

文章编号: 1000_0887(2005) 05_0602_07

小幅度非均匀倾斜水底上的 波浪非线性演化*

白玉川¹, 徐海珏¹, 卢东强²

(1. 天津大学 建筑工程学院 河流海岸工程泥沙研究室, 天津 300072;

2. 香港大学 机械工程系, 香港)

(戴世强推荐)

摘要: 天然沙质海岸上存在着不同形状的床面, 波浪在其上面的传播过程是一典型的非线性演化过程。以此为工程背景, 利用摄动方法对小幅度非均匀倾斜床面上波浪的非线性传播过程进行了探讨, 给出了解的表达式, 并与相关的实验资料进行了比较分析, 结果表明, 所建立的波浪演化模型能够反映实际情况。

关键词: 波浪; 沙质海岸; 非线性

中图分类号: O357.4 **文献标识码:** A

引 言

波浪的浅化作用广泛地影响着近岸波浪运动的特征。由于水深对波浪传播过程的浅化作用以及波浪在传播过程中自身的非线性作用, 导致了波浪能量的逐步集中, 当能量集中到一定的程度, 波浪的表面形状将发生剧烈的变形, 直至波浪发生一次、二次及最后的破碎, 波浪的势能大部分完全转变为流动的动能。由于波浪破碎对海岸滩地演变具有较大影响, 因此, 合理推求波浪在渐变水深中的非线性变化, 一直是海岸工程学科研究的热点(李家春^[1], 李瑞杰等^[2])。对于水波的非线性, 戴世强等^[3, 4]采用 Hamilton 的方法进行研究, 取得了重要的成果; 对于波浪破碎过程的模拟, 王永学等^[5, 6]利用 VOF 法, 白玉川等^[7, 8]利用大涡模拟法等先后进行了模拟研究, 较为真实地再现了波浪的破碎过程。

针对海岸工程的具体实际要求, 如何能从理论上推求波浪在倾斜水底上的变化, 并能找出一个波浪破碎的判别标准, 一直是海岸工程学科研究所关心的问题(Peregrine^[9])。60 年代文圣常^[10], 80 年代(Mei, McTigue^[11])、孙孚^[12, 13]、胡定明^[14], 90 年代赵耀南^[15], 马崢^[16], 先后对此作了研究, 但所研究对象是均匀倾斜的水底。事实上, 在现实海滩中很难找到这样理想的模型, 如在沙质海滩上往往存在大的沙坝。实际海滩形状可大致概括为几种情况: 平底水平床面、平底沙波床面、均匀倾斜床面、均匀倾斜沙波床面、沙坝沙坎床面等, 因此, 从工程应用角度来看, 研究小幅度非均匀倾斜床面上的波浪传播情况, 是迈向解决实际床面波浪传播问题的关

* 收稿日期: 2003_04_22; 修订日期: 2005_02_01

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(40376028, 50279030)

作者简介: 白玉川(1967—), 男, 山西神池人, 教授, 博士(联系人, Tel: + 86_22_27401747; Fax: + 86_22_27404299; E_mail: ychbai@tju.edu.cn)。

键步骤·

1 理论模式及其求解

取如图 1 所示的坐标系,海底地形为:

$$h(x) = - \int \alpha_1(x) dx + C_1 = - \int \left[\int \beta_1(x) dx \right] dx + C_2,$$

其中 $\alpha_1(x) = -\alpha(x)$ 为底部坡度, $\beta_1(x) = -\beta(x)$ 为坡度的变化率, α, β 均为小于 1 的参数。取无量纲化二维流体运动方程:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0, \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \\ \eta = - \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right], \quad z = \eta, \end{cases} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \left(- \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad z = -h, \quad (3)$$

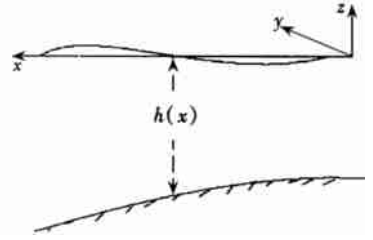


图 1 坐标系

取深水波陡 $\varepsilon = H_0/L_0$ 为小参数,用摄动法将波浪势函数及波面函数进行展开,设:

$$\phi = \varepsilon \phi_1 + \varepsilon^2 \phi_2 + \varepsilon^3 \phi_3 + \dots, \quad \eta = \varepsilon \eta_1 + \varepsilon^2 \eta_2 + \varepsilon^3 \eta_3 + \dots, \quad (4)$$

将(4)代入(1)~(3)式,可得 ϕ_1, ϕ_2 等运动量满足的方程。

1.1 一阶谐波的解析解

设:

$$\begin{aligned} \phi_1 = & F_1[h(x), z, \alpha, \beta] \cos \left[\int k(h(x)) dx + t \right] + \\ & G_1[h(x), z, \alpha, \beta] \sin \left[\int k(h(x)) dt + t \right] = \\ & F_1 \cos \theta + G_1 \sin \theta, \end{aligned} \quad (5)$$

将(5)代入 ϕ_1 的控制方程,并考虑 $\partial h(x)/\partial x = \alpha(x); \partial \alpha(x)/\partial x = \beta$, 则正弦量满足的方程:

$$F_{1hh} \alpha^2 + 2F_{1\alpha h} \alpha \beta + F_{1\alpha\alpha} \beta^2 - F_1 k^2 + 2kG_{1h} \alpha + 2kG_{1\alpha} \beta + G_{1kh} \alpha + F_{1zz} = 0, \quad (6)$$

将(5)代入 ϕ_1 满足的色散方程,将正弦分量合并得:

$$F_{1z} - F_1 = 0, \quad (7)$$

将(5)代入 ϕ_1 满足底部边界条件方程,并将正弦余弦分量合并得:

$$F_{1z} + \alpha^2 F_{1hh} + \alpha \beta F_{1\alpha h} + \alpha k G_1 = 0, \quad G_{1z} + \alpha^2 G_{1hh} + \alpha \beta G_{1\alpha h} - \alpha k F_1 = 0, \quad (8a, b)$$

然后再将 F_1 和 G_1 展为水深的幂级数,取:

$$F_1 = \sum_{i=0}^{\infty} (z+h)^i f_i(h; \alpha, \beta), \quad G_1 = \sum_{i=0}^{\infty} (z+h)^i g_i(h; \alpha, \beta), \quad (9a, b)$$

将(9a)、(9b)代入(6),化简得如下递推公式:

$$\begin{aligned} f_{n+2} = & - \frac{2\alpha(1 - \alpha^2 + \alpha^4 - \alpha^6 + \dots)}{n+2} (f_{n+1h} + \beta f_{n+1\alpha} + k g_{n+1}) - \\ & \frac{(1 - \alpha^2 + \alpha^4 - \alpha^6 + \dots)}{(n+2)(n+1)} (\alpha^2 f_{nhh} + 2\alpha \beta f_{nah} + \beta^2 f_{n\alpha\alpha} - \\ & k^2 f_n + 2k\alpha g_{nh} + 2k\beta g_{n\alpha} + \alpha k h g_n), \end{aligned} \quad (10)$$

将(9a)、(9b)代入底部边界条件,化简得:

$$f_1 = -\alpha(1 - \alpha^2 + \alpha^4 - \alpha^6 + \dots)(g_0 + \beta_0\alpha + kg_0) \quad (11)$$

在小幅度非均匀倾斜情况下, 斜坡坡度 α 及坡度的变化 β 均假定为小量, 可将 f_i, g_i 关于小参数 α, β 展开, f_i 展为:

$$f_{2n+1} = f_{2n+1}^{0,0} + f_{2n+1}^{1,0} + f_{2n+1}^{0,1} + \dots = \frac{k^{2n+1}}{(2n+1)!} \sum_{j=0}^N \sum_{m=0}^M \alpha^j \beta^m P_{jmn}(h), \quad (12)$$

$$f_{2n} = f_{2n}^{0,0} + f_{2n}^{1,0} + f_{2n}^{0,1} + \dots = \frac{k^{2n}}{(2n)!} \sum_{j=0}^N \sum_{m=0}^M \alpha^j \beta^m M_{jmn}(h), \quad (13)$$

其中, $f_n^{j,m}$ 代表与 $\alpha^j \beta^m$ 相对应的项, 如:

$$f_{2n+1}^{j,m} = \frac{k^{2n+1}}{(2n+1)!} \alpha^j \beta^m P_{jmn}(h);$$

并将 (12) 式回代到方程 (10) 中, 可得 α, β 相关阶数的方程。现以零阶: $j+m=0$, 即 $\alpha^0\beta^0$ 为例说明, 而一阶: $j+m=1$, 即 $\alpha^1\beta^0$ 和 $\alpha^0\beta^1$ 的相关方程, 求解方法与之类似。

零阶 $j+m=0$, 即 $\alpha^0\beta^0$:

$$f_{2n+2}^{0,0} = \frac{k^2}{(2n+2)(2n+1)} f_{2n}^{0,0}; \quad f_{2n+1}^{0,0} = \frac{k^2}{(2n+1)2n} f_{2n-1}^{0,0};$$

将 (12) ~ (13) 代入, 可得公式:

$$M_{0,0,n} = M_{0,0,0}, \quad P_{0,0,n} = P_{0,0,0} \quad (14a, b)$$

另外, F_1 和 G_1 也可以写成 $\alpha^j \beta^m$ 摄动展开的形式: $F_1 = F_1^{(0)} + F_1^{(1)} + F_1^{(2)} + \dots; G_1 = G_1^{(0)} + G_1^{(1)} + G_1^{(2)} + \dots$; 其中 $F_1^{(j+m)}$ 对应于 $\alpha^j \beta^m$ 项, 由 (14a)、(14b) 式并考虑 e^x, e^{-x} 及 $\text{ch}x$ 等的级数表达式, 可知:

$$F_1^{(0)} = M_{0,0,0} \text{ch}k(z+h), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} F_1^{(1)} = & \alpha \left[M_{1,0,0} \text{ch}k(z+h) - \frac{k}{2} (z+h)^2 M_{0,0,0} \text{ch}k(z+h) - \right. \\ & \left. (z+h) \dot{M}_{0,0,0} \text{sh}k(z+h) - k(z+h) M_{0,0,0} \text{ch}k(z+h) \right] + \\ & \beta \left[M_{0,1,0} \text{ch}k(z+h) - (z+h) M_{1,0,0} \text{sh}k(z+h) - \right. \\ & \frac{k(z+h)^3}{6} M_{0,0,0} \text{sh}k(z+h) + \frac{k(z+h)^2}{4k} M_{0,0,0} \text{ch}k(z+h) - \\ & \frac{k(z+h)}{4k^2} M_{0,0,0} \text{sh}k(z+h) - \frac{(z+h)^2}{2} M_{0,0,0} \text{ch}k(z+h) + \\ & \frac{(z+h)}{2k} M_{0,0,0} \text{sh}k(z+h) - \frac{k(z+h)^2}{2} M_{0,0,0} \text{sh}k(z+h) + \\ & \left. \frac{(z+h)}{2} M_{0,0,0} \text{ch}k(z+h) - \frac{1}{2k} M_{0,0,0} \text{sh}k(z+h) \right], \quad (16) \end{aligned}$$

当 $z=0$ 时, 根据色散方程 (7) 可得:

$$F_{1z}^{(0)} - F_1^{(0)} = 0; \quad F_{1z}^{(1)} - F_1^{(1)} = 0, \quad (17a, b)$$

由此确定方程 (15) ~ (16) 中的系数表达式。取与 Stokes 波相类似初始条件, 令: $\eta_1^0 = -\partial \Phi_1^0 / \partial t|_{z=0} = a \cos \theta$, 确定出: $M_{0,0,0} = 0, M_{0,0,0} = -a / (k \text{sh}kh)$, 其中具体表达式为: $a =$

$[\text{ch}kh / \sqrt{(h + \text{sh}^2 kh)k}] a_\infty$ 。若取 $E = 1 / (2kh + \text{sh}2kh)$ 可得到一次谐波的解析解总体计算公式:

$$\phi_1 = - \frac{a_\infty}{\sqrt{(h + \text{sh}^2 kh)k}} \text{ch}k(z+h) \sin \left[\int k(h(x)) dx + t \right] + \alpha \left[- \frac{a_\infty}{\sqrt{(h + \text{sh}^2 kh)k}} \right] \times$$

$$\begin{aligned}
& \left[\left(-k^2 h^2 E \cdot \text{sh}kh - \frac{k^2 h^3 E}{3 \text{sh}kh} + khE \cdot \text{ch}kh - \frac{1}{2} - kh \cdot \text{sh}kh \cdot \text{ch}^2 kh \cdot E^2 + \right. \right. \\
& \left. \frac{\text{ch}kh \cdot \text{sh}kh \cdot E}{2} + kh \cdot \text{sh}kh + \frac{kh^2}{2} \frac{1}{\text{sh}kh} - \frac{1}{2} \text{ch}kh \right) \cdot E \cdot \text{ch}k(z+h) + \\
& k^2 E(z+h)^2 \text{ch}k(z+h) + k(z+h) \cdot \text{sh}kh \cdot \text{ch}kh \cdot E^2 \cdot \text{sh}k(z+h) - \\
& k \cdot (z+h) \text{ch}k(z+h) \Big] \cos \left[\int k(h(x)) dx + t \right] + \beta \left[- \frac{a_\infty}{\sqrt{(h + \text{sh}^2 kh) k}} \right] \times \\
& \left[(z+h) \left(-k^2 h^2 E \cdot \text{sh}kh - \frac{k^2 h^3 E}{3 \text{sh}kh} + khE \cdot \text{ch}kh - \frac{1}{2} - \right. \right. \\
& \left. kh \cdot \text{sh}kh \cdot \text{ch}^2 kh \cdot E^2 + \frac{\text{ch}kh \cdot \text{sh}kh \cdot E}{2} + kh \cdot \text{sh}kh + \frac{kh^2}{2} \frac{1}{\text{sh}kh} - \frac{1}{2} \text{ch}kh \right) \times \\
& E \cdot \text{sh}k(z+h) + \frac{k^2 \cdot E}{3} (z+h)^3 \text{sh}k(z+h) - \\
& \frac{k \cdot (z+h)^2 E}{2} \text{ch}k(z+h) + \frac{(z+h) \cdot E}{2} \text{sh}k(z+h) + \\
& k \frac{(z+h)^2}{2} \text{sh}kh \cdot \text{ch}kh \cdot E^2 \cdot \text{ch}k(z+h) - \frac{z+h}{2} \text{sh}kh \cdot \text{ch}kh \cdot E^2 \cdot \text{sh}k(z+h) - \\
& \left. \frac{k}{2} (z+h)^2 \text{sh}k(z+h) + \frac{z+h}{2} \text{ch}k(z+h) \right] \sin \left[\int k(h(x)) dx + t \right]. \quad (18)
\end{aligned}$$

1.2 二阶谐波的解析求解

假设:

$$\begin{aligned}
\phi_2 = & F_2[h(x), z, \alpha, \beta] \cos \left[2 \left\{ \int k dx + t \right\} \right] + \\
& G_2[h(x), z, \alpha, \beta] \sin \left[2 \left\{ \int k dx + t \right\} \right]. \quad (19)
\end{aligned}$$

将(19)代入二阶量 ϕ_2 的控制方程和底部边界条件, 取正弦分量并合并整理得:

$$F_{2hh} \alpha^2 + 2F_{2\alpha h} \alpha \beta + F_{2\alpha\alpha} \beta^2 - 4F_{2k^2} + 4kG_{2h} \alpha + 4kG_{2\alpha} \beta + 2G_{2kh} \alpha + F_{2zz} = 0, \quad (20)$$

$$F_{2z} + \alpha^2 F_{2zh} + \alpha \beta F_{2z\alpha} + 2\alpha k G_2 = 0, \quad (21)$$

与一阶谐波量相似, 再将 F_2, G_2 展为 $z+h$ 的幂级数

$$F_2 = \sum_{i=0}^{\infty} (z+h)^i f'_i(h; \alpha, \beta), \quad G_2 = \sum_{i=0}^{\infty} (z+h)^i g'_i(h; \alpha, \beta), \quad (22)$$

求出所有的 f'_i 和 g'_i ; 同理, 亦将 F_2 和 G_2 写成摄动展开的形式: $F_2 = F_2^{(0)} + F_2^{(1)} + F_2^{(2)} + \dots$; $G_2 = G_2^{(0)} + G_2^{(1)} + G_2^{(2)} + \dots$, 并按照一阶谐波量的求解方法, 定出 $F_2^{(0)}, F_2^{(1)}; G_2^{(0)}, G_2^{(1)}$, 最后得到二阶谐波的总表达式.

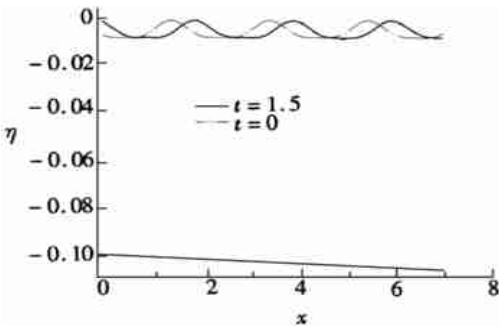


图2 均匀倾斜床面波浪的传播过程

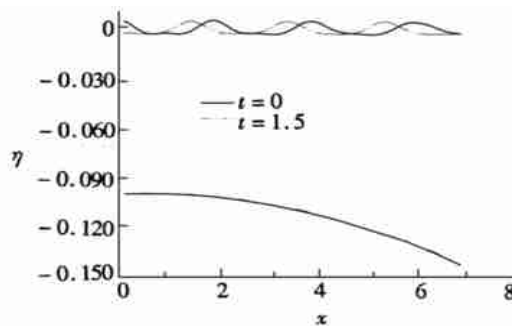


图3 非均匀倾斜凸床面波浪的传播过程

2 波浪特性的计算

2.1 均匀倾斜床面上与小幅度非均匀倾斜床面上波浪传播的非线性演化计算

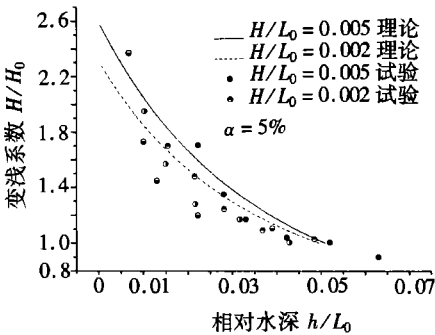
第1种情况(均匀倾斜床面):所有空间坐标、时间及波浪要素采用无量纲量,取 $\varepsilon = 0.003$, $\alpha = 0.001$, $\beta = 0.0$ 及地形 $h(x) = 0.001x + 0.1$, 实线是 $t = 0$, 虚线是 $t = 1.5$, 如图2;

第2种情况(非均匀倾斜凸床面):所有空间坐标、时间及波浪要素采用无量纲量, $\varepsilon = 0.003$, $\beta = 0.002$, $\alpha(x) = 0.002x - 0.001$, 地形为: $h(x) = 0.001x^2 - 0.001x + 0.1$, 实线是 $t = 0$, 虚线是 $t = 1.5$, 如图3;

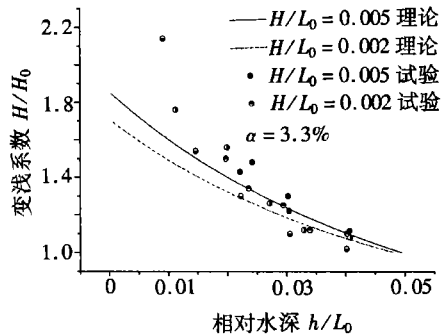
第3种情况(非均匀倾斜凹床面):所有空间坐标、时间及波浪要素采用无量纲量, $\varepsilon = 0.003$, $\beta = -0.002$, $\alpha(x) = -0.002x + 0.001$, 实线是 $t = 0$, 虚线是 $t = 1.5$, 地形为: $h(x) = -0.001x^2 + 0.01x + 0.1$, 如图4;

从图2、图3、图4中可以看出,在深水区波表面近似为正弦或余弦曲线;但当波浪在传播过程中或逐步传播到浅水区时,波峰逐渐变陡,波谷逐渐变为浅平,不对称性越来越明显;而且由于受底部床面起伏的影响,非线性特性也明显地表露了出来。对比图2、图3、图4可以看出,非均匀倾斜床面的凹凸变化对波浪传播过程是具有明显影响的。

2.2 小幅度非均匀倾斜床面上波浪的浅水变形计算



(b)



(c)

图5 均匀倾斜床面波浪变浅系数与相对水深的关系

通过公式 $\eta = \eta_0 + \varepsilon\eta_1 + \varepsilon^2\eta_2$, 在不同的坡度 α 及相应的坡度变化 β (凹凸程度) 情况, 计算波浪的变浅系数及不同 α, β 对波浪浅水变形作用的影响。

第1种情况(均匀倾斜床面, $\beta = 0.0$): 针对不同水底坡度及不同的深水波陡, 计算出波浪变浅系数与相对水深的变化关系, 并与 Iwagaki Y 和 Sakai T 的实验结果进行对比, 见图5。

第2种情况(非均匀倾斜凸床面, $\beta > 0.0$): 取底床地形为 $h_b(x) = 0.5\beta x^2 + 0.05x + c$,

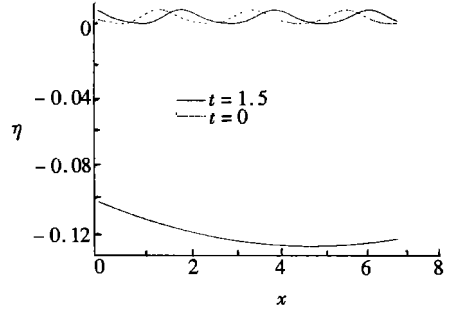
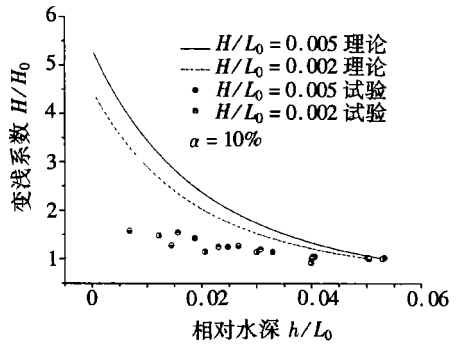


图4 非均匀倾斜凹床面波浪的传播过程



(a)

均匀床面波浪变浅系数与相对水深的关系

$\varepsilon = 0.027$, 不同 β 值情况下深水波陡 $H_0/L_0 = 0.005$ 的波浪, 其变浅系数随相对水深的变化情况, 见图 6(a)。

第 3 种情况(非均匀倾斜凹床面, $\beta < 0.0$): 取底床地形为 $h_b(x) = 0.5\beta x^2 + 0.03x + c$, $\varepsilon = 0.027$, 不同 β 值情况下深水波陡 $H_0/L_0 = 0.005$ 的波浪, 其变浅系数随相对水深的变化情况, 见图 6(b)。

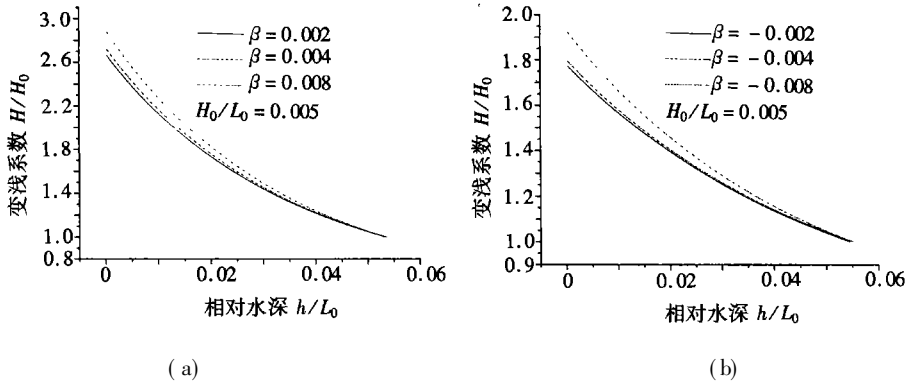


图 6 非均匀倾斜凸(凹)床面波浪变浅系数与相对水深的关系

第 1 种情况, 计算研究了在不同坡度的均匀倾斜床面上, 波浪变浅系数与相对水深的变化关系, 并与 Iwagaki Y 和 Sakai T 的实验结果进行对比, 从图 5 中可以看出, 理论结果与实验值基本吻合。当坡度小于 5% 时, 理论计算的结果与实验值吻合较好, 说明本文所建立的理论模型是正确的, 能反映波浪的浅化过程。

第 2、第 3 种情况, 计算研究了非均匀倾斜凸床面和凹床面上, 波浪变浅系数与相对水深的变化关系。由于没有适合的实验资料验证, 只给出了理论计算的结果, 从图 6 中可以看出, 床面的凹凸变化情况对波浪的浅水效应是有影响的。在非均匀倾斜凸床面的情况下, 床面凸起程度愈大, 波浪的浅水效应愈强; 对于在非均匀倾斜凹床面, 亦有类似的结果。

3 分析与结论

天然沙质海岸上, 存在着各种不同形状的床面, 波浪在其上面的传播过程, 是一典型的非线性演化过程。本文以此为工程背景, 利用摄动方法, 针对小幅度非均匀倾斜床面上波浪的非线性传播过程进行了探讨, 建立了相应的理论模型, 给出了解析的理论结果, 通过计算并与其他相关的实验资料比较, 证明理论模型可以反映实际波浪的传播及波浪的非线性演化过程。计算结果表明, 床面的凹凸变化情况对波浪的浅水效应是有影响的。在非均匀倾斜凸凹床面的情况下, 床面凹凸起伏程度愈大, 对波浪的浅水效应愈强。非均匀倾斜床面的凹凸变化对波浪传播过程影响明显, 其非线性效应, 也促使了波浪表面形状向非对称的方向发展。

[参 考 文 献]

- [1] 李家春. 现代流体力学发展的回顾与展望[J]. 力学进展, 1995, 24(4): 442—450.
- [2] 李瑞杰, 王爱群, 王厚杰. 波浪在浅水传播中的弱非线性效应[J]. 海洋工程, 2000, 18(3): 30—38.
- [3] 张宝善, 卢东强, 戴世强. 非线性水波 Hamilton 系统理论与应用研究进展[J]. 力学进展, 1998, 28(4): 521—531.
- [4] 卢东强, 戴世强, 张宝善. 一个二流体系统中非线性水波的 Hamilton 描述[J]. 应用数学和力学, 1999, 20(4): 331—336.
- [5] 王永学. 孤立波破碎过程试验与数模结果比较[J]. 大连理工大学学报, 1994, 34(4): 463—469.

- [6] Qi Peng, WANG Yong_xue. Hydraulic modeling of a curtain_walled dissipater by the coupling of RANS and Boussinesq equations[J]. China Ocean Engineering, 2002, **16**(2): 201—210.
- [7] BAI Yu_chuan, JIANG Chang_bo, SHEN Huan_ting. Large eddy simulation for wave breaking in surf zone[J]. China Ocean Engineering, 2001, **15**(4): 541—552.
- [8] BAI Yu_chuan, NG Chiu_on. Large eddy simulation for wave plunge breaker and sediment suspension [J]. China Ocean Engineering, 2002, **16**(2): 151—164.
- [9] Peregrine D H. Breaking wave on beaches[J]. Annual Review of Fluid Mechanics, 1983, **15**: 149—178.
- [10] 文圣常, 余宙文. 海浪理论与计算原理[M]. 北京: 科学出版社, 1984.
- [11] Mei C C, Mctique D F. Stresses in a submarine topography under ocean waves[J]. Journal of Energy Resources Technology, Transactions of the ASME, 1984, **106**(3): 311—318.
- [12] 孙孚. 均匀倾斜水底上非线性波浪的传播与变形 I ——非线性波动[J]. 海洋学报, 1985, **7**(6): 674—683.
- [13] 孙孚. 均匀倾斜水底上非线性波浪的传播与变形 II ——波浪的破碎[J]. 海洋学报, 1986, **8**(1): 1—7.
- [14] 胡定明. 倾斜水底上线性波动势函数解析解[J]. 海洋学报, 1985, **7**(5): 539—553.
- [15] 陈妙福, 赵耀南. 倾斜底坡上波浪的传播与破碎[J]. 水动力学研究与进展(A 辑), 1992, **7**(2): 192—199.
- [16] 马峥. 非线性水波在渐变水深中的演化问题[D]. 硕士论文. 天津: 天津大学, 1993.

Nonlinear Evolution of the Wave on the Small Amplitude Uneven Sloping Bed

BAI Yu_chuan¹, XU Hai_jue¹, LU Dong_qiang²

(1. Institute for Sedimentation on River and Coastal Engineering,
Tianjin University, Tianjin 300072, P. R. China;

2. Department of mechanical engineering, The University of Hong Kong,
Hong Kong, P. R. China)

Abstract: There are different forms of the beds on the natural sandy coast, on which the propagation process of the wave is a typical nonlinear one. Based on this, the nonlinear propagation process of the wave on the small_amplitude uneven sloping bed is analyzed by using the perturbation method. The results of the analytic expression are compared with the correlative experimental data, which shows that the practical situation can be reflected in the evolution of the established model of the wave.

Key words: wave; sandy coast; non_linearity