应用数学和力学,第 25 卷 第 4 期(2004 年 4 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2004) 04_0337_08

Ginzburg_Landau 方程的非齐次初边值问题*

杨灵娥[1,2], 郭柏灵[3], 徐海祥[1]

(1. 佛山大学 数学系, 广东 佛山 528000;
2. 中国工程物理研究院 研究生部, 北京 100088;
3. 北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088)

(我刊编委郭柏灵来稿)

摘要: 研究具非线性边界条件的一类广义 Ginzburg_Landau 方程解的整体存在性• 推导了 Ginzburg_Landau 方程的非齐次初边值问题光滑解的几个积分恒等式, 由此得到了解的法向导数在边界上的平方模以及解的平方模和导数的平方模估计; 通过逼近技巧、先验估计和取极限方法证明了 Ginzburg_Landau 方程的非齐次初边值问题整体弱解的存在性•

关 键 词: 广义 Ginzburg_Landau 方程; 非齐次初边值问题; 弱解; 整体存在性
中图分类号: O175.2 文献标识码: A

引 言

本文考虑非齐次初边值问题

$$u_t = \alpha_1 \Delta u - \alpha_2 f(u) \qquad x \in \Omega \subset R^n,\ t > 0, \tag{1}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \qquad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u(x, t) = Q(x, t), \qquad x \in \partial\Omega,\ t > 0, \tag{3}$$

其中 Ω 是R^n 中具有足够光滑边界$\partial\Omega$ 的有界开区域, $\alpha_j = a_j + \mathrm{i} b_j$, a_j 和 b_j 都是正常数($j = 1, 2$), $u(x, t)$ 是 x 和 t 的复值函数, $f(u) = g(|u|^2)u$, $g(s) \geqslant 0$•

关于广义 Ginzburg_Landau 方程已有很多工作, 如 R^n 中初值问题, 有界域 Ω 中带有齐次边界或周期边界条件的初边值问题等见文[1~5]• 而对于非齐次初边值问题, 作者至今未见研究• 在文献[6]中, Strauss 等通过估计法向导数$\partial u/\partial n$, 研究了非线性 Schrödinger 方程的非齐次初边值问题•

非齐次初边值问题的研究比齐次初边值问题有更多的困难, 例如, L^2 模的守恒律不再存在, 分部积分时, 在边界上出现了解的导数等• 为了研究 Ginzburg_Landau 方程的非齐次初边值问题, 我们采用[6]的方法, 结合几个积分恒等式, 通过估计法向导数$\partial u/\partial n$ 在$\partial\Omega$上的L^2 模而得到近似解的先验估计, 再通过取极限, 得到整体弱解的存在性•

本文的主要结果为:

定理 设 $u_0 \in H^1(\Omega)$, $Q \in C^3_B(\partial\Omega \times (0, +\infty))$, 当 $x \in \partial\Omega$时, $u_0(x) = Q(x, 0)$, 则对

---

* 收稿日期: 2002_10_25; 修订日期: 2003_11_25
作者简介: 杨灵娥(1963—), 女, 山西长治人, 教授, 博士(联系人. Tel: +86_757_83181929, Fax: +86_757_82983805; E_mail: yle63@sina.com.cn).

任意给定 $T > 0$, 存在问题(1)～(3)的解 $u(x, t) \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega))$, 其中方程(1)在分布意义下满足, 而边界条件(3)则理解为对几乎处处 $t \in (0, T)$, $u(\cdot, t) - Q(\cdot, t) \in H_0^1(\Omega)$.

1　恒等式及先验估计

记　$G(s) = \int_0^s g(z)\mathrm{d}z$,　$\boldsymbol{P} = \nabla u|_{\partial\Omega}$,　$\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3, \cdots, n_n)$

为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量. 由于 $\partial\Omega$ 足够光滑, 存在 R^n 到 R^n 的不依赖于 t 的光滑函数 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots, \xi_n)$ 使得

$$\xi|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{n}.$$

记 $\eta = \sum_{j=1}^n \partial_j \xi_j = \nabla\cdot\xi$, 其中 $\partial_j \xi_j = \frac{\partial \xi_j}{\partial x_j}$, 以后还会用到 $\partial_j u = \frac{\partial u}{\partial x_j}$, $j = 1, 2, \cdots, n$.

引理 1　设 u 是非齐次初边值问题(1)～(3)的光滑解, 则有下列恒等式:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega |u|^2\mathrm{d}x = 2\mathrm{Re}\,\alpha_1\int_{\partial\Omega} Q(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P})\mathrm{d}s - 2\int_\Omega (a_1|\nabla u|^2 + a_2 g(|u|^2)|u|^2)\mathrm{d}x, \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega (b_1|\nabla u|^2 + b_2 G(|u|^2))\mathrm{d}x = {}& 2\mathrm{Re}\int_{\partial\Omega}[b_1 Q_t + (a_1 b_2 + a_2 b_1) g(|Q|^2) Q](\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P})\mathrm{d}s - \\ & 2\int_\Omega [a_1 b_1 |\Delta u|^2 + a_2 b_2 g^2(|u|^2)|u|^2]\mathrm{d}x - \\ & 2(a_1 b_2 + a_2 b_1)\int_\Omega \left(g(|u|^2)|\nabla u|^2 + \frac{g'(|u|^2)}{2}|\nabla|u|^2|^2\right)\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Im}\int_\Omega u(\xi\cdot\nabla u)\mathrm{d}x = {}& \int_{\partial\Omega}[2b_1(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P})^2 - b_1|\boldsymbol{P}|^2 + \mathrm{Im}(\alpha_1\eta Q(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P}))]\mathrm{d}s + \\ & \int_{\partial\Omega}(\mathrm{Im}QQ_t - b_2 G(|Q|^2))\mathrm{d}s + b_2\int_\Omega (G(|u|^2) - g(|u|^2)|u|^2)\eta\mathrm{d}x - \\ & 2b_1\mathrm{Re}\int_\Omega \sum_{s,r=1}^n (\partial_s\xi_r\partial_r u\partial_s u)\mathrm{d}x + 2a_1\mathrm{Im}\int_\Omega (\xi\cdot\nabla u)\Delta u\mathrm{d}x - \\ & \mathrm{Im}\int_\Omega (2a_2 g(|u|^2)u(\xi\cdot\nabla u) + \alpha_1(\nabla u\cdot\nabla\eta)u)\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{6}$$

证明　为了证明(4), 我们在方程(1)的两边同乘以 $2u$, 在 Ω 上积分并取实部得

$$2\mathrm{Re}\int_\Omega u u_t\mathrm{d}x = 2\mathrm{Re}\int_\Omega u(\alpha_1\Delta u - \alpha_2 f(u))\mathrm{d}x,$$

$$\text{左边} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega |u|^2\mathrm{d}x,$$

$$\begin{aligned}\text{右边} = {}& 2\mathrm{Re}\,\alpha_1\int_\Omega \left[\sum_{s=1}^n \partial_s(u\partial_s u) - |\nabla u|^2\right]\mathrm{d}x - 2a_2\int_\Omega g(|u|^2)|u|^2\mathrm{d}x = \\ & 2\mathrm{Re}\,\alpha_1\int_{\partial\Omega} Q(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P})\mathrm{d}s - 2\int_\Omega (a_1|\nabla u|^2 + a_2 g(|u|^2)|u|^2)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因此, 恒等式(4) 成立•

为了证明(5), 我们用 $2u_t$ 乘以方程(1) 的两边, 在 Ω 上积分并取虚部后得到

$$
\begin{aligned}
0 = {} & 2\mathrm{Im}\int_\Omega \alpha_1 \Delta u u_t \mathrm{d}x - 2\mathrm{Im}\alpha_2\int_\Omega g(|u|^2)uu_t\mathrm{d}x = \\
& 2\mathrm{Im}\alpha_1\int_\Omega \sum_{s=1}^{n}\left[\partial_s(u_t\partial_s u) - \partial_s u_t\partial_s u\right]\mathrm{d}x - \\
& b_2\int_\Omega g(|u|^2)|u|_t^2\mathrm{d}x - 2a_2\mathrm{Im}\int_\Omega g(|u|^2)uu_t\mathrm{d}x = \\
& 2\mathrm{Im}\alpha_1\int_{\partial\Omega}Q_t(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P})\mathrm{d}s - b_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x - 2a_1\mathrm{Im}\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla u_t\mathrm{d}x - \\
& b_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega G(|u|^2)\mathrm{d}x - 2a_2\mathrm{Im}\int_\Omega g(|u|^2)uu_t\mathrm{d}x = \\
& 2\mathrm{Im}\alpha_1\int_{\partial\Omega}Q_t(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P})\mathrm{d}s - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\left[b_1|\nabla u|^2 + b_2G(|u|^2)\right]\mathrm{d}x - \\
& 2\mathrm{Im}\int_\Omega\left[a_1\nabla u\cdot\nabla u_t + a_2g(|u|^2)uu_t\right]\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\left[b_1|\nabla u|^2 + b_2G(|u|^2)\right]\mathrm{d}x = \\
& 2\mathrm{Im}\alpha_1\int_{\partial\Omega}Q_t(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P})\mathrm{d}s - 2\mathrm{Im}\int_\Omega\left[a_1\nabla u\cdot\nabla u_t + a_2g(|u|^2)uu_t\right]\mathrm{d}x \cdot
\end{aligned}
\tag{7}
$$

为了计算等式右端第二项, 根据方程(1), 我们有:

$$
\begin{aligned}
& a_1\nabla u\cdot\nabla u_t + a_2g(|u|^2)uu_t = \\
& a_1\sum_{s=1}^{n}\partial_s(u_t\partial_s u) - a_1u_t\Delta u + a_2g(|u|^2)uu_t = \\
& a_1\sum_{s=1}^{n}\partial_s(u_t\partial_s u) - (a_1\Delta u - a_2g(|u|^2)u)(\alpha_1\Delta u - \alpha_2g(|u|^2)u),
\end{aligned}
$$

在 Ω 上积分并取虚部得

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{Im}\int_\Omega\left[a_1\nabla u\cdot\nabla u_t + a_2g(|u|^2)uu_t\right]\mathrm{d}x = \\
& a_1\mathrm{Im}\int_{\partial\Omega}Q_t(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P})\mathrm{d}s + \int_\Omega(a_1b_1|\Delta u|^2 + a_2b_2g^2(|u|^2)|u|^2)\mathrm{d}x - \\
& (a_1b_2 + a_2b_1)\mathrm{Re}\int_\Omega g(|u|^2)u\Delta u\mathrm{d}x = \\
& a_1\mathrm{Im}\int_{\partial\Omega}Q_t(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P})\mathrm{d}s - (a_1b_2 + a_2b_1)\mathrm{Re}\int_{\partial\Omega}g(|Q|^2)Q(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P})\mathrm{d}s + \\
& \int_\Omega\left[a_1b_1|\Delta u|^2 + a_2b_2g^2(|u|^2)|u|^2\right]\mathrm{d}x + \\
& (a_1b_2 + a_2b_1)\int_\Omega\left[g(|u|^2)|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}g'(|u|^2)|\nabla|u|^2|^2\right]\mathrm{d}x \cdot
\end{aligned}
$$

将上述等式代回(7) 式, 易得恒等式(5) •

为了证明(6)• 通过直接计算, 我们有

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Im}\int_\Omega u(\xi\cdot\nabla u)\mathrm{d}x =
$$

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Im}\int_\Omega\Big[2\mathrm{i}\,\operatorname{Im}(u_t(\xi\cdot\nabla u))+\sum_{s=1}^{n}\partial_s(uu_t\xi_s)-\eta uu_t\Big]\mathrm{d}x=\\
&2\operatorname{Im}\int_\Omega u_t(\xi\cdot\nabla u)\mathrm{d}x+\operatorname{Im}\int_{\partial\Omega}QQ_t\mathrm{d}s-\operatorname{Im}\int_\Omega\eta uu_t\mathrm{d}x,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

而

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Im}\int_\Omega u_t(\xi\cdot\nabla u)\mathrm{d}x=\\
&\quad\operatorname{Im}\int_\Omega(\xi\cdot\nabla u)(\alpha_1\Delta u-\alpha_2 g(|u|^2)u)\mathrm{d}x=\\
&\quad\operatorname{Im}\int_\Omega(\xi\cdot\nabla u)(a_1\Delta u-a_2 g(|u|^2)u)\mathrm{d}x+\\
&\quad\operatorname{Re}\int_\Omega(\xi\cdot\nabla u)(b_1\Delta u-b_2 g(|u|^2)u)\mathrm{d}x=\\
&\quad\operatorname{Im}\int_\Omega(\xi\cdot\nabla u)(a_1\Delta u-a_2 g(|u|^2)u)\mathrm{d}x+\\
&\quad b_1\int_{\partial\Omega}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P})^2\mathrm{d}s-\frac{b_1}{2}\int_\Omega\xi\cdot\nabla(|\nabla u|^2)\mathrm{d}x-\\
&\quad b_1\operatorname{Re}\int_\Omega\sum_{s,l=1}^{n}(\partial_s\xi_l\partial_l u\partial_s u)\mathrm{d}x-\frac{b_2}{2}\int_\Omega\xi\cdot\nabla G(|u|^2)\mathrm{d}x=\\
&\quad b_1\int_{\partial\Omega}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P})^2\mathrm{d}s-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(b_1|\boldsymbol{P}|^2+b_2G(|Q|^2))\mathrm{d}s+\\
&\quad\frac{1}{2}\int_\Omega(b_1|\nabla u|^2+b_2G(|u|^2))\eta\mathrm{d}x+\\
&\quad\operatorname{Im}\int_\Omega(\xi\cdot\nabla u)(a_1\Delta u-a_2 g(|u|^2)u)\mathrm{d}x-\\
&\quad b_1\operatorname{Re}\int_\Omega\sum_{s,l=1}^{n}(\partial_s\xi_l\partial_l u\partial_s u)\mathrm{d}x,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Im}\int_\Omega\eta uu_t\mathrm{d}x=\\
&\quad\operatorname{Im}\int_\Omega\eta u(\alpha_1\Delta u-\alpha_2 g(|u|^2)u)\mathrm{d}x=\\
&\quad\operatorname{Im}\int_{\partial\Omega}\alpha_1\eta Q(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P})\mathrm{d}s-\operatorname{Im}\left(\alpha_1\int_\Omega((\nabla\eta\cdot\nabla u)u+\eta|\nabla u|^2)\mathrm{d}x\right)+\\
&\quad b_2\int_\Omega\eta g(|u|^2)|u|^2\mathrm{d}x=\\
&\quad\operatorname{Im}\left(\alpha_1\int_{\partial\Omega}\eta Q(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P})\mathrm{d}s\right)-\operatorname{Im}\left(\alpha_1\int_\Omega(\nabla\eta\cdot\nabla u)u\mathrm{d}x\right)+\\
&\quad\int_\Omega(b_1|\nabla u|^2+b_2 g(|u|^2)|u|^2)\eta\mathrm{d}x,
\end{aligned}
\tag{10}
$$

结合式(8)、(9)和(10),可得(6)式.

引理2 对于固定的 $T>0$, 设 u 是非齐次初边值问题(1)~(3)的光滑解, $u_0\in H^1(\Omega)$, $G(|u_0|^2)\in L^1(\Omega)$, $g(s)\geqslant 0$, $g'(s)\geqslant 0$, $Q\in C_B^3(\partial\Omega\times[0,+\infty))$, 那么, 存在不依赖于 u 的常数 $C_T>0$, 使得对所有 $0\leqslant t\leqslant T$ 成立

$$
\int_\Omega\left[|u(x,t)|^2+b_1|\nabla u(x,t)|^2+b_2G(|u(x,t)|^2)\right]\mathrm{d}x\leqslant C_T,
\tag{11}
$$

$$\int_0^T\int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|^2 \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \leqslant C_T, \tag{12}$$

$$\int_0^T\int_\Omega\left[a_1|\nabla u|^2 + a_2 g(|u|^2)|u|^2 + a_1 b_1|\Delta u|^2 + a_2 b_2 g^2(|u|^2)|u|^2\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqslant C_T, \tag{13}$$

其中 C_T 依赖于T, Ω, Q, u_0, ξ·

证明　记

$$m(t) = \int_\Omega(|u(x,t)|^2 + b_1|\nabla u(x,t)|^2 + b_2 G(|u(x,t)|^2))\mathrm{d}x,$$

我们用恒等式(4)、(5)来建立 $m(t)$ 的估计· (4)、(5)相加并且关于 t 积分后得

$$\begin{aligned}
&m(t) + 2\int_0^t\int_\Omega(a_1|\nabla u|^2 + a_2 g(|u|^2)|u|^2 + \\
&\quad a_1 b_1|\Delta u|^2 + a_2 b_2 g^2(|u|^2)|u|^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau + \\
&\quad 2(a_1 b_2 + a_2 b_1)\int_0^t\int_\Omega\Big[g(|u|^2)|\nabla u|^2 + \\
&\quad \frac{g'(|u|^2)}{2}|\nabla|u|^2|^2\Big]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau \leqslant \\
&\quad m(0) + c_1\left(\int_0^t\int_{\partial\Omega}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P})^2\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau\right)^{1/2}\cdot
\end{aligned} \tag{14}$$

由于 $g(s) \geqslant 0$, $g'(s) \geqslant 0$, a_1, b_1, a_2, $b_2 \geqslant 0$, 于是, 由(14)式我们有

$$m(t) \leqslant m(0) + c_1 J, \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
&2\int_0^t\int_\Omega(a_1|\nabla u|^2 + a_2 g(|u|^2)|u|^2 + a_1 b_1|\Delta u|^2 + \\
&\quad a_2 b_2 g^2(|u|^2)|u|^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau \leqslant \\
&\quad m(0) + c_1 J,
\end{aligned} \tag{16}$$

其中 $\qquad J^2 = \int_0^t\int_{\partial\Omega}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P})^2\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau$·

由于在 $\partial\Omega$ 上的每一点处成立

$$|\boldsymbol{P}|^2 = (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P})^2 + (A\cdot\boldsymbol{P})^2 = (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P})^2 + (A\cdot\nabla Q)^2, \tag{17}$$

其中 $A\cdot\boldsymbol{P}$ 表示向量 $\boldsymbol{P}$ 的切向分量· 将(17)式代入(6)式并在$[0,t)$上积分并利用向量 ξ 的直到二阶导数有界的假设· 可得

$$\begin{aligned}
b_1 J^2 \leqslant &\int_\Omega|u(\xi\cdot\nabla u)|\mathrm{d}x + \int_\Omega|u_0(\xi\cdot\nabla u_0)|\mathrm{d}x + \\
&b_1\int_0^t\int_{\partial\Omega}|A\cdot\nabla Q|^2\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau + |\alpha_1|\int_0^t\int_{\partial\Omega}|\eta Q||\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P}|\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau + \\
&\int_0^t\int_{\partial\Omega}(|QQ_t| + b_2 G(|Q|^2))\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau + \\
&c\int_0^t\int_\Omega\big[G(|u|^2) + g(|u|^2)|u|^2 + |\nabla u|^2 + |\nabla u||\Delta u| + \\
&g(|u|^2)|u||\nabla u| + |\nabla u||u|\big]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau \leqslant \\
&c_2 + c_3 J + c_4 m(t) + c_5\int_0^t m(\tau)\mathrm{d}\tau + c_6(m(0) + c_1 J) \leqslant \\
&c_2 + (c_4 + c_6)m(0) + c_5 m(0)t +
\end{aligned}$$

$$[c_3+(c_4+c_6)c_1]J+c_5c_1\int_0^t J(\tau)\mathrm{d}\tau\leqslant$$
$$\frac{b_1}{2}J^2+c_1+c_2t+c_3\int_0^t J(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

因此

$$J(t)\leqslant\left[\frac{2}{b_1}\left(c_1+c_2t+c_3\int_0^t J(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\right]^{1/2}. \tag{18}$$

若记

$$y(t)=\frac{2}{b_1}\left(c_1+c_2t+c_3\int_0^t J(\tau)\mathrm{d}\tau\right),$$

则由(18)式可得

$$y'(t)\leqslant\frac{2}{b_1}(c_2+c_3\sqrt{y}).$$

上式从0到 t 积分后,有

$$\sqrt{y(t)}-\frac{c_2}{c_3}\ln\frac{c_2+c_3\sqrt{y(t)}}{c_2+c_3\sqrt{(2/b_1)c_1}}\leqslant\frac{c_3}{b_1}t+\sqrt{\frac{2}{b_1}c_1}.$$

现考虑函数

$$h(s)=s-\frac{c_2}{c_3}\ln\frac{c_2+c_3s}{c_2+c_3\sqrt{(2/b_1)c_1}},$$

由于对 $\forall s\geqslant 0$, 有

$$h'(s)=\frac{c_3s}{c_2+c_3s}\geqslant 0,$$

故 $h(s)$ 是递增函数,因此

$$\sqrt{y(t)}\leqslant h^{-1}\left(\frac{c_3t}{b_1}+\sqrt{\frac{2}{b_1}c_1}\right), \tag{19}$$

其中, h^{-1} 是函数 $h(s)$ 的反函数. 于是

$$J(t)\leqslant h^{-1}\left(\frac{c_3t}{b_1}+\sqrt{\frac{2}{b_1}c_1}\right)\leqslant h^{-1}\left(\frac{c_3T}{b_1}+\sqrt{\frac{2}{b_1}c_1}\right).$$

结合不等式(15)、(16),易知存在常数 $C_T>0$, 使得估计式(11)、(12)、(13)成立.

2 逼近方程整体解的存在性

由于没有解 u 的L^2 模估计,我们通过对非线性项的截断来逼近原方程. 设 q_0 是函数 $|Q|$ 的上界,对于任意 $k>q_0$ 定义

$$f_k(u)=\begin{cases}g(|u|^2)u, & |u|<k,\\ g(k^2)u, & |u|\geqslant k.\end{cases} \tag{20}$$

我们研究"截断"问题的解的存在性.

引理3 设 $u_0\in H^1(\Omega)$,则对任意 $k>q_0$, $T>0$, "截断"问题

$$\begin{cases}u_t=\alpha_1\Delta u-\alpha_2 f_k(u), & x\in\Omega,\ t>0,\\ u(x,0)=u_0(x), & x\in\Omega,\\ u(x,t)=Q(x,t), & x\in\partial\Omega,\ t>0,\end{cases} \tag{21}$$

有解 $u^{(k)}\in C([0,T);H^1(\Omega))$.

证明　对于每个 $k > q_0$, 由 q_0 的定义知 $f_k(Q) = f(Q)$, 且 f_k 整体 Lipschitz 连续. 我们把问题(21) 转化为齐次初边值问题. 为此, 设 $Q(x, t) \in C^3(\Omega \times [0, +\infty))$ 满足

$$\begin{cases} \Delta Q = \dfrac{1}{\alpha_1}(Q_t + \alpha_2 f(Q)), & \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ Q = Q, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上.} \end{cases} \tag{22}$$

考虑齐次初边值问题

$$\begin{cases} v_t = \alpha_1 \Delta v - h_k, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ v(x, 0) = u_0(x) - Q(x, 0), & x \in \Omega, \\ v(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0. \end{cases} \tag{23}$$

其中, $h_k = \alpha_2 f_k(v + Q) + Q_t - \alpha_1 \Delta Q$. 显然, $h_k|_{\partial\Omega} = 0$. 由标准的压缩映象原理可证: 存在 $T_k > 0$, 使得问题(23) 存在唯一解 $v \in C([0, T_k); H^1(\Omega))$. 于是, $u = v + Q$ 是问题(21) 在 $[0, T_k)$ 中的解.

下面证明问题(21) 的解整体存在.

我们用引理 2 估计问题(21) 的解 u 的 H^1 模. 由于引理 1 和引理 2 对解 u 有光滑性要求, 若我们用充分光滑的函数逼近函数 u_0、Q、f_k, 则可得到问题(21) 的光滑解 $u^{(k)}$, 容易验证, 问题(21) 的光滑解 $u^{(k)}$ 同样满足引理 1 的恒等式(4) ~ (6)(此时, f 被 f_k 代替). 类似于引理 2, 我们可得到 $u^{(k)}$ 关于 t、k 一致的估计. 因此, 由标准的延拓技巧, 可得问题(21) 的解 $u^{(k)}$ 整体存在, 并且有类似于(11) ~ (13) 的关于 k 一致的估计. 　　引理 3 证毕.

3　定理的证明

由引理 2 及引理 3 的证明过程可知, 对于固定 $T > 0$, 存在不依赖于 k 的常数 C_T, 使得

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \| u^{(k)}(t) \|_{H^1} \leqslant C_T,$$

$$\int_0^T \int_\Omega (| \Delta u^{(k)} |^2 + | f_k(u^{(k)}) |^2 + | f_k(u^{(k)}) u^{(k)} |) \mathrm{d}x \mathrm{d}t \leqslant C_T,$$

因此, 存在 $u^{(k)}$ 的子列(仍记为 $u^{(k)}$) 及 $u \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$ 满足

$$\begin{aligned} & u^{(k)} \rightarrow u, && \text{在 } L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \text{ 中弱* 收敛;} \\ & u^{(k)} \rightarrow u, && \text{在 } L^2(0, T; H^2(\Omega)) \text{ 中弱收敛;} \\ & f_k(u^{(k)}) \rightarrow w, && \text{在 } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ 中弱收敛.} \end{aligned}$$

由[7, 第一章] 定理 4.8 知, $u^{(k)}$ 在 $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ 中强收敛于 u 且 $u^{(k)}$ 在 $\Omega \times [0, T)$ 中几乎处处收敛于 u, 另由[7, 第一章] 定理 4.7 可得 $f_k(u^{(k)})$ 在 $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ 中弱收敛于 $f(u)$. 因此, 由问题(21) 的解取极限后知 u 是问题(1) ~ (3) 的解. 　　定理证毕.

[参　考　文　献]

[1]　Duan J, Holmes P, Titi E S. Global existence theory for a generalized Ginzburg_Landau equation[J]. Nonlinearity, 1992, **5**(6): 1303—1314.

[2]　Duan J, Holmes P. On the Cauchy problem of generalized Ginzburg_Landau equation[J]. Nonlinear Anal, TMA, 1994, **22**(8): 1033—1040.

[3]　GUO Bo_ling, GAO Hong_jun. Finite dimensional behavior of generalized Ginzburg_Landau equation

[J]. Progress in Natural Science, 1995, **5**(6): 649—610.

[4] Doering C R, Gibbon J D, Levermore C D. Weak and strong solutions of the complex Ginzburg_Landau equation[J]. Phys D, 1994, **71**(3): 285—318.

[5] Bartuccelli M V, Constantin P, Doering C, et al. On the possibility of soft and hard turbulence in the complex Ginzburg_Landau equation[J]. Phys D, 1990, **44**(3): 421—444.

[6] Watler Strauss, Charles B U. An inhomogeneous boundary value problem for nonlinear Schrödinger equations[J]. J Differential Equations, 2001, **173**(1): 79—91.

[7] 郭柏灵. 粘性消去法和差分格式的粘性[M]. 北京: 科学出版社, 1993, 26—39.

Inhomogeneous Initial Boundary Value Problem for Generalized Ginzburg_Landau Equations

YANG Ling_e[1,2], GUO Bo_ling[3], XU Hai_xiang[1]

(1. Department of Mathematics, Foshan University, Foshan, Guangdong 528000, P.R.China;

2. Graduate School, China Academy of Engineering Physics, Beijing 100088, P.R.China;

3. Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, P.O.Box 8009, Beijing 100088, P.R.China)

Abstract: The existence of global weak solution for a class of generalized Ginzburg_Landau equations with an inhomogeneous boundary condition was studied. Some integral indentities of smooth solution of inhomogeneous initial boundary value problem of Ginzburg_Landau equations were deduced, by which a priori estimates of the square norm on boundary of normal derivative and the square norm of partial derivatives were obtained. Then the existence of global weak solution for an inhomogeneous initial boundary value problem of Ginzburg_Landau equations was proved by the method of approximation technique and a priori estimates and making limit.

Key words: generalized Ginzburg_Landau equation; inhomogeneous initial boundary value problem; weak solution; global existence