应用数学和力学,第 25 卷 第 4 期(2004 年 4 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2004) 04_0345_09

损伤粘弹性力学的广义变分原理及应用*

盛冬发[1,2], 程昌钧[1], 扶名福[2]

(1. 上海大学 力学系,上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072;
2. 南昌大学 土木工程学院 工程力学研究所,南昌 330029)

(我刊编委程昌钧、扶名福来稿)

摘要: 从粘弹性材料的 Boltzmann 迭加原理和带空洞材料的线弹性本构关系出发, 提出了一种损伤粘弹性材料具有广义力场的本构模型• 应用变积方法得到了以卷积形式表示的泛函, 并建立了损伤粘弹性固体的广义变分原理和广义势能原理• 把它们应用于带损伤的粘弹性 Timoshenko 梁, 得到了 Timoshenko 梁的统一的运动微分方程、初始条件和边界条件• 这些广义变分原理为近似求解带损伤的粘弹性问题提供了一条途径•

关 键 词: 损伤粘弹性固体; 变积法; 广义变分原理; 广义势能原理; Timoshenko 梁
中图分类号: O345 文献标识码: A

引 言

粘弹性材料是自然界广泛存在的一类材料, 例如聚合物、复合材料、岩石、混凝土等• 有些材料尽管在室温下呈现弹性性质, 但在高温、高压力等特殊工作环境下, 也会呈现粘弹性性质• 同时, 工程中所用的材料, 有的材料在自然状态下就是一种明显的多孔介质, 如混凝土、木材、石料和陶瓷等• 有的材料由于冷热加工过程、载荷与温度的变化、化学和射线的作用以及其它多种环境的影响, 使材料内部存在和产生微观的以至宏观的缺陷, 造成材料力学性能的逐步劣化, 从而使结构强度明显削弱, 寿命缩短• 因此, 材料的损伤已引起许多研究者的重视•

工程中的许多力学问题, 一般都可简化为微分方程的初_边值问题• 在一定的条件下, 这些初_边值问题可以化为某个泛函的极值或驻值问题• 广义变分原理不但是进行理论研究和求近似解的有力工具, 而且是有限元方法的理论基础• 因此, 国内外学者对广义变分原理的研究十分重视, 取得了不少成果• 钱[1, 2]对建立力学和物理学领域中的广义变分原理进行了开创性的工作• 上世纪 60 年代, Gurtin[3]利用卷积理论, 提出了能反映弹性动力学初_边值问题基本特征的变分原理, 为求解弹性动力学初_边值问题的近似解奠定了可靠的基础• 之后, 罗[4~6]建立和发展了热弹性、粘弹性、热弹性动力学中的各种 Gurtin 型变分原理• 程等[7, 8]给出了粘弹性Timoshenko 梁和粘弹性薄板的 Gurtin 型变分原理• 梁等[9]于 1985 年提出了弹性力学变分原理的一种反逆法, 给出了求解变分法中逆问题的一种途径, 并将这种方法应用于线弹

* 收稿日期: 2002_10_25; 修订日期: 2003_11_06
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10272069); 上海市重点学科建设资助项目
作者简介: 盛冬发(1966—), 男, 江西进贤人, 博士(E_mail: shengdf@ eyou. com);
程昌钧(联系人), Tel: + 86_21_56331454; E_mail: chjcheng@ yc. shu. edu. cn

性动力学和粘性流体力学中，建立了各自的变分原理和广义变分原理。本文同时考虑材料的粘弹性性质和它的损伤缺陷，推导出考虑损伤的粘弹性材料的本构关系，应用变积法导出了卷积型泛函，建立了相应的广义变分原理和势能原理。作为应用给出了带损伤粘弹性 Timoshenko 梁的广义变分原理，导出了相应的平衡微分方程和初始条件及边界条件。这些广义变分原理是弹性体和粘弹性体相应变分原理的推广。

1　粘弹性损伤力学的广义变分原理

粘弹性损伤固体的初边值问题的基本方程为[10]：

运动微分方程

$$\sigma_{ij,j} + f_i - \rho\ddot{u}_i = 0, \qquad \text{在 } \Omega \text{ 中}, \tag{1}$$

$$-\rho k\ddot{D} = h_{i,i} + g + l, \qquad \text{在 } \Omega \text{ 中}; \tag{2}$$

几何方程

$$\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}u_{i,j} - \frac{1}{2}u_{j,i} = 0, \qquad \text{在 } \Omega \text{ 中}; \tag{3}$$

本构方程[10]

$$\sigma_{ij} = G_1' \otimes \varepsilon_{ij} + G_2' \otimes \varepsilon_{kk}\delta_{ij} - \beta(D - D^0)\delta_{ij}, \qquad \text{在 } \Omega \text{ 中}, \tag{4}$$

$$h_i = -\alpha D_{,i}, \qquad \text{在 } \Omega \text{ 中}, \tag{5}$$

$$g = \omega\dot{D} + \xi(D - D^0) - \beta\varepsilon_{kk}, \qquad \text{在 } \Omega \text{ 中}. \tag{6}$$

方程(4)中的 G_1' 和 G_2' 为粘弹性材料的性质函数，定义为 $G_1' = L^{-1}[1/(s^2\bar{J}_1)]$，$G_2' = L^{-1}[(\bar{J}_1 - \bar{J}_2)/(s^2\bar{J}_1(\bar{J}_1 + 2\bar{J}_2))]$，其中 J_1 和 J_2 为蠕变函数，$\overline{(\cdot)}$ 和 L^{-1} 分别表示 Laplace 变换和逆变换，s 是变换参数。符号 $\otimes$ 是 Boltzmann 算子，定义为

$$\varphi_1(t) \otimes \varphi_2(t) = \varphi_1(0^+)\varphi_2(t) + \dot{\varphi}_1(t) * \varphi_2(t) = \varphi_1(0^+)\varphi_2(t) + \int_{0^+}^{t}\dot{\varphi}_1(t-\tau)\varphi_2(\tau)\,d\tau.$$

边界条件

$$u_i - u_i^* = 0, \qquad \text{在 } \Sigma_1 \times [0, \infty) \text{ 上}, \tag{7}$$

$$\sigma_{ij}n_j - t_i^* = 0, \qquad \text{在 } \Sigma_2 \times [0, \infty) \text{ 上}, \tag{8}$$

$$\underline{n}\cdot\nabla D = 0, \qquad \text{在 } \Sigma_R \times [0, \infty) \text{ 上}, \tag{9a}$$

$$D = D^R, \qquad \text{在 } \Sigma_D \times [0, \infty) \text{ 上}; \tag{9b}$$

初始条件

$$\begin{cases} u_i(x,0) = u_i^0(x), & \dot{u}_i(x,0) = \dot{u}_i^0(x), \\ D(x,0) = D^0(x), & \dot{D}(x,0) = \dot{D}^0(x), \qquad t = 0. \end{cases} \tag{10}$$

在(1)～(9)式中，f_i 为已知体积力，ρ 为参考构形的已知密度，k 为已知平衡惯量，l 是已知外在平衡体积力，而未知量为应力分量 σ_{ij}，位移分量 u_i，应变分量 ε_{ij}，损伤量 D，平衡应力矢量 h_i 和内在平衡体积力 g。t_i^* 为应力边界 Σ_2 上给定的表面力，而 u_i^* 为位移边界 Σ_1 上给定的位移，$\underline{n}$ 为边界 Σ 的外法线方向。根据 Cowin 的理论[10]，在损伤发展力的边界 Σ_R 上，必须满足损伤发展力为零的条件，即 $\underline{n}\cdot\nabla D = 0$。$D^R$ 为损伤边界 Σ_D 上给定的损伤，并且有 $\Sigma_R + \Sigma_D = \Sigma$。$\alpha$、$\omega$、$\xi$、$\beta$ 为物质的特征常数。u_i^0、$\dot{u}_i^0$ 分别是初始位移和初速度，而 D^0、$\dot{D}^0$ 分别是初始损

伤和初始损伤速度•

将(5)和(6)式代入到(2)式得

$$\rho_k \ddot{D} - \alpha D_{,ii} + \omega \dot{D} + \xi (D - D^0) - \beta \varepsilon_{kk} + l = 0 \tag{2$'$}$$

上述基本方程和边界条件的Laplace变换为

$$\sigma_{ij,j} + f_i - \rho(s^2 u_i - s u_i^0 - \dot{u}_i^0) = 0, \tag{11}$$

$$-\rho_k(s^2 D - sD^0 - \dot{D}^0) + \alpha D_{,ii} - \omega(sD - D^0) - \xi\left(D - \frac{D^0}{s}\right) + \beta\varepsilon_{kk} - l = 0, \tag{12}$$

$$\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = 0, \tag{13}$$

$$\sigma_{ij} - sG_1'\varepsilon_{ij} - sG_2'\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + \beta\left(D - \frac{D^0}{s}\right)\delta_{ij} = 0, \tag{14}$$

$$u_i - u_i^* = 0, \qquad \text{在 } \Sigma_1 \times [0, \infty) \text{ 上}, \tag{15}$$

$$\sigma_{ij} n_j - t_i^* = 0, \qquad \text{在 } \Sigma_2 \times [0, \infty) \text{ 上}, \tag{16}$$

$$\underline{n} \cdot \underline{\nabla} D = 0, \qquad \text{在 } \Sigma_R \times [0, \infty) \text{ 上}, \tag{17a}$$

$$D = D^R / s, \qquad \text{在 } \Sigma_D \times [0, \infty) \text{ 上} \cdot \tag{17b}$$

广义变分原理1　在Laplace变换域中, 初_边值问题(11)~(17)等价于泛函 Π 的驻值, 即 $\delta\Pi = 0$, 其中泛函 Π 给定为

$$\begin{aligned}
\Pi = & \int_V \left[\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + u_i\sigma_{ij,j} + f_i u_i - \frac{1}{2}\rho \bar{\dot{u}}_i \bar{\dot{u}}_i\right] \mathrm{d}V - \\
& \int_V \left[\frac{1}{2} sG_1' \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} sG_2' \varepsilon_{kk}^2 + \beta\frac{D^0}{s}\varepsilon_{kk}\right] \mathrm{d}V + \\
& \int_V \left[-\rho_k \bar{\dot{D}} \bar{\dot{D}} + \alpha D_{,ii} D - \omega\left(\frac{1}{2}sD - D^0\right) D - \right. \\
& \left. \xi\left(\frac{1}{2}D - \frac{D^0}{s}\right) D + \beta\varepsilon_{kk} D - l D\right] \mathrm{d}V + \int_V \frac{\alpha}{2} D_{,i} D_{,i} \mathrm{d}V + \\
& \int_{\Sigma_2} (t_i^* - \sigma_{ij} n_j) u_i \mathrm{d}S - \int_{\Sigma_1} u_i^* \sigma_{ij} n_j \mathrm{d}S - \int_{\Sigma} \alpha D(\underline{n} \cdot \underline{\nabla} D) \mathrm{d}S - \\
& \int_V \rho\left[(u_i|_{t=0} - u_i^0)\bar{\dot{u}}_i|_{t=T} - \bar{\dot{u}}_i^0 u_i|_{t=T}\right] \mathrm{d}V - \\
& \int_V \rho_k\left[(D|_{t=0} - D^0)\bar{\dot{D}}|_{t=T} - \bar{\dot{D}}^0 D|_{t=T}\right] \mathrm{d}V \cdot
\end{aligned} \tag{18}$$

证明　对 Π 进行变分, 并令 $\delta\Pi = 0$, 得到

$$\begin{aligned}
\delta\Pi = & \int_V \left[\sigma_{ij,j} + f_i - \rho\bar{\ddot{u}}_i\right] \delta u_i \mathrm{d}V + \int_V \left[\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})\right] \delta\sigma_{ij} \mathrm{d}V + \\
& \int_V \left[-\rho_k\bar{\ddot{D}} + \alpha D_{,ii} - \omega(sD - D^0) - \xi\left(D - \frac{D^0}{s}\right) + \beta\varepsilon_{kk} - l\right] \delta D \mathrm{d}V + \\
& \int_V \left[\sigma_{ij} - sG_1'\varepsilon_{ij} - sG_2'\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + \beta\left(D - \frac{D^0}{s}\right)\delta_{ij}\right] \delta\varepsilon_{ij} \mathrm{d}V + \\
& \int_{\Sigma_1} (u_i - u_i^*) \delta\sigma_{ij} n_j \mathrm{d}S + \int_{\Sigma_2} (t_i^* - \sigma_{ij} n_j) \delta u_i \mathrm{d}S - \int_{\Sigma_R} \alpha(\underline{n} \cdot \underline{\nabla} D) \delta D \mathrm{d}S -
\end{aligned}$$

$$\int_V \rho k\left[(D|_{t=0}-D^0)\delta\bar{\dot{D}}|_{t=T}+(\bar{\dot{D}}|_{t=0}-\bar{\dot{D}}^0)\delta D|_{t=T}\right]\mathrm{d}V-$$

$$\int_V \rho\left[(u_i|_{t=0}-u_i^0)\delta\bar{\dot{u}}_i|_{t=T}+(\bar{\dot{u}}_i|_{t=0}-\bar{\dot{u}}_i^0)\delta u|_{t=T}\right]\mathrm{d}V=0. \qquad (19)$$

注意到 δu_i、$\delta\varepsilon_{ij}$、$\delta\sigma_{ij}$、δD、$\delta\sigma_{ij}n_j|_{\Sigma_1}$、$\delta u_i|_{\Sigma_2}$、$\delta D|_{\Sigma_R}$ 及 $\delta\bar{\dot{D}}|_{t=T}$、$\delta D|_{t=T}$、$\delta\bar{\dot{u}}_i|_{t=T}$ 和 $\delta u|_{t=T}$ 的任意性, 由变分法的基本预备定理和Titchmarsh定理可证明在Laplace变换域中, $\delta\Pi=0$ 相应于方程和边界条件(11)~(17)及初始条件(10).

广义变分原理2 以 u_i、ε_{ij}、σ_{ij} 和 D 为自变宗量的初_边值问题(1)、(2)$'$、(3)、(4)、(7)~(10)等价于下列泛函 Π 的驻值, 其中 Π 定义为

$$\Pi=\int_V\Big[\sigma_{ij}*\varepsilon_{ij}+\sigma_{ij,j}*u_i+f_i*u_i-\frac{1}{2}\rho\dot{u}_i*\dot{u}_i-\frac{1}{2}\rho k\dot{D}*\dot{D}+\alpha D_{,ii}*D-$$
$$\frac{1}{2}\omega\delta'(t)*D*D+\omega D^0D-\frac{1}{2}\xi D*D+\xi D^0*D+\beta\varepsilon_{kk}*D-Dl+$$
$$\frac{1}{2}\alpha D_{,i}*D_{,i}-\frac{1}{2}G_1'\neq\varepsilon_{ij}*\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}G_2'\neq\varepsilon_{kk}*\varepsilon_{kk}-\beta D^0*\varepsilon_{kk}\Big]\mathrm{d}V+$$
$$\int_{\Sigma_2}(t_i^*-\sigma_{ij}n_j)*u_i\mathrm{d}S-\int_{\Sigma_1}u_i^**\sigma_{ij}n_j\mathrm{d}S-\int_{\Sigma}\alpha D*(\underline{n}\cdot\underline{\nabla}D)\mathrm{d}S-$$
$$\int_V\rho\left[(u_i|_{t=0}-u_i^0)*\dot{u}_i|_{t=T}-\dot{u}_i^0*u_i|_{t=T}\right]\mathrm{d}V-$$
$$\int_V\rho k\left[(D|_{t=0}-D^0)*\dot{D}|_{t=T}-\dot{D}^0*D|_{t=T}\right]\mathrm{d}V, \qquad (20)$$

这里, 符号 $*$ 表示卷积, 定义为

$$\varphi_1(t)*\varphi_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1(\tau)\varphi_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

证明 首先, 对(18)进行反演并利用广义函数 $\delta(t)$ 的性质可得到 Π. 其次, 对 Π 进行变分, 并令 $\delta\Pi=0$, 得到

$$\delta\Pi=\int_V\left(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)*\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}V+$$
$$\int_V\left[\sigma_{ij}-G_1'\neq\varepsilon_{ij}-G_2'\neq\varepsilon_{kk}\delta_{ij}+\beta(D-D^0)\delta_{ij}\right]*\delta\varepsilon_{ij}\mathrm{d}V+$$
$$\int_V(\sigma_{ij,j}+f_i-\rho\ddot{u}_i)*\delta u_i\mathrm{d}V+$$
$$\int_V\left[-\rho k\ddot{D}+\alpha D_{,ii}-\omega\dot{D}-\xi(D-D^0)+\beta\varepsilon_{kk}-l\right]*\delta D\mathrm{d}V+$$
$$\int_{\Sigma_1}(u_i-u_i^*)*\delta\sigma_{ij}n_j\mathrm{d}S+$$
$$\int_{\Sigma_2}(t_i^*-\sigma_{ij}n_j)*\delta u_i\mathrm{d}S-\int_{\Sigma_R}\alpha(\underline{n}\cdot\underline{\nabla}D)*\delta D\mathrm{d}S-$$
$$\int_V\rho\left[(u_i|_{t=0}-u_i^0)*\delta\dot{u}_i|_{t=T}+(\dot{u}_i|_{t=0}-\dot{u}_i^0)*\delta u_i|_{t=T}\right]\mathrm{d}V-$$
$$\int_V\rho k\left[(D|_{t=0}-D^0)*\delta\dot{D}|_{t=T}+(\dot{D}|_{t=0}-\dot{D}^0)*\delta D|_{t=T}\right]\mathrm{d}V=0. \qquad (21)$$

由 $\delta\sigma_{ij}$、$\delta\varepsilon_{ij}$、δu_i、δD、$\delta\sigma_{ij}n_j|_{\Sigma_1}$、$\delta u_i|_{\Sigma_2}$、$\delta D|_{\Sigma_R}$ 及 $\delta\dot{u}_i|_{t=T}$、$\delta u_i|_{t=T}$、$\delta\dot{D}|_{t=T}$ 和 $\delta D|_{t=T}$ 等

的任意性, 并根据经典变分学中的基本预备定理和Titchmarsh定理, 可以证明$\delta\Pi = 0$等价于粘弹性损伤材料的本构方程(4)、应变和位移关系(3)、运动微分方程(1)和(2)$'$以及初始条件(10)和边界条件(7)~(9)•

当用u_i和D表示σ_{ij}和ε_{ij}时, 则可得到关于u_i和D的运动微分方程

$$\frac{1}{2}G_1' * (u_{i,jj} + u_{j,ji}) + G_2' * u_{j,ji} - \beta(D - D^0)_{,i} + f_i - \rho\ddot{u}_i = 0, \tag{22a}$$

$$-\rho k\ddot{D} + \alpha D_{,ii} - \omega\dot{D} - \xi(D - D^0) + \beta u_{i,i} - l = 0 \text{•} \tag{22b}$$

广义势能原理　在一切可能位移和损伤变量中, 真实的位移和损伤使下面的泛函Π_1(暂称为广义总势能)取驻值, 其中, 泛函Π_1定义为

$$\begin{aligned}
\Pi_1 = {} & \int_V \Big[G_1' * \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) + G_2' * u_{k,k}\delta_{ij} - \\
& \beta(D - D^0)\delta_{ij}\Big] * \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})\,\mathrm{d}V + \\
& \int_V \Big[G_1' * \frac{1}{2}(u_{i,jj} + u_{j,ji}) + G_2' * u_{j,ji} - \beta(D - D^0)_{,i}\Big] * u_i\,\mathrm{d}V - \\
& \int_V \Big[\frac{1}{2}G_1' * \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) * \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) + G_2' * u_{k,k} * u_{k,k}\Big]\mathrm{d}V + \\
& \int_V \Big[f_i * u_i - \frac{1}{2}\rho\dot{u}_i * \dot{u}_i + \frac{1}{2}\alpha D_{,i} * D_{,i}\Big]\mathrm{d}V + \\
& \int_V \Big[-\frac{1}{2}\rho k\dot{D} * \dot{D} + \alpha D_{,ii} * D - \frac{1}{2}\omega\delta'(t) * D * D + \omega D^0 D - \\
& \frac{1}{2}\xi D * D + \xi D^0 * D + \beta u_{i,i} * D - lD\Big]\mathrm{d}V + \\
& \int_{\Sigma_2} \Big\{ t_i^* - \Big[G_1' * \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) + G_2' * u_{k,k}\delta_{ij} - \beta(D - D^0)\delta_{ij}\Big] n_j\Big\} * u_i\,\mathrm{d}S - \\
& \int_{\Sigma_1} \Big\{ u_i^* * \Big[G_1' * \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) + G_2' * u_{k,k}\delta_{ij} - \beta(D - D^0)\delta_{ij}\Big] n_j\Big\}\mathrm{d}S - \\
& \int_\Sigma \alpha D * (\boldsymbol{n}\cdot\nabla D)\,\mathrm{d}S - \int_V \rho\big[(u_i|_{t=0} - u_i^0) * \dot{u}_i|_{t=T} - \dot{u}_i^0 * u_i|_{t=T}\big]\mathrm{d}V - \\
& \int_V \rho k\big[(D|_{t=0} - D^0) * \dot{D}|_{t=T} - \dot{D}^0 * D|_{t=T}\big]\mathrm{d}V \text{•}
\end{aligned}$$

证明　对泛函Π_1进行变分, 并令$\delta\Pi_1 = 0$得到

$$\begin{aligned}
\delta\Pi_1 = {} & \int_V \Big\{\Big[\frac{1}{2}G_1' * (u_{i,jj} + u_{j,ji}) + G_2' * u_{j,ji} - \beta(D - D^0)_{,i} + f_i - \rho\ddot{u}_i\Big] * \delta u_i\Big\}\mathrm{d}V + \\
& \int_V \Big\{\big[-\rho k\ddot{D} + \alpha D_{,ii} - \omega\dot{D} - \xi(D - D^0) + \beta u_{i,i} - l\big] * \delta D\Big\}\mathrm{d}V + \\
& \int_{\Sigma_1} (u_i - u_i^*) * \delta\Big[G_1' * \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) + G_2' * u_{k,k}\delta_{ij} - \beta(D - D^0)\delta_{ij}\Big] n_j\,\mathrm{d}S + \\
& \int_{\Sigma_2} \Big\{ t_i^* - \Big[G_1' * \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) + G_2' * u_{j,j}\delta_{ij} - \beta(D - D^0)\delta_{ij}\Big] n_j\Big\} * \delta u_i\,\mathrm{d}S - \\
& \int_V \rho\big[(u_i|_{t=0} - u_i^0) * \delta\dot{u}_i|_{t=T} + (\dot{u}_i|_{t=0} - \dot{u}_i^0) * \delta u_i|_{t=T}\big]\mathrm{d}V -
\end{aligned}$$

$$\int_V \rho_k \left[(\dot{D}|_{t=0} - D^0) * \delta\dot{D}|_{t=T} + (\dot{D}|_{t=0} - \dot{D}^0) * \delta D|_{t=T} \right] \mathrm{d}V -$$

$$\int_{\Sigma_R} \alpha g * (\underline{n} \cdot \nabla D) * \delta D \mathrm{d}S = 0. \tag{23}$$

注意到区域内部 δu_i、δD, 边界上 $\delta\sigma_{ij}n_j|_{\Sigma_1}$、$\delta u_i|_{\Sigma_2}$、$\delta D|_{\Sigma_R}$ 及 $\delta\dot{u}_i|_{t=T}$、$\delta u_i|_{t=T}$、$\delta\dot{D}|_{t=T}$、$\delta D|_{t=T}$ 等的任意性, 由 Titchmarsh 定理和经典变分学中的基本预备定理, 可以证明变分方程 $\delta\Pi_1 = 0$ 等价于运动微分方程(22)以及初始条件(10)和边界条件(7)~(9).

2　损伤粘弹性Timoshenko梁的变分原理

考虑承受任意横向载荷作用的梁的弯曲问题. 取 x 轴通过截面形心, y、z 轴为截面上正交的主轴, 如图1所示. 设载荷平行于 yz 平面, 在 xy 和 xz 平面上的分量分别记为 $q(x)$、$p(x)$.

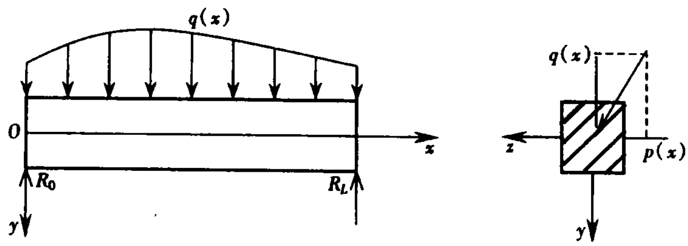

图1　带损伤粘弹性Timoshenko梁

假定梁的位移场为[11]

$$u_1 = u(x) + y\varphi(x) + z\psi(x),\quad u_2 = v(x),\quad u_3 = w(x); \tag{24}$$

由小变形理论可得相应的应变分量

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + z\dfrac{\partial\psi}{\partial x},\quad \gamma_{xy} = \dfrac{\partial v}{\partial x} + \varphi, \\ \gamma_{xz} = \dfrac{\partial w}{\partial x} + \psi,\quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{yz} = 0; \end{cases} \tag{25}$$

将(25)代入(4)式可得

$$\begin{cases} \sigma_x = G_3' * \left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + z\dfrac{\partial\psi}{\partial x} \right) - \beta\bar{D}, \\ \tau_{xy} = \dfrac{1}{2}G_1' * \left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \varphi \right),\ \tau_{xz} = \dfrac{1}{2}G_1' * \left(\dfrac{\partial w}{\partial x} + \psi \right), \end{cases} \tag{26}$$

这里, $\bar{D} = D - D^0$ 为损伤增量, G_3 定义为

$$G_3' = G_1' + G_2'. \tag{27}$$

这里, 我们假定 $\bar{D}(x, y, z, t) = \bar{D}(x, t)D(y, z)$, 并且选择 $D(y, z)$ 使得在梁的表面上满足条件 $D_{,n} = 0$ (参看文[10]的式(2.9)), 同时令

$$A = \int_A D(y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\ A_1 = \int_A D(y,z)D(y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

带损伤粘弹性Timoshenko梁的变分原理　在一切可能的位移 u、v、w、φ、ψ 及损伤增量 $\bar{D}$ 中, 真实的位移和损伤增量使泛函 Π_2 取驻值, 而 Π_2 定义为

$$\Pi_2 = -\int_0^l \frac{1}{2}G_3' * \left(A\frac{\partial u}{\partial x} * \frac{\partial u}{\partial x} + I_z\frac{\partial\varphi}{\partial x} * \frac{\partial\varphi}{\partial x} + I_y\frac{\partial\psi}{\partial x} * \frac{\partial\psi}{\partial x} \right)\mathrm{d}x -$$

$$\int_0^l \frac{1}{8}AG_1' \nsim \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\varphi\right)*\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\varphi\right)+\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\psi\right)*\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\psi\right)\right]\mathrm{d}x -$$

$$\int_0^l \frac{1}{2}\rho\left[A(\dot u*\dot u+\dot v*\dot v+\dot w*\dot w)+I_z\dot\varphi*\dot\varphi+I_y\dot\psi*\dot\psi\right]\mathrm{d}x+$$

$$\int_0^l A_1\left[-\frac{1}{2}\rho k\dot D*\dot D-\frac{1}{2}\omega\delta'(t)*D*D-\right.$$

$$\left.\frac{1}{2}\xi D*D+\frac{\beta A}{A_1}\frac{\partial u}{\partial x}*D-\frac{lA}{A_1}*D\right]\mathrm{d}x+$$

$$\int_0^l -\frac{1}{2}\alpha A_1\frac{\partial D}{\partial x}*\frac{\partial D}{\partial x}\mathrm{d}x+\int_0^l(q*v+p*w)\mathrm{d}x-$$

$$\int_0^l \alpha A_1(D*D_{,x})_{,x}\mathrm{d}x-$$

$$\int_0^l \rho A\left[(u|_{t=0}-u^0)*\dot u|_{t=T}-\dot u^0*u|_{t=T}\right]\mathrm{d}x-$$

$$\int_0^l \rho I_z\left[(\varphi|_{t=0}-\varphi^0)*\dot\varphi|_{t=T}-\dot\varphi^0*\varphi|_{t=T}\right]\mathrm{d}x-$$

$$\int_0^l \rho I_y\left[(\psi|_{t=0}-\psi^0)*\dot\psi|_{t=T}-\dot\psi^0*\psi|_{t=T}\right]\mathrm{d}x-$$

$$\int_0^l \rho A\left[(v|_{t=0}-v^0)*\dot v|_{t=T}-\dot v^0*v|_{t=T}\right]\mathrm{d}x-$$

$$\int_0^l \rho A\left[(w|_{t=0}-w^0)*\dot w|_{t=T}-\dot w^0*w|_{t=T}\right]\mathrm{d}x-$$

$$\int_0^l \rho kA_1\left[(D|_{t=0}-D^0)*\dot D|_{t=T}-\dot D^0*D|_{t=T}\right]\mathrm{d}x\cdot \tag{28}$$

证明　首先, 将(25)~(27)代入(20)式, 所得到的泛函即为 Π_2. 其次, 对 Π_2 进行变分, 并令 $\delta\Pi_2=0$ 得到

$$\delta\Pi_2=\int_0^l\left(AG_3'\nsim\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\beta A\frac{\partial D}{\partial x}-\rho A\ddot u\right)*\delta u\,\mathrm{d}x+$$

$$\int_0^l\left\{\left[I_zG_3'\nsim\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{1}{4}AG_1'\nsim\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\varphi\right)-\rho I_z\ddot\varphi\right]*\delta\varphi\right\}\mathrm{d}x+$$

$$\int_0^l\left\{\left[I_yG_3'\nsim\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{1}{4}AG_1'\nsim\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\psi\right)-\rho I_y\ddot\psi\right]*\delta\psi\right\}\mathrm{d}x+$$

$$\int_0^l\left\{\left[\frac{1}{4}AG_1'\nsim\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+q-\rho A\ddot v\right]*\delta v\right\}\mathrm{d}x+$$

$$\int_0^l\left\{\left[\frac{1}{4}AG_1'\nsim\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+p-\rho A\ddot w\right]*\delta w\right\}\mathrm{d}x+$$

$$\int_0^l A_1\left[-\rho k\ddot D+\alpha D_{,ii}-\omega\dot D-\xi D+\frac{\beta A}{A_1}\varepsilon_{kk}-\frac{lA}{A_1}\right]*\delta D\,\mathrm{d}x-$$

$$\left(AG_3'\nsim\frac{\partial u}{\partial x}-\beta AD\right)*\delta u\,\big|_0^l+\alpha A_1\frac{\partial D}{\partial x}*\delta D\,\big|_0^l-$$

$$G_3'\nsim\left(I_z\frac{\partial\varphi}{\partial x}*\delta\varphi\,\big|_0^l+I_y\frac{\partial\psi}{\partial x}*\delta\psi\,\big|_0^l\right)-$$

$$\frac{1}{4}AG_1'\nsim\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\varphi\right)*\delta v\,\big|_0^l+\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\psi\right)*\delta w\,\big|_0^l\right]-$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^l \rho A\left[(u|_{t=0}-u^0)*\delta\dot{u}|_{t=T}+(\dot{u}|_{t=0}-\dot{u}^0)*\delta u|_{t=T}\right]\mathrm{d}x-\\
&\int_0^l \rho A\left[(v|_{t=0}-v^0)*\delta\dot{v}|_{t=T}+(\dot{v}|_{t=0}-\dot{v}^0)*\delta v|_{t=T}\right]\mathrm{d}x-\\
&\int_0^l \rho A\left[(w|_{t=0}-w^0)*\delta\dot{w}|_{t=T}+(\dot{w}|_{t=0}-\dot{w}^0)*\delta w|_{t=T}\right]\mathrm{d}x-\\
&\int_0^l \rho I_y\left[(\psi|_{t=0}-\psi^0)*\delta\dot{\psi}|_{t=T}+(\dot{\psi}|_{t=0}-\dot{\psi}^0)*\delta\psi|_{t=T}\right]\mathrm{d}V-\\
&\int_0^l \rho I_z\left[(\varphi|_{t=0}-\varphi^0)*\delta\dot{\varphi}|_{t=T}+(\dot{\varphi}|_{t=0}-\dot{\varphi}^0)*\delta\varphi|_{t=T}\right]\mathrm{d}V-\\
&\int_0^l \rho k A_1\left[(D|_{t=0}-D^0)*\delta\dot{D}|_{t=T}+(\dot{D}|_{t=0}-\dot{D}^0)*\delta D|_{t=T}\right]\mathrm{d}x=0. \qquad (29)
\end{aligned}
$$

注意到区域积分中 δu、δv、δw、$\delta\varphi$、$\delta\psi$、δD 的任意性, 初始条件中 $\delta u|_{t=T}$、$\delta\dot{u}|_{t=T}$、$\delta v|_{t=T}$、$\delta\dot{v}|_{t=T}$、$\delta w|_{t=T}$、$\delta\dot{w}|_{t=T}$、$\delta\varphi|_{t=T}$、$\delta\dot{\varphi}|_{t=T}$、$\delta\psi|_{t=T}$、$\delta\dot{\psi}|_{t=T}$、$\delta D|_{t=T}$、$\delta\dot{D}|_{t=T}$ 的任意性, 可得到带损伤粘弹性 Timoshenko 梁的运动微分方程及初始条件. 将它们代入 $\delta\Pi_2=0$, 可以得到 Timoshenko 梁的边界变分方程, 由此可得到相应的边界条件. 限于篇幅不再重复列出这些方程和条件, 它们可直接由变分方程 $\delta\Pi_2=0$ 给出. 该变分原理是粘弹性 Timoshenko 梁的变分原理[7]的推广.

[参 考 文 献]

[1] 钱伟长. 变分法与有限元[M]. 北京: 科学出版社, 1980.

[2] 钱伟长. 广义变分原理[M]. 北京: 知识出版社, 1985.

[3] Gurtin M E. Variational principles for linear elastodynamics[J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1964, **16**(1): 34—50.

[4] 罗恩. 关于线弹性动力学中各种 Gurtin 型变分原理[J]. 中国科学, A 辑, 1987, **17**(9): 936—948.

[5] 罗恩. 关于线粘弹性动力学中各种变分原理[J]. 力学学报, 1990, **22**(4): 484—489.

[6] 罗恩. 压电热弹性动力学的一些基本原理[J]. 中国科学, A 辑, 1999, **29**(9): 851—858.

[7] 程昌钧, 卢华勇. 粘弹性 Timoshenko 梁的变分原理和静动力学行为分析[J]. 固体力学学报, 2002, **23**(2): 190—196.

[8] CHENG Chang_jun, ZHANG Neng_hui. Variational principles on static_dynamic analysis of visco-elastic thin plates with applications[J]. Int J Solids and Structures, 1998, **35**(33): 4491—4505.

[9] 梁立孚, 章梓茂. 推导弹性力学变分原理和一种凑合法——反逆法[J]. 哈尔滨船舶工程学院学报, 1985, **6**(3): 86—95.

[10] Cowin S C, Nunziato J W. Linear elastic materials with voids[J]. J Elasticity, 1983, **13**(2): 125—147.

[11] 罗祖道, 李思简. 各向异性材料力学[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1994.

Generalized Variational Principles of the Viscoelastic Body With Voids and Their Applications

SHENG Dong_fa[1, 2], CHENG Chang_jun[1], FU Ming_fu[2]

(1. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Department of Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, P. R. China;

2. Graduate School of Engineering Mechanics, Institute of Civil Engineering, Nanchang University, Nanchang 330029, P. R. China)

Abstract: From the Boltzmann's constitutive law of viscoelastic materials and the linear theory of elastic materials with voids, a constitutive model of generalized force fields for viscoelastic solids with voids was given. By using the variational integral method, the convolution_type functional was given and the corresponding generalized variational principles and potential energy principle of viscoelastic solids with voids were presented. It can be shown that the variational principles correspond to the differential equations and the initial and boundary conditions of viscoelastic body with voids. As an application, a generalized variational principle of viscoelastic Timoshenko beams with damage was obtained which corresponds to the differential equations of generalized motion and the initial and boundary conditions of beams. The variational principles provide a way for solving problems of viscoelastic solids with voids.

Key words: viscoelastic solid with void; variational integral method; generalized variational principle; generalized potential energy principle; Timoshenko beam