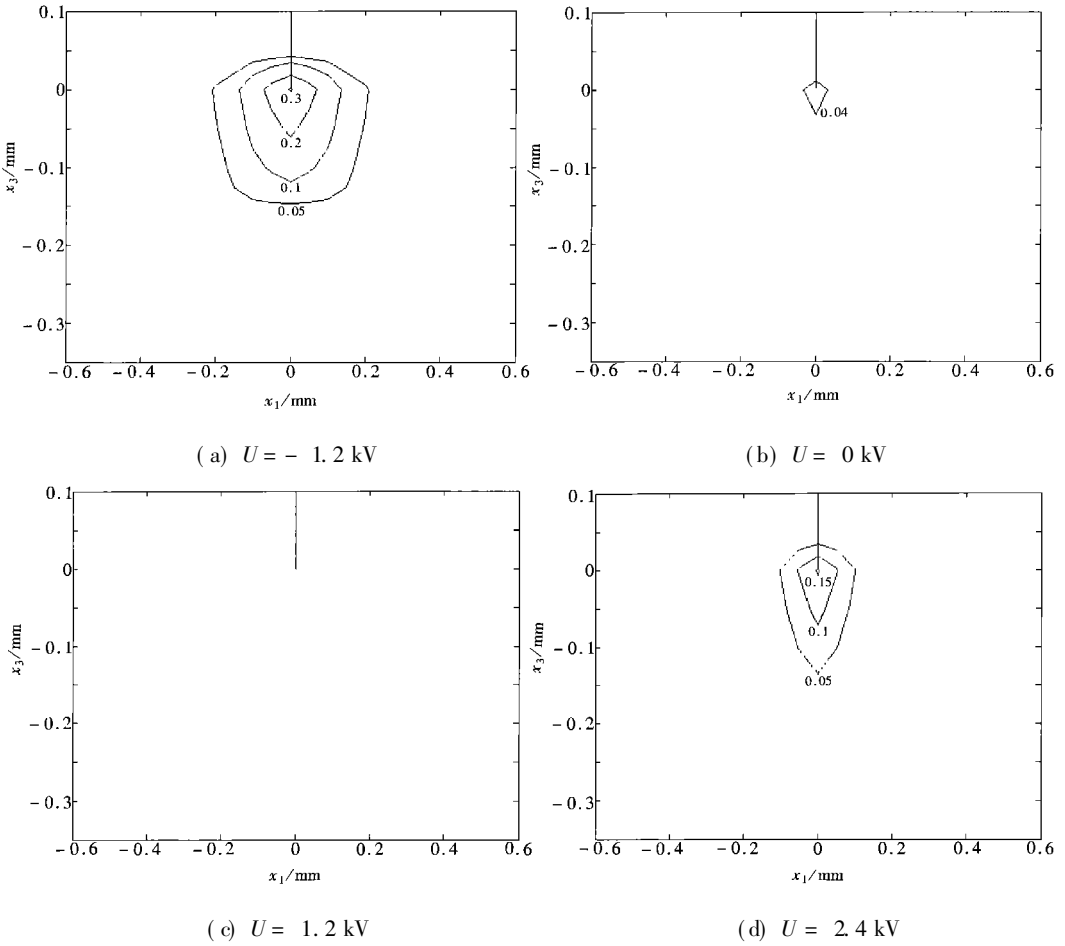


图7 电载荷对电损伤的影响

损伤 本文采用损伤本构模型,定量分析了裂纹深度、外加力电载荷对四点弯曲压电梁导电裂纹尖端附近损伤分布的影响规律,得到以下几个结论:

- 1) 裂纹深度对力电损伤的分布都有明显影响,裂纹加深,力电损伤的大小和范围都明显增大;
- 2) 力载荷对力电损伤的影响相似,随着力载荷的减小,力电损伤的大小和范围都明显增大;
- 3) 电载荷对力损伤和电损伤的影响有明显的差别,随着电压增大,裂纹尖端附近的力损伤相应减小,但区域尺寸基本不变;电损伤和其区域尺寸先是随着电压从-1.2 kV 增大到 1.2 kV 迅速减小直到零,继而随着电压继续从 1.2 kV 增大到 2.4 kV 时迅速增大

[参 考 文 献]

[1] Pak Y E. Linear electro_elastic fracture mechanics of piezoelectric materials[J]. Internat J Fracture, 1992, **54**(1): 79 - 100.

[2] Sosa H. On the fracture mechanics of piezoelectric solids[J]. Internat J Solids Struct, 1992, **29**(21): 2613 - 2622.

[3] Suo Z, Kuo C M, Barnett D M, et al. Fracture mechanics for piezoelectric ceranics[J]. J Mech Phys Solids, 1992, **40**(4): 739 - 765.

- [4] Park S B, Sun C T. Fracture criteria of piezoelectric ceramics[J]. J Am Ceram Soc, 1995, **78**(6): 1475-1480.
- [5] Heyer V, Schneider G A, Balke H, et al. A fracture criterion for conducting cracks in homogeneously poled piezoelectric PZT-PIC 151 ceramics[J]. Acta Mater, 1998, **46**(18): 6615-6622.
- [6] Gao H, Zhang T Y, Tong P. Local and global energy release rates for an electrically yielded crack in a piezoelectric ceramic[J]. J Mech Phys Solids, 1997, **45**(4): 491-510.
- [7] Krajcinovic D. Continuum damage mechanics[J]. Appl Mech Rev, 1984, **37**(1): 1-16.
- [8] YANG Xin_hua, CHEN Chuan_yao, HU Yuan_tai. A static damage constitutive model for piezoelectric materials[A]. In: Yang J S, Maugin G A Eds. The Mechanics of Electromagnetic Materials [C]. Norwell: Kluwer Academic Publishers, 2003, 259-272.
- [9] YANG Xin_hua, CHEN Chuan_yao, HU Yuan_tai. Analysis of damage near a conducting crack in a piezoelectric ceramic[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2003, **16**(2): 147-154.
- [10] YANG Xin_hua, Shen W. An advanced dynamic three-dimensional finite element method to simulate deformation damage process of laminates under impact[J]. Engng Fracture Mech, 1994, **49**(4): 631-638.

Transversely Isotropic Damage Around Conducting Crack_Tip in Four_Point Bending Piezoelectric Beam

YANG Xin_hua, DONG Liang, WANG Cheng,
CHEN Chuan_yao, HU Yuan_tai

(Department of Mechanics, Huazhong University of Science and Technology,
Wuhan 430074, P. R. China)

Abstract: A static damage constitutive model was proposed on basis of the electrical enthalpy density, and then some characteristics of transversely isotropic damage were discussed. Finally, the effects of both crack depth and applied loads on damage distributions were investigated through numerically analyzing transversely isotropic damage in a four_point bending PZT-PIC151 beam with a central conducting crack. Some conclusions were given: 1) Crack depth and mechanical loading have great influence on both mechanical and electrical damages. With their increment, the damages at crack_tip obviously increase and their region sizes also expand. 2) Effects of electrical loading on the two kinds of damages are obviously different. Electrical loading monotonously changes magnitude but region size of mechanical damage, whose effect on electrical damage is very complex.

Key words: transversely isotropic damage; conducting crack; piezoelectric ceramic; four_point bending beam