应用数学和力学,第 26 卷 第 5 期(2005 年 5 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

文章编号: 1000_0887(2005)05_0556_05

圆内平面弹性问题的边界积分公式*

董正筑[1,2], 李顺才[1,3], 余德浩[2]

(1. 中国矿业大学 理学院,江苏徐州 221008;
2. 中国科学院 计算数学与科学工程计算研究所, 北京 100080;
3. 徐州师范大学 工学院, 江苏徐州 221011)

(扶名福推荐)

摘要: 根据双解析函数可以得到单位圆内平面弹性问题应力函数的边界积分公式, 但式中包含强奇异积分, 不能用于直接计算• 将边界上的应力函数展开为 Fourier 级数, 再利用广义函数论中的几个公式进行卷积计算, 可以得到不含强奇异积分核的边界积分公式, 通过边界的应力函数值和法向导数的积分, 直接得到圆内应力函数值, 并给出几个算例, 表明该结果用于求解单位圆内平面弹性问题十分方便•

关 键 词: 圆内平面; 弹性问题; 双调和方程; 应力函数; 边界积分公式
中图分类号: O343 文献标识码: A

引 言

对于单位圆内平面弹性问题, 郑神州、郑学良曾在《双解析函数、双调和函数和平面弹性问题》一文中, 得到了应力函数的边界积分公式[1]

$$\Phi(r,\theta) = -\frac{(1-r^2)^2}{4\pi}\left(\int_0^{2\pi}\frac{\nu(\varphi)}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\mathrm{d}\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{1-2r\cos(\theta-\omega)+r^2}\mathrm{d}\omega\int_0^{2\pi}\frac{\mu(\varphi)}{1-\cos(\omega-\varphi)}\mathrm{d}\varphi\right) + \frac{1-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mu(\varphi)}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\mathrm{d}\varphi \qquad (0\leqslant r<1), \tag{1}$$

其中 $\mu(\theta) = \Phi(r,\theta)\mid_{r=1}$, $\nu(\theta) = \left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_{r=1} = \left.\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right|_{r=1}$•

式(1)中第 2 部分为强奇异积分, 这一积分应在广义函数意义下理解为 Hadamard 有限部分积分[2], 利用广义函数论中的重要公式, 将强奇异积分核进行级数展开后, 进一步推导, 可以得到不含强奇异积分核的积分公式•

1 单位圆内平面弹性问题应力函数的边界积分公式

将式(1)中含强奇异积分核的积分改写为:

* 收稿日期: 2003_09_30; 修订日期: 2004_11_09
基金项目: 中国科学院科学基金资助项目(AMIV20032C05)
作者简介: 董正筑(1946—), 男, 浙江人, 教授(联系人. Tel: +86_516_3884463; Fax: +86_516_3888682; E_mail: dongzzhu@public.xz.js.cn)•

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mu(\varphi)}{1-\cos(\theta-\varphi)}\mathrm{d}\varphi=-\frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-\cos\theta}*\mu(\theta)=-\frac{1}{4\pi\sin^2(\theta/2)}*\mu(\theta), \qquad (2)$$

上式中“*”表示关于变量 θ 的卷积• 式(1)可进一步改写为

$$\Phi(r,\theta)=\left[-\frac{(1-r^2)^2}{4\pi[1+r^2-2r\cos\theta]}\right]*\nu(\theta)-\frac{(1-r^2)^2}{4\pi[1+r^2-2r\cos\theta]}*$$
$$\left[-\frac{1}{4\pi\sin^2(\theta/2)}*\mu(\theta)\right]+\frac{(1-r^2)}{2\pi[1+r^2-2r\cos\theta]}*\mu(\theta)\qquad(0\leqslant r<1)• \qquad (3)$$

利用 Fourier 级数,在单位圆边界上设

$$\mu(\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta},$$

利用广义函数论中的公式[2]

$$-\frac{1}{4\pi\sin^2(\theta/2)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}|n|\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta},$$

及当 $0\leqslant r<1$ 时

$$\frac{(1-r^2)}{2\pi[1+r^2-2r\cos\theta]}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}r^{|n|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta},$$
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|n|r^{|n|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}=\frac{2r^3\cos\theta-4r^2+2r\cos\theta}{(1+r^2-2r\cos\theta)^2},$$

再利用 Fourier 级数卷积的积分性质,得到

$$-\frac{1}{4\pi\sin^2(\theta/2)}*\mu(\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}|n|\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}*\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n|n|\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta},$$
$$\frac{(1-r^2)}{2\pi[1+r^2-2r\cos\theta]}*\mu(\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}r^{|n|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}*\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nr^{|n|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta},$$

以上各式代入式(3)进行简化,其中

$$-\frac{(1-r^2)^2}{4\pi[1+r^2-2r\cos\theta]}*\left[-\frac{1}{4\pi\sin^2(\theta/2)}*\mu(\theta)\right]+$$
$$\frac{(1-r^2)}{2\pi[1+r^2-2r\cos\theta]}*\mu(\theta)=\frac{(1-r^2)^2(1-r\cos\theta)}{2\pi[1+r^2-2r\cos\theta]^2}*\mu(\theta), \qquad (4)$$

式(4)再代入式(3),得到

$$\Phi(r,\theta)=\int_0^{2\pi}\frac{(1-r^2)^2[1-r\cos(\theta-\varphi)]}{2\pi[1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)]^2}\mu(\varphi)\mathrm{d}\varphi-$$
$$\int_0^{2\pi}\frac{(1-r^2)^2}{4\pi[1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)]}\nu(\varphi)\mathrm{d}\varphi,\qquad 0\leqslant r<1, \qquad (5)$$

式(5)即为单位圆内平面弹性问题应力函数的边界积分公式• 该式与文献[2]中利用格林函数和格林公式得到的圆内双调和方程的泊松公式完全一致•

2　算　　例

算例 1　均质实心圆板在边界上对径受拉的平面应力问题(图 1),设力 $P=1$,半径 $R=1$•

取 A 点为基点,即设 $\Phi_A=0$,$(\partial\Phi/\partial x)_A=0$,$(\partial\Phi/\partial y)_A=0$,则根据边界面力分量 X 及 Y 可求得边界上任意一点 B 的 Φ_B、$(\partial\Phi/\partial x)_B$ 及 $(\partial\Phi/\partial y)_B$ 值,且

$$\Phi_B=\int_A^B(y_B-y)X\,\mathrm{d}s+\int_A^B(x-x_B)Y\mathrm{d}s,$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_B = \int_A^B X\,\mathrm{d}s,\quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_B = -\int_A^B Y\,\mathrm{d}s\cdot$$

对本问题有:

$$\mu(\theta) = \Phi_B = \begin{cases} PR\sin\theta, & 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \\ 0, & \pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_B = 0,\quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_B = \begin{cases} P, & 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \\ 0, & \pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \end{cases}$$

$$\nu(\theta) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_B = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_B \cos\theta + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_B \sin\theta = \begin{cases} P\sin\theta, & 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \\ 0, & \pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \end{cases}$$

将上述 $\mu(\theta)$、$\nu(\theta)$ 及 $R = 1, P = 1$ 代入(5)式,得到

$$\Phi(r,\theta) = \frac{(1-r^2)^3}{4\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin\varphi}{[1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)]^2}\mathrm{d}\varphi =$$

$$\frac{(1-r^2)^3}{4\pi}\frac{1}{[1+r^2-2r\cos\theta]^2} * \sin\theta =$$

$$\frac{(1-r^2)^3}{4\pi}\sin\theta * \frac{1}{[1+r^2-2r\cos\theta]^2} =$$

$$\frac{(1-r^2)^3}{4\pi}\int_{\theta-\pi}^{\theta} \frac{\sin(\theta-\varphi)}{[1+r^2-2r\cos\varphi]^2}\mathrm{d}\varphi,$$

积分后得到

$$\Phi(r,\theta) = \frac{1}{4\pi}\left[2\pi r\sin\theta + 4r\sin\theta\arctan\left(\frac{2r\sin\theta}{1-r^2}\right) + 2 - 2r^2\right] \qquad (0 \leqslant r < 1),$$

此外,根据

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2},\quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2},\quad \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right),$$

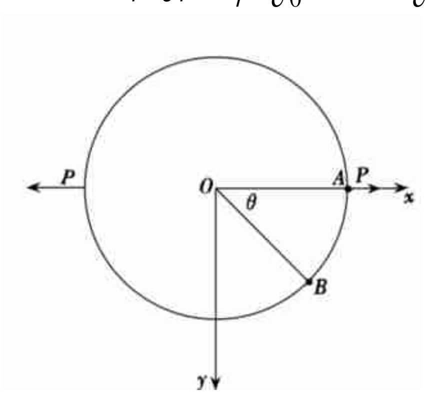

图 1 圆盘对径受拉

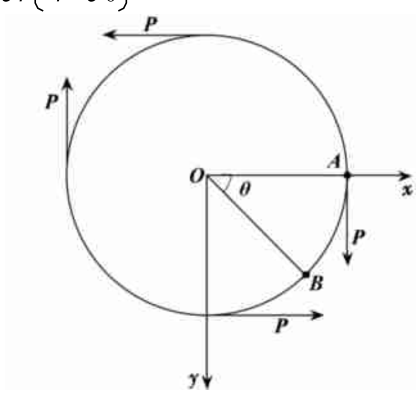

图 2 圆盘受两对集中力

可进一步得到圆域内点的应力公式

$$\sigma_r(r,\theta) = -\frac{1}{\pi}\left\{\frac{(r^2-1)^2[(1+r^2)^2-4\cos^2\theta]}{(1+r^4)^2+4r^2(1+r^2+r^4)-8r^2\cos^2\theta[(1+r^2)^2-2r^2\cos^2\theta]}\right\},$$

$$\sigma_\theta(r,\theta) = -\frac{1}{\pi}\left\{\frac{(1+r^4)^2+4(r^6-r^2-1)-4\cos^2\theta(2r^6-r^4-1)}{(1+r^4)^2+4r^2(1+r^2+r^4)-8r^2\cos^2\theta[(1+r^2)^2-2r^2\cos^2\theta]}\right\},$$

$$\tau_{r\theta}(r,\theta) = -\frac{1}{\pi}\left\{\frac{2(r^6-r^4-r^2+1)\sin2\theta}{(1+r^4)^2+4r^2(1+r^2+r^4)-8r^2\cos^2\theta[(1+r^2)^2-2r^2\cos^2\theta]}\right\},$$

经验证,本问题用上述直接积分法所得点的应力值与用复变函数法求得的结果[4]完全一致•

算例 2　如图 2 所示, 单位圆板受两对单位集中力作用, 设力 $P=1$, 半径 $R=1$• 取 A 点为基点, 类似例 1 的计算, 有

$$\mu(\theta)=\begin{cases}PR(1-\cos\theta), & 0\leqslant\theta\leqslant\pi/2,\\ PR(\sin\theta-\cos\theta), & \pi/2\leqslant\theta\leqslant\pi,\\ PR(1+\sin\theta), & \pi\leqslant\theta\leqslant3\pi/2,\\ 0, & 3\pi/2\leqslant\theta\leqslant2\pi,\end{cases}$$

$$\nu(\theta)=\begin{cases}-P\cos\theta, & 0\leqslant\theta\leqslant\pi/2,\\ P(\sin\theta-\cos\theta), & \pi/2\leqslant\theta\leqslant\pi,\\ P\sin\theta, & \pi\leqslant\theta\leqslant3\pi/2,\\ 0, & 3\pi/2\leqslant\theta\leqslant2\pi,\end{cases}$$

以上各式代入(5) 式可得

$$\Phi(r,\theta)=\frac{(1-r^2)^2}{4\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{[2-2r\cos(\theta-\varphi)-(1-r^2)\cos\varphi]}{[1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)]^2}\mathrm{d}\varphi+$$
$$\frac{(1-r^2)^3}{4\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{[\sin\varphi-\cos\varphi]}{[1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)]^2}\mathrm{d}\varphi+$$
$$\frac{(1-r^2)^2}{4\pi}\int_{\pi}^{3\pi/2}\frac{[2-2r\cos(\theta-\varphi)+(1-r^2)\sin\varphi]}{[1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)]^2}\mathrm{d}\varphi•$$

记上式中第 1 项、第 2 项、第 3 项积分分别为 $\Phi_1(r,\theta)$、$\Phi_2(r,\theta)$、$\Phi_3(r,\theta)$, 则有

$$\Phi_1(r,\theta)=\frac{1}{\pi}\left[\arctan\left(\frac{1+r}{1-r}\cot\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)+\arctan\left(\frac{1+r}{1-r}\tan\frac{\theta}{2}\right)+\right.$$
$$\left.\frac{r(1-r^2)\cot(\theta/2+\pi/4)}{(1-r^2)+(1+r)^2\cot^2(\theta/2+\pi/4)}+\frac{r(1-r^2)\tan(\theta/2)}{(1-r)^2+(1+r)^2\tan^2(\theta/2)}\right]-$$
$$\frac{1}{4\pi}\left[4r\cos\theta\bullet\left[\arctan\left(\frac{1+r^2+2r(\cos\theta-\sin\theta)}{1-r^2}\right)+\arctan\left(\frac{2r\sin\theta}{1-r^2}\right)\right]+\right.$$
$$\left.1-r^2+\frac{2r(1-r^2)\sin\theta}{1+r^2-2r\cos\theta}\right],$$

$$\Phi_2(r,\theta)=\frac{1}{4\pi}\left[2\pi r(\sin\theta-\cos\theta)+\arctan\left(\frac{1+r^2+2r(\cos\theta-\sin\theta)}{1-r^2}\right)\times\right.$$
$$\frac{4r(\cos\theta-\sin\theta)[(1+r^2)^2-2r^2\sin2\theta]+8r^2(1+r^2)(1-\sin2\theta)}{(1+r^2+2r\cos\theta)(1+r^2-2r\sin\theta)}+$$
$$\left.2(1-r^2)\frac{[1+r^4-2r^2\sin2\theta+r(1+r^2)(\cos\theta-\sin\theta)]}{(1+r^2+2r\cos\theta)(1+r^2-2r\sin\theta)}\right],$$

$$\Phi_3(r,\theta)=-\frac{(1+r\sin\theta)}{\pi}\arctan\frac{1+r^2+2r(\cos\theta+\sin\theta)}{1-r^2}+$$
$$\frac{(r^2-1)}{4\pi}\frac{[1+r^2+2r(\cos\theta+\sin\theta)]}{1+r^2+2r\cos\theta}+\frac{1+r\sin\theta}{2}•$$

3　结　　语

在处理强奇异积分时广义函数论是十分有效的工具, 由边界积分公式(5) 可直接从边界条件得到圆内平面弹性问题应力函数的一般积分形式的解析表达式, 为圆内平面弹性问题提供了一种直观、简单的求解方法, 对于简单问题可得到解析解, 对于复杂边界条件, 通过数值积分进行计算也是十分方便的•

[参 考 文 献]

[1] 郑神州, 郑学良. 双解析函数、双调和函数和平面弹性问题[J]. 应用数学和力学, 2000, **21**(8): 797—802.

[2] 余德浩. 自然边界元法的数学理论[M]. 北京: 科学出版社, 1993, 184—186.

[3] 徐芝纶. 弹性力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1990, 124—126.

[4] 武际可, 王敏中, 王炜. 弹性力学引论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2000, 167—168.

Boundary Integral Formula of the Elastic Problems in Circle Plane

DONG Zheng_zhu[1,2], LI Shun_cai[1,3], YU De_hao[2]

(1. College of Science, China University of Mining &Technology, Xuzhou, Jiangsu 221008, P. R. China;

2. Institute of Computational Mathematics and Scientific/Engineering Computing, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, P. R. China;

3. College of Polytechnology, Xuzhou Normal University, Xuzhou, Jiangsu 221011, P. R. China)

Abstract: By bianalytic functions, the boundary integral formula of the stress function for the elastic problem in a circle plane is developed. But this integral formula includes a strongly singular integral and can not be directly calculated. After the stress function is expounded to Fourier series, making use of some formulas in generalized functions to the convolutions, the boundary integral formula which doesn't include strongly singular integral is derived further. Then the stress function can be got simply by the integration of the values of the stress function and its derivative on the boundary. Some examples are given. It shows that the boundary integral formula of the stress function for the elastic problem is convenient.

Key words: elastic problem in circle plane; bi_harmonic equation; stress function; boundary integral formula