

文章编号: 1000\_0887(2005) 04\_0437\_10

# 边界面上的倾斜移动荷载<sup>\*</sup>

R·库玛<sup>1</sup>, P·额拉瓦尼亚<sup>2</sup>

(1. 库鲁克西察大学 数学系, 库鲁克西察, 那亚那 印度;

2. S. S. E. T. 学院 数学系, 德热巴士, 印度)

(周哲玮推荐)

**摘要:** 在无限大微极正交各向异性弹性介质上覆盖弹性介质的弹性半空间的任意点上, 作用着任意方向倾斜的移动荷载, 给出了位移分量和应力的解析表达式. 假设倾斜荷载是法向荷载和切向荷载的线性组合. 利用 Fourier 变换采用特征值方法, 并利用数值技术反演了 Fourier 变换, 给出了铝环氧树脂复合材料的数值结果图形.

**关键词:** 微极; 正交各向异性; 倾斜移动荷载; 特征值; Fourier 变换

**中图分类号:** O343. 8; O33      **文献标识码:** A

## 引 言

对许多工程现象, 包括固体材料、地质材料和复合材料的动力响应, 各向同性性质的假设, 不可能涵盖连续介质响应的某些特殊性质. 各向异性问题的提出和求解要比各向同性问题困难和复杂得多. 近年来, 各向异性连续介质的弹性动力响应已引起了一些研究者的重视. 特别是横观各向同性和正交各向异性材料, 得到了更正规的研究. 这两类材料在平面应变和平面应力上区别不大.

微极弹性理论是由 Eringen(1966)<sup>[1]</sup> 引入并发展的, 非常适宜研究固体材料的变形特性, 因而引起了广泛的关注, 而经典理论是无能为力的. 微极理论被认为对于研究诸如条状物组成的材料特别有效, 这些材料具有微旋效应, 可以支承物体并且表面耦合. 关于微极正交各向异性介质的文献显示, Iesan(1973, 1974)<sup>[2~4]</sup> 分析了均匀、正交各向异性弹性体的静态平面微极应变问题, 均匀、正交各向异性柱体在微极线弹性理论中的扭转问题, 以及端点耦合的正交各向异性微极弹性梁的弯曲问题. Nakamura 等人(1984)<sup>[5]</sup> 应用有限元法研究了正交各向异性微极弹性问题. 最近, Kumar 和 Choudhary(2002, 2003)<sup>[6~10]</sup> 讨论了正交各向异性微极连续介质的多种问题.

移动荷载的动力响应是一个受多种技术和地球物理环境关注的问题, 并且一些现代研究涉及此问题. 例如, 在固体动力学中就是很重要的问题. 冲击波(爆炸产生的地表压力波) 或

\* 收稿日期: 2003\_06\_05

作者简介: R·库玛(E-mail: rajneesh\_kuk@rediffmail.com);

P·额拉瓦尼亚(E-mail: praveen\_2117@rediffmail.com).

本文原文为英文, 由吴承平译, 张禄坤校.

超声波飞行器会引发地表运动和应力。许多工程分支学科都需要进行此类研究,例如桥梁、铁路、受压力波作用的梁,以及两相流作用的管道系统。其他应用包括接触力学范围的类似问题,高速火箭车在钢轨上的滑动问题。许多移动荷载问题的求解,都要利用势函数。利用特征值方法,可以很方便地用矩阵形式直接求解耦合形式的方程,而势函数法需要对方程解耦。许多作者(1999, 2001)<sup>[11~13]</sup>用弹性体理论讨论移动荷载问题。Kumar 等人(1992, 2000, 2002, 2003)<sup>[14~17]</sup>利用微极弹性理论研究了移动荷载的稳态响应问题。

一些学者(1969, 1993, 2003)<sup>[18~20]</sup>用弹性体理论讨论了倾斜荷载作用问题。其他荷载,例如带状荷载、连续的线荷载等引起的变形,也可类似求得。求得介质任意点的变形,对于采矿产生的震动和地壳钻孔周围的变形场分析是有益的。由于它可以整体计算荷载源区域周围的变形场,因而也可以对地震源和火山源进行理论研究。但至今无人尝试利用微极弹性理论研究倾斜移动荷载的响应。

## 1 问题的提出和求解

我们考虑一个无限小微极正交各向异性介质上覆盖一层弹性介质的半空间,其  $y$  轴竖直向下。设有一个倾斜线荷载  $F_0$ (每单位长度)作用在  $z$  轴的交界面上,与  $y$  轴成  $\theta$  角(见图 1)。 $F_0$  以匀速  $U$  沿  $x$  轴负向移动。当荷载移动某一时间,瞬态影响已消失后,位移出现在随荷载移动的坐标系中。

Eringen(1968)<sup>[21]</sup>和 Iesan(1973)<sup>[2]</sup>提出的不考虑体力和体耦合的正交各向异性固体基本方程可写为如下:

$$\left[ A_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + A_{88} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] u_1 + (A_{12} + A_{78}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} - K_1 \frac{\partial \phi_3}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$(A_{12} + A_{78}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + \left[ A_{77} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] u_2 - K_2 \frac{\partial \phi_3}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \quad (2)$$

$$\left[ B_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + B_{44} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \aleph \right] \phi_3 + K_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} + K_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = \vartheta \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial t^2}, \quad (3)$$

$$t_{22} = A_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial u_2}{\partial y}, \quad (4)$$

$$t_{21} = A_{78} \frac{\partial u_2}{\partial x} + A_{88} \frac{\partial u_1}{\partial y} + \phi_3 (A_{88} - A_{78}), \quad (5)$$

$$m_{23} = B_{44} \frac{\partial \phi_3}{\partial y}. \quad (6)$$

其中

$$K_1 = A_{78} - A_{88}, \quad K_2 = A_{77} - A_{78}, \quad \aleph = K_2 - K_1. \quad (7)$$

在这些关系式中,我们采用下列记号:  $t_{ij}$  为力应力张量分量;  $m_{ij}$  为耦合应力张量分量;  $u_i$

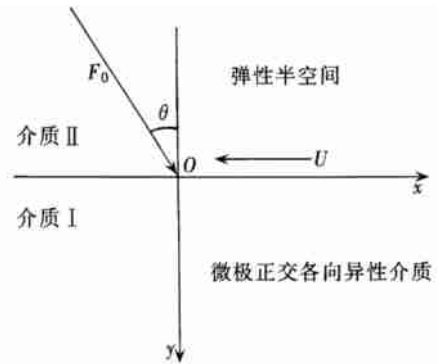


图 1 倾斜荷载作用示意图

为位移向量分量;  $\phi_3$  为微旋转向量分量;  $A_{11}, A_{12}, A_{77}, A_{78}, A_{88}, A_{22}, B_{44}, B_{66}$  为材料性质常数;  $\rho$  为密度;  $j$  为微惯量

弹性体的运动方程和应力应变关系由 Ewing, Jardetzky 和 Press(1957)<sup>[22]</sup> 给出为

$$(\lambda^0 + \mu^0) \cdot (\cdot \cdot \cdot \mathbf{w}) + \mu^0 (\cdot \cdot \cdot^2 \mathbf{w}) = \rho^0 \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2}, \quad (8)$$

$$t_{ij}^0 = \lambda^0 \theta \delta_{ij} + 2\mu^0 e_{ij}, \quad (9)$$

其中

$$\theta = w_{1,1} + w_{2,2} + w_{3,3}, \quad e_{ij} = \frac{w_{i,j} + w_{j,i}}{2}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (10)$$

对二维问题, 我们设

$$\mathbf{w} = (w_1, w_2, 0), \quad (11)$$

参照 Fung(1968) 的文献[23], 引入 Galilean 变换

$$x^* = x + Ut, \quad y^* = y, \quad t^* = t, \quad (12)$$

则边界条件与  $t^*$  无关, 并取如下无量纲变量

$$\begin{cases} x' = \frac{\omega^*}{c_1} x^*, & y' = \frac{\omega^*}{c_1} y^*, & u_1 = \frac{\omega^*}{c_1} u_1, & u_2 = \frac{\omega^*}{c_1} u_2, & \phi_3 = \frac{A_{11}}{K_1} \phi_3, \\ t'_{ij} = \frac{t_{ij}}{A_{11}}, & m'_{ij} = \frac{c_1}{B_{44} \omega^*} m_{ij}, & w_1 = \frac{\omega^*}{c_1} w_1, & w_2 = \frac{\omega^*}{c_1} w_2, & t'_{ij} = \frac{t_{ij}^0}{\lambda}, \end{cases} \quad (13)$$

其中

$$\omega^{*2} = \frac{\mathcal{N}}{\rho}, \quad c_1^2 = \frac{A_{11}}{\rho}. \quad (14)$$

利用(12)、(13), 对方程(1)~(3)应用 Fourier 变换

$$f(\xi, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{i\xi x} dx, \quad (15)$$

得结果方程组(进入稳态后)

$$u_1'' = b_{11}u_1 + e_{12}u_2 + e_{13}\phi_3, \quad (16)$$

$$u_2'' = b_{22}u_2 + e_{21}u_1 + b_{23}\phi_3, \quad (17)$$

$$\phi_3'' = b_{33}\phi_3 + e_{31}u_1 + b_{32}u_2, \quad (18)$$

其中上标眉线表示对  $z$  的微分, 并且

$$\begin{cases} b_{11} = \frac{\xi^2(A_{11} - \rho U^2)}{A_{88}}, & b_{22} = \frac{\xi^2(A_{77} - \rho U^2)}{A_{22}}, & b_{23} = \frac{i\xi K_1 K_2}{A_{11} A_{22}}, \\ b_{32} = \frac{i\xi^2 K_2 A_{11}}{\omega^{*2} K_1 B_{44}}, & b_{33} = \frac{1}{B_{44}} \left[ \xi^2(B_{66} - \rho U^2 j) + \frac{\mathcal{N} c_1^2}{\omega^{*2}} \right], \\ e_{12} = \frac{i\xi(A_{12} + A_{78})}{A_{88}}, & e_{13} = \frac{K_1^2}{A_{11} A_{88}}, & e_{21} = \frac{i\xi(A_{12} + A_{78})}{A_{22}}, & e_{31} = -\frac{A_{11} c_1^2}{B_{44} \omega^{*2}}. \end{cases} \quad (19)$$

方程(16)~(18)可以写为

$$\frac{d}{dy} \mathbf{W}(\xi, y) = \mathbf{A}(\xi) \mathbf{W}(\xi, y), \quad (20)$$

其中

$$\begin{cases} \mathbf{W} = \begin{pmatrix} V \\ V' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & 0 & 0 \\ e_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{cases} \quad (21)$$

$\mathbf{O}$  和  $\mathbf{I}$  分别表示 3 阶零矩阵和单位矩阵。

为解方程(20), 我们设

$$\mathbf{W}(\xi, y) = \mathbf{X}(\xi) e^{qy}, \quad (22)$$

这将导致特征值问题。对应于矩阵  $\mathbf{A}$  的特征方程为

$$|\mathbf{A} - q\mathbf{I}| = 0, \quad (23)$$

将上式展开得

$$q^6 + \lambda_1 q^4 + \lambda_2 q^2 + \lambda_3 = 0, \quad (24)$$

其中

$$\begin{cases} \lambda_1 = - (e_{12}e_{21} + e_{13}e_{31} + b_{11} + b_{22} + b_{33}), \\ \lambda_2 = e_{12}(e_{21}b_{33} - b_{23}e_{31}) + e_{13}(b_{22}e_{31} - e_{21}b_{32}) + \\ \quad b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32} + b_{11}(b_{22} + b_{33}), \\ \lambda_3 = b_{11}(b_{23}b_{32} - b_{22}b_{33}). \end{cases} \quad (25)$$

矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值是方程(24)的特征根。对应于特征值  $q_s$  的向量  $\mathbf{X}(\xi)$  可由解齐次方程

$$[\mathbf{A} - q\mathbf{I}]\mathbf{X}(\xi) = \mathbf{0} \quad (26)$$

确定。特征向量  $\mathbf{X}_s(\xi)$  ( $s = 1, 2, \dots, 6$ ), 由下式给出

$$\mathbf{X}_s(\xi) = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{s1}(\xi) \\ \mathbf{X}_{s2}(\xi) \end{pmatrix}, \quad (27)$$

其中

$$\mathbf{X}_{s1}(\xi) = \begin{pmatrix} q_s \\ a_s \\ b_s \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_{s2}(\xi) = \begin{pmatrix} q_s^2 \\ a_s q_s \\ b_s q_s \end{pmatrix}, \quad q = q_s, \quad s = 1, 2, 3, \quad (28)$$

$$\mathbf{X}_{j1}(\xi) = \begin{pmatrix} -q_j \\ a_j \\ b_j \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_{j2}(\xi) = \begin{pmatrix} q_j^2 \\ -a_j q_j \\ -b_j q_j \end{pmatrix}, \quad j = s + 3, \quad q = -q_s, \quad s = 1, 2, 3 \quad (29)$$

且

$$\begin{cases} a_s = \frac{b_{11}b_{23} - q_s^2(b_{23} + e_{21}e_{13})}{\dots}, \\ b_s = \frac{q_s^2 e_{31} + a_s b_{32}}{q_s^2 - b_{33}}, \\ \dots = q_s^2 e_{13} + e_{12}b_{23} - b_{22}e_{13}. \end{cases} \quad (30)$$

方程(22)的解为

$$W(\xi, y) = \sum_{s=1}^3 D_s X_s(\xi) e^{q_s y} + D_{s+3} X_{s+3}(\xi) e^{-q_s y} \quad (31)$$

变换后的位移和微旋转满足辐射条件:

当  $y \geq 0$ ,

$$\begin{cases} u_1 = -q_1 D_4 e^{-q_1 y} - q_1 D_5 e^{-q_2 y} - q_3 D_6 e^{-q_3 y}, \\ u_3 = a_1 D_4 e^{-q_1 y} + a_2 D_5 e^{-q_2 y} + a_3 D_6 e^{-q_3 y}, \\ \phi_2 = b_1 D_4 e^{-q_1 y} + b_2 D_5 e^{-q_2 y} + b_3 D_6 e^{-q_3 y}. \end{cases} \quad (32)$$

对弹性体采用同样的方法, 可得位移分量为

$$w_1 = M(A_1 p_1 e^{p_1 y} + A_2 p_2 e^{p_2 y}), \quad (33)$$

$$w_2 = A_1 d_1 e^{p_1 y} + A_2 d_2 e^{p_2 y}, \quad (34)$$

其中

$$\begin{cases} M = \xi c_{12}, \quad dv = i(\xi^2 c_{11} - p^2 v), \quad v = 1, 2, \\ p^2 v = \frac{-\lambda_4 \pm \sqrt{\lambda_4^2 - 4\lambda_5}}{2}, \quad \lambda_4 = \xi^2(c_{12}c_{21} - c_{22} - c_{11}), \quad \lambda_5 = c_{11}c_{22}, \\ c_{11} = \frac{\lambda^0 + 2\mu^0 - \rho^0 U^2}{\mu^0}, \quad c_{21} = \frac{\lambda^0 + \mu^0}{\lambda^0 + 2\mu^0}, \quad c_{12} = \frac{\lambda^0 + \mu^0}{\mu^0}, \\ c_{22} = \frac{\mu^0 - \rho^0 U^2}{\lambda^0 + 2\mu^0}. \end{cases} \quad (35)$$

## 2 边界条件

我们考虑一法向线荷载  $F_1$  (每单位长度), 在  $y$  正向沿  $z$  轴作用在界面  $y = 0$  上, 而线荷载  $F_2$  (每单位长度) 在  $x$  负方向作用在原点上 (见图 2), 则在水平面  $y = 0$  上的边界条件为

$$\begin{aligned} & \text{(i)} \quad t_{22} = t_{22}^0 - F_1 \delta(x^*), \\ & \text{(ii)} \quad t_{21} = t_{21}^0 - F_2 \delta(x^*), \\ & \text{(iii)} \quad m_{23} = 0, \\ & \text{(iv)} \quad u_2 = w_2, \\ & \text{(v)} \quad u_1 = w_1. \end{aligned} \quad (36)$$

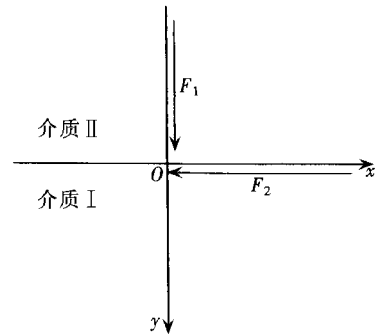


图 2 边界条件示意图

其中  $\delta(\quad)$  为 Dirac  $\delta$  函数.

对边界条件(36)式, 应用(15)式给出的 Fourier 变换, 并利用(4)~(6)、(9)、(11)~(13)和(32)~(34)式, 可得微极正交各向异性体的位移分量、力应力和耦合应力的表达式

$$u_1 = -\frac{1}{\Delta} [q_1 \Delta_1 e^{-q_1 y} + q_2 \Delta_2 e^{-q_2 y} + q_3 \Delta_3 e^{-q_3 y}], \quad (37)$$

$$u_2 = \frac{1}{\Delta} [a_1 \Delta_1 e^{-q_1 y} + a_2 \Delta_2 e^{-q_2 y} + a_3 \Delta_3 e^{-q_3 y}], \quad (38)$$

$$t_{21} = \frac{1}{\Delta} [s_1 \Delta_1 e^{-q_1 y} + s_2 \Delta_2 e^{-q_2 y} + s_3 \Delta_3 e^{-q_3 y}], \quad (39)$$

$$t_{22} = \frac{1}{\Delta} [r_1 \Delta_1 e^{-q_1 y} + r_2 \Delta_2 e^{-q_2 y} + r_3 \Delta_3 e^{-q_3 y}], \quad (40)$$

$$m_{23} = -\frac{K_1}{A_{11}\Delta} [b_1 q_1 \Delta_1 e^{-q_1 y} + b_2 q_2 \Delta_2 e^{-q_2 y} + b_3 q_3 \Delta_3 e^{-q_3 y}], \quad (41)$$

其中

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta = N(r_{\tau\Omega} - r_{\Omega\tau}) + (q_{\Omega d_2} + Ma_{\varphi_2})(r_{\tau\Omega_4} - r_{\Omega_4\tau}) - \\ \quad (q_{\Omega d_1} + Mp_{1a_{\Omega}})(r_{\tau\Omega_5} - r_{\Omega_5\tau}) + G(q_{\tau a_{\Omega}} - q_{\Omega a_{\tau}}) + \\ \quad (r_{\Omega_5} - r_{\Omega_5\tau})(d_{1q\tau} + Mp_{1a_{\tau}}) - (r_{\Omega_4} - r_{\Omega_4\tau})(q_{d_2} + Mp_{2a_{\tau}}), \\ \Delta_1 = -F_1\Delta_{11} + F_2\Delta_{12}, \quad \Delta_2 = F_1\Delta_{21} - F_2\Delta_{22}, \quad \Delta_3 = -F_1\Delta_{31} + F_2\Delta_{32}, \\ \Delta_{\Theta 1} = N(s_{\tau b_{\Omega q}} - s_{\Omega b_{\tau q}}) - J_1(b_{\tau q_{\tau a_{\Omega}}} - b_{\Omega q_{\Omega a_{\tau}}}) + H_1q_{\tau q_{\Omega}}(b_{\tau} - b_{\Omega}), \\ \Delta_{\Theta 2} = N(r_{\tau b_{\Omega q}} - r_{\Omega b_{\tau q}}) - J_2(b_{\tau q_{\tau a_{\Omega}}} - b_{\Omega q_{\Omega a_{\tau}}}) + H_2q_{\tau q_{\Omega}}(b_{\tau} - b_{\Omega}), \\ N = M(p_2d_1 - p_1d_2), \quad G = r_4s_5 - r_5s_4, \quad H_1 = s_5d_1 - s_4d_2, \\ J_1 = M(p_2s_4 - p_1s_5), \quad H_2 = r_5d_1 - r_4d_2, \quad J_2 = M(p_2r_4 - p_1r_5), \\ r_{\Theta} = \frac{q_{\Theta}}{A_{11}}(i\xi A_{12} - a_{\Theta}A_{22}), \quad r_{4,5} = p_{1,2} \left[ i\xi M - \left( \frac{\lambda^0 + 2\mu^0}{\lambda^0} \right) d_{1,2} \right], \\ \Theta = 1, 2, 3, \\ s_{\Theta} = \frac{1}{A_{11}} \left[ -i\xi a_{\Theta}A_{78} + q_{\Theta}^2 A_{88} + \frac{K_1}{A_{11}}(A_{88} - A_{78})b_{\Theta} \right], \\ s_{4,5} = \frac{\mu^0}{\lambda^0}(i\xi d_{1,2} - Mp_{1,2}^2), \quad \tau = 2, 1, 1; \quad \Omega = 3, 3, 2 \end{array} \right. \quad (42)$$

### 3 倾斜线荷载

对于倾斜线荷载  $F_0$  (每单位长度) (见图 1), 有

$$F_1 = F_0 \cos \theta, \quad F_2 = F_0 \sin \theta \quad (43)$$

在(37)~(41)式中利用(43)式, 就得到当倾斜荷载作用在相对应的弹性半空间表面时的位移和应力分量的表达式。

特殊情况

在方程(37)~(41)中取

$$A_{11} = A_{12} = \lambda + 2\mu + K, \quad A_{77} = A_{88} = \mu + K,$$

$$A_{12} = \lambda, \quad A_{78} = \mu, \quad B_{44} = B_{66} = \gamma$$

和  $-K_1 = K_2 = \kappa/2 = K,$

我们得到微极各向同性介质对应的表达式。这些结果与我们在受倾斜移动荷载作用的微极各向同性介质中求得的结果吻合。

变换的反演

为求得物理学意义上的解, 必须反演(37)~(41)式中的变换。这些表达式是  $y$  和 Fourier 变换参数  $\xi$  的函数, 因此其表达式为  $f(\xi, y)$ 。为得到物理学意义上的函数  $f(x, y)$ , 我们反演所应用的 Fourier 变换,

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, y) e^{-i\xi x} d\xi \quad (44)$$

$$\text{即} \quad f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [f \cos(\xi x) f_e - i \sin(\xi x) f_o] d\xi \quad (45)$$

其中,  $f_e$  和  $f_o$  分别为函数  $f(\xi, y)$  的偶部和奇部。计算这一积分的方法可见 Press 等人(1986)的文献[24], 其中利用了自适应步长的 Rhombberg 积分。还应用了扩展的梯形法则逐项精确的结果, 并且当步长趋于零时, 外推取极限求得结果。

### 4 数值结果和讨论

在数值计算中,我们取如下微极正交各向异性体的相关参数值:

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= 13.97 \times 10^5 \text{ N/cm}^2, & A_{77} &= 3.0 \times 10^5 \text{ N/cm}^2, \\
 A_{88} &= 3.2 \times 10^5 \text{ N/cm}^2, & A_{22} &= 13.75 \times 10^5 \text{ N/cm}^2, \\
 A_{12} &= 8.13 \times 10^5 \text{ N/cm}^2, & A_{78} &= 2.2 \times 10^5 \text{ N/cm}^2, \\
 B_{44} &= 0.056 \times 10^5 \text{ N}, & B_{66} &= 0.057 \times 10^5 \text{ N}
 \end{aligned}$$

在与微极各向同性固体比较时,与 Gauthier(1982)<sup>[25]</sup>一样,我们取铝环氧树脂复合材料的相关参数值为:

$$\begin{aligned}
 \rho &= 2.19 \text{ g/cm}^3, & \lambda &= 7.59 \times 10^5 \text{ N/cm}^2, \\
 \mu &= 1.89 \times 10^5 \text{ N/cm}^2, & K &= 0.0149 \times 10^5 \text{ N/cm}^2, \\
 \gamma &= 0.0268 \times 10^5 \text{ N}, & j &= 0.00196 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

花岗石的物理常数取 Bullen(1963)<sup>[26]</sup>给出的值

$$\lambda^0 = 0.884 \times 10^6 \text{ N/cm}^2, \quad \mu^0 = 1.2667 \times 10^6 \text{ N/cm}^2, \quad \rho^0 = 2.6 \text{ g/cm}^3$$

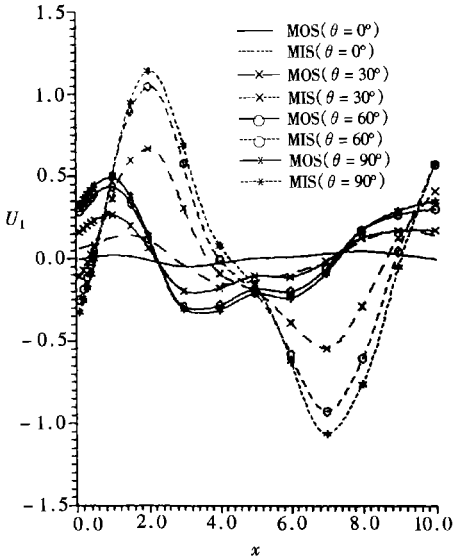


图3 切向位移  $U_1(= u_1/F_0)$  随距离  $x$  的变化

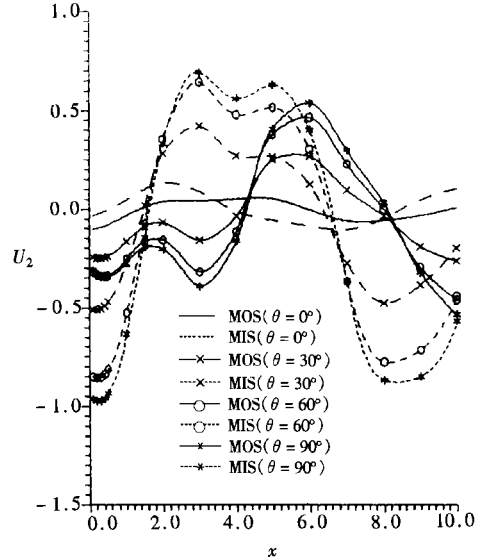


图4 法向位移  $U_2(= u_2/F_0)$  随距离  $x$  的变化

讨论了  $U < c_1$  时,微极正交各向异性体(MOS)和微极各向同性体(MIS)的切向位移  $U_1(= u_1/F_0)$ 、法向位移  $U_2(= u_2/F_0)$ 、切向力应力  $T_{21}(= t_{21}/F_0)$ 、法向力应力  $T_{22}(= t_{22}/F_0)$ 、切向耦合应力  $M_{23}(= m_{23}/F_0)$ ,并且这些分量与距离  $x$  的变化表示为

- (a) 实线(—)表示 MOS 且  $\theta = 0^\circ$ ,
- (b) 虚线(- -)表示 MIS 且  $\theta = 0^\circ$ ,
- (c) 实线带叉号(×-×-×)表示 MOS 且  $\theta = 30^\circ$ ,
- (d) 虚线带叉号(×- -×- -×)表示 MIS 且  $\theta = 30^\circ$ ,
- (e) 实线带圈号(○-○-○)表示 MOS 且  $\theta = 60^\circ$ ,
- (f) 虚线带圈号(○- -○- -○)表示 MIS 且  $\theta = 60^\circ$ ,

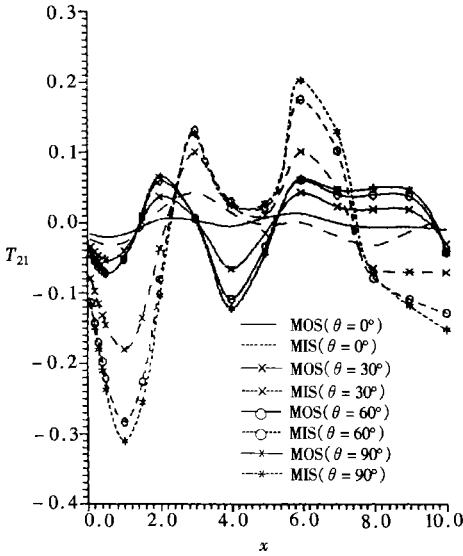


图5 切向力应力  $T_{21}(= t_{21}/F_0)$  随距离  $x$  的变化

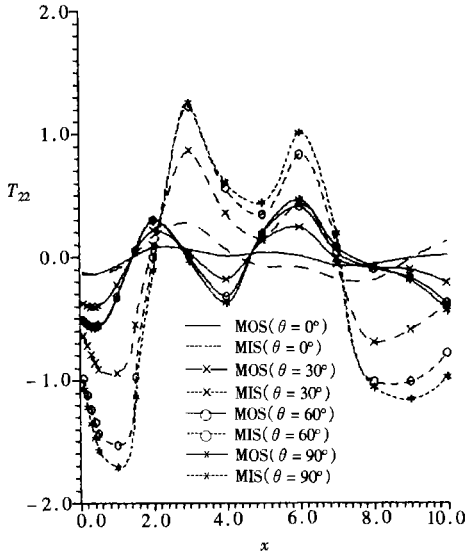


图6 法向力应力  $T_{22}(= t_{22}/F_0)$  随距离  $x$  的变化

(g) 实线带星号(\*-\* -\*)表示MOS且  $\theta = 90^\circ$ ,

(h) 虚线带星号(\* -\*- \*\*\*)表示MIS且  $\theta = 90^\circ$ 。

这些变化示于图3~图7。在区间  $0 \leq x \leq 10.0$  上,对  $y = 1.0$  的情况进行了计算。

讨论

法向荷载作用在界面上时,所有量的值都比较小,但随着偏离法向倾角的增大而增大。

可以看出,非常靠近作用点时,MOS的切向位移值,随着偏离法向倾角的增大而增大,而MIS则恰恰相反。切向位移的变化示于图3。

在非常靠近作用点时,MOS和MIS的法向位移值随着偏离法向倾角的增大而减小。MOS和MIS的法向位移的变化示于图4。

切向力应力和法向力应力,本质上这些量值的数量级是不同的,其变化都很小,并且法向力应力值比切向力应力值大。对MOS和MIS而言,二者在开始阶段变化都是减小,但随着距离  $x$  的增大而出现振荡。并且MIS在初始阶段减小非常剧烈,越靠近作用源点减小越剧烈。切向力应力和法向力应力的变化分别示于图5和图6。

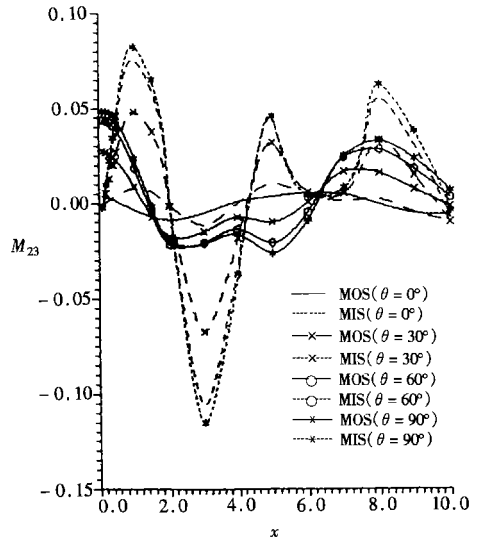


图7 切向耦合应力  $M_{23}(= m_{23}/F_0)$  随距离  $x$  的变化

研究发现,在初始阶段,MOS和MIS的切向耦合应力的变化正相反。二者量值的差别越靠近作用点(MIS比MOS)越有意义。切向耦合应力的变化示于图7。



## 5 结 论

当倾斜的作用力从法向变化到切向, 或我们能够推断出物体的变形随法向倾角增大而增大时, 物体受到更大的应力作用。同时, 在所有量的变化上, MIS 比 MOS 变化的振荡性更大, 并且这些振荡随作用力倾角的增大而增大。

### [参 考 文 献]

- [1] Eringen A C. Linear theory of micropolar elasticity[J]. *J Math Mech*, 1966, **15**: 909—923.
- [2] Iesan D. The plane micropolar strain of orthotropic elastic solids[J]. *Archives of Mechanics*, 1973, **25**: 547—561.
- [3] Iesan D. Torsion of anisotropic elastic cylinders[J]. *ZAMM*, 1974, **54**: 773—779.
- [4] Iesan D. Bending of orthotropic micropolar elastic beams by terminal couples[J]. *An St Uni Iasi*, 1974, **20**: 411—418.
- [5] Nakamura S, Benedict R, Lakes R. Finite element method for orthotropic micropolar elasticity[J]. *Int J Engg Sci*, 1984, **22**: 319—330.
- [6] Kumar R, Choudhary S. Influence of Green's function for orthotropic micropolar continua[J]. *Archives of Mechanics*, 2002, **54**: 185—198.
- [7] Kumar R, Choudhary S. Dynamical behavior of orthotropic micropolar elastic medium[J]. *J Vibration Control*, 2002, **8**: 1053—1069.
- [8] Kumar R, Choudhary S. Mechanical sources in orthotropic micropolar continua[J]. *Proc Indian Acad Sci, Earth Planet Sci*, 2002, **111**(2): 133—141.
- [9] Kumar R, Choudhary S. Response of orthotropic micropolar elastic medium due to various sources[J]. *Meccanica*, 2003, **38**: 349—368.
- [10] Kumar R, Choudhary S. Response of orthotropic micropolar elastic medium due to time harmonic sources[J]. *Sadhana*, 2003.
- [11] Nath S, Sengupta P R. Steady state response to moving loads in an elastic solid media[J]. *Indian J Pure Appl Math*, 1999, **30**: 317—327.
- [12] Katz R. The dynamic response of a rotating shaft subject to an axially moving and rotating load[J]. *J Sound and Vibration*, 2001, **246**(5): 757—775.
- [13] Verruijt A, Cordova C C. Moving loads on an elastic half plane with hysteretic damping[J]. *J Appl Mech*, 2001, **68**: 915—922.
- [14] Kumar R, Gogna M L. Steady state response to moving loads in micropolar elastic medium with stretch[J]. *Int J Engg Sci*, 1992, **30**: 811—820.
- [15] Kumar R, Deswal S. Steady state response of a micropolar generalized thermoelastic half space to the moving mechanical/ thermal loads[J]. *Proc Indian Acad Sci, Math Sci*, 2000, **110**(4): 449—465.
- [16] Kumar R, Deswal S. Steady state response to moving loads in a micropolar generalized thermoelastic half space without energy dissipation[J]. *Ganita*, 2002, **53**(1): 23—42.
- [17] Kumar R, Ailawalia P. Moving load response at thermal conducting fluid and micropolar solid interface[J]. *Int J Appl Mech Engg*, 2003.
- [18] Kuo J T. Static response of a multilayered medium under inclined surface loads[J]. *J Geophysical Research*, 1969, **74**(12): 3195—3207.
- [19] Georgiadis H G, Barber J R. Steady state transonic motion of a line load over an elastic half space: The corrected Cole/Huth solution[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1993, **60**(772): 772—774.

- [20] Garg N R, Kumar R, Goel A, et al. Plane strain deformation of an orthotropic elastic medium using eigen value approach[J]. *Earth Planets Space*, 2003, **55**: 3—9.
- [21] Eringen A C. Theory of Micropolar Elasticity in Fracture [M]. Vol II. Academic Press, 1968, 621—729.
- [22] Ewing W M, Jardetzky, Press F. Elastic Waves in Layered Media [M]. McGraw Hill, 1957.
- [23] Fung Y C. Foundations of Solid Mechanics [M]. New Delhi: Prentice Hall, 1968.
- [24] Press W H, Teukolsky S A, Vetterling W T, et al. Numerical Recipes [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1986.
- [25] Gauthier R D. Experimental investigations on micropolar media[A]. In: Brulin O, Hsieh R K T Eds. Mechanics of Micropolar Media [C]. Singapore: World Scientific, 1982.
- [26] Bullen K E. An Introduction to Theory of Seismology [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1963.

## Moving Inclined Load at Boundary Surface

Rajneesh Kumar<sup>1</sup>, Praveen Ailawalia<sup>2</sup>

(1. Department of Mathematics, Kurukshetra University,  
Kurukshetra, Haryana, India;

2. Department of Mathematics, S. S. I. E. T., Derabassi, Distt. Patiala,  
Punjab, India)

**Abstract:** The analytic expressions for the displacement components and stresses at any point of an infinite micropolar orthotropic elastic medium with an overlying elastic half space as a result of moving inclined load of arbitrary orientation were obtained. The inclined load was assumed to be a linear combination of a normal load and a tangential load. The eigen value approach using Fourier transform was employed and the transform was inverted by using a numerical technique. The numerical results were illustrated graphically for aluminium epoxy composite.

**Key words:** micropolar; orthotropic elastic medium; moving inclined load; eigenvalue; Fourier transform