

文章编号: 1000_0887(2005) 05_0609_05

小波理论在无单元方法中权函数研究的应用*

张 红¹, 张选兵², 葛修润³

- (1. 武汉大学 遥感信息工程学院, 武汉 430079;
2. 福州大学 土木建筑工程学院, 福州 350002;
3. 中国科学院 武汉岩土力学研究所, 武汉 430071)

(戴世强推荐)

摘要: 小波理论中多分辨率分析(MRA), 可以提供在不同分辨率下分析表达信息的有效途径。基于样条小波多分辨率分析, 将无单元中的权函数投影到尺度空间去研究, 尝试一种新的权函数研究方法, 并给出了算例。

关键词: 无单元; 权函数; 样条小波; 多分辨率分析
中图分类号: O242. 29; O175. 29 文献标识码: A

引 言

无单元法只需要节点信息, 不需要单元信息, 发展很快, 有 EFEM^[1], SPH^[2], RKPM^[3], PU^[4] 等许多种类。

无单元法中权函数及其参数的选取对拟合的效果影响很大^[1]。

合理准确地确定权函数影响半径大小是目前的最大困难, 影响半径在实践上是由分段连续的权函数给出的, 影响半径的使用, 或者说权函数的使用强调近似解与真实解在某一区间上的拟合程度, 实际计算表明, 影响半径大的取值对最终的场函数近似解和导数有较大影响^[5]。

权函数有紧支撑域(即有限区域), 确保整体刚度矩阵的稀疏, 以及他们在影响域内的函数形式。

1 多分辨率分析(multiresolution analysis, MRA)

多分辨率分析在小波理论中占有十分重要地位^[6,7], 它给出了构造小波基的一般方法, 实现了小波变换的快速算法。

定义 一个多分辨率分析(MRA)是指满足以下条件的 $L^2(\mathbf{R})$ 中的一簇嵌套子空间 $V_j \subset L^2(\mathbf{R}), j \in \mathbf{Z}$:

* 收稿日期: 2003_11_08; 修订日期: 2004_12_31

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50409008)

作者简介: 张红(1974—), 女, 新疆石河子市, 博士(联系人. Tel: + 86_27_62014541; Fax: + 86_27_68778086; E_mail: hongzhangwh@163.com)。

- i) $\forall j \in \mathbf{Z}, V_{j-1} \subset V_j$, 即 $\dots \subset V_{-2} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots$;
 ii) $\bigcap_{j \in \mathbf{Z}} V_j = \{0\}$;
 iii) $\overline{\bigcup_{j \in \mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R})$;
 iv) $V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}, V_{j-1} \perp W_{j-1}$;
 v) $f(x) \in V_{j-1} \Leftrightarrow f(2x) \in V_j$;
 vi) $f(x) \in V_j \Leftrightarrow \left[x + \frac{1}{2} \right] \in V_j$.

空间 V_j 称作“尺度空间”，它们都是由尺度函数 ϕ 生成，即存在 $\phi \in V_0$ 使得 $\{\phi(x-n), n \in \mathbf{Z}\}$ 构成了 V_0 空间的标准正交基，它的伸缩和平移构成了每一空间 V_j 的正交基，即

$$V_j = \text{linear span}\{\phi_k, k \in \mathbf{Z}\}, \quad (1)$$

$$\text{其中 } \phi_k(x) = a^{j/2} \phi(2^j x - k). \quad (2)$$

V_j 的正交补空间 W_j 称作“小波空间”，它们是由小波函数 ψ 经与(2)式同样的伸缩和平移生成，即

$$\Psi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k \phi(2x - k), \quad (3)$$

$$W_j = \text{linear span}\{\psi_k, k \in \mathbf{Z}\}. \quad (4)$$

条件 i)、ii)、iv) 说明所有的 $\{W_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$ 都是相互正交的，且它们的直和构成 $L^2(\mathbf{R})$ ，因为对于每一个 j ，形成 W_j 的归一化正交基，所以所有的 $\{\psi_k, j, k \in \mathbf{Z}\}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 的完全归一化正交小波基。

令 $P_j f$ 代表到 V_j 空间的正交投影算子，那么

$$P_j f = \sum_k \langle f, \phi_k \rangle \phi_k \quad (5)$$

就代表了函数 f 在尺度 $a = 2^{-j}$ 下的最佳近似，它包含了函数在更大尺度 $a = 2^{-(j-1)}$ 下的所有必须的信息，从 ii) 可知，当尺度减小到 $a = 2^{-\infty} = 0$ 时，即 $\lim_j P_j f = f$ ，相反，从 iii) 可知，当尺度增大到 $a = \infty$ 时，即 $\lim_j P_j f = 0$ 。当计算尺度 $a = 2^{-(j-1)}$ 下 f 的近似 $P_{j-1} f$ 时将损失一些信息，而这些损失掉的信息都存放在 iv) 给出的正交补空间 W_{j-1} 中，令 Q_j 代表到 W_j 空间的正交投影算子，即

$$Q_j f = \sum_k \langle f, \psi_k \rangle \psi_k, \quad (6)$$

那么

$$P_j f = P_{j-1} f + Q_{j-1} f \quad (7)$$

这种分解是唯一的。

由 i) 和 iv) 可知，一个尺度空间 V_j 可以进行如下的分解

$$\begin{aligned} V_j &= W_{j-1} \oplus V_{j-1} = W_{j-1} \oplus W_{j-2} \oplus V_{j-2} = \\ &\dots = W_{j-1} \oplus W_{j-2} \oplus \dots \oplus W_{j-M} \oplus V_{j-M}. \end{aligned} \quad (8)$$

相应的

$$P_j f = Q_{j-1} f + Q_{j-2} f + \dots + Q_{j-M} f + P_{j-M} f. \quad (9)$$

2 样条小波函数

基数样条分析 构造小波的基本方法之一是“基数 B_样条函数”的使用。基数 B_样条函

数或许对于软件或硬件实现都是最有效的具有小支撑的最简单函数^[8]。

m 阶基数 B_样条的定义:

$$N_m(x) := (N_{m-1} \times N_1) = \int_0^1 N_{m-1}(x-t) dt, \quad m \geq 2,$$

其中 N_1 是区间 $[0, 1]$ 的特征函数;

N_m 关于它的支撑中心是对称, 即:

$$N_m\left(\frac{m}{2} + x\right) = N_m\left(\frac{m}{2} - x\right), \quad x \in \mathbf{R}$$

$$N_m(x) = \sum_{k=0}^m P_{m,k} N_m(2x - k),$$

其中

$$P_{m,k} = \begin{cases} 2^{-m+1} \binom{m}{k}, & 0 \leq k \leq m, \\ 0, & \text{其它} \cdot \end{cases}$$

这个公式自然数为 m 阶基数 B_样条的“两尺度关系”, 插值样条小波。

$$\phi_m(x) = \sum_n q_n N_m(2x - n),$$

$$q_n = \frac{(-1)^n}{2^{m-1}} \sum_{l=1}^m \binom{m}{l} N_{2m}(n+1-l), \quad n = 0, \dots, 3m-2,$$

$$\text{supp } \phi_m = [0, 2m-1] \cdot$$

1) 分段为二次函数的 B 样条

$$\varphi(x) = \begin{cases} (x+1)^2/2, & -1 \leq x \leq 0, \\ \frac{3}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ (x-2)^2/2, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{其它} \cdot \end{cases}$$

2) 分段为三次函数的 B 样条

$$\varphi(x) = \begin{cases} (x+2)^3/6, & -2 \leq x \leq -1, \\ [(2+x)^3 - 4(x+1)^3] / 6, & -1 \leq x \leq 0, \\ [(2-x)^3 - 4(1-x)^3] / 6, & 0 \leq x \leq 1, \\ (2-x)^3/6, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{其它} \cdot \end{cases}$$

对二次样条函数有如下参数:

$$\{P_k\}^{(3)} = [0.5 \quad 1 \quad 0.5]^T \quad (k = 0, 1, 2),$$

$$\{Q_k\}^{(3)} = [1/12 \quad -12/24 \quad 20/24 \quad -12/24 \quad 1/12] \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4),$$

对三次样条函数有如下参数:

$$\{P_k\}^{(4)} = \frac{1}{8} [1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1]^T \quad (k = 0, 1, \dots, 4),$$

$$\{Q_k\}^{(4)} = \frac{1}{40 \cdot 320} [1 \quad -124 \quad 1667 \quad -7904 \quad 18482 \quad -24264 \quad 18482 \quad -7904 \quad 1667 \quad -124]^T \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 10) \cdot$$

3 权函数的小波多分辨率分析

小波函数有在不同分辨率水平表达函数的能力^[8]。

令 $P_j f$ 代表到 V_j 空间的正交投影算子, 那么

$$P_j f = \sum_k \langle f, \phi_k \rangle \phi_k$$

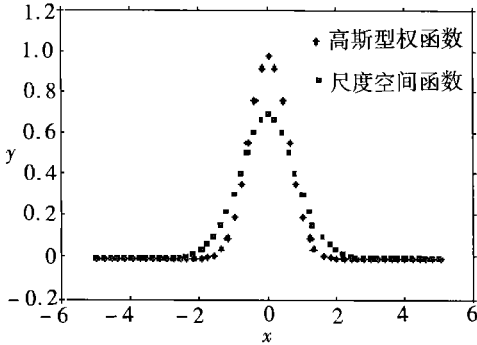
我们研究高斯型权函数

$$w(d_I) = \begin{cases} \left\{ \exp\left[-\left(\frac{d_I}{c}\right)^2\right] - \exp\left[-\left(\frac{d_m}{c}\right)^2\right] \right\} \left\{ 1 - \exp\left[-\left(\frac{d_m}{c}\right)^2\right] \right\}, & d_I \leq d_m, \\ 0, & d_I > d_m, \end{cases}$$

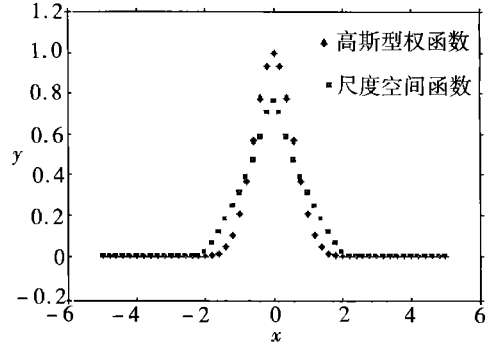
式中: d_I 是 x 与 x_I 的距离, $d_I = \|x - x_I\|$, d_m 是 x 的影响域半径, c 是控制相对权重的参数, $c = ac_I$, $1 \leq a \leq 2$, 对梯度大的问题, 取 a 接近 1。

$$c_I = \max_{j \in S_j} \|x_j - x_I\|,$$

式中: S_j 是 x_I 的邻近节点组成的最小点集, 这些点构成围绕 x_I 的多边形。对均匀分布的节点来说, c_I 是节点间的最大距离。



(以对称轴旋转即生成二维的权函数)



(以对称轴旋转即生成二维的权函数)

图1 以三次样条小波函数 V_0 空间的权函数 图2 以二次样条小波函数 V_0 空间的权函数

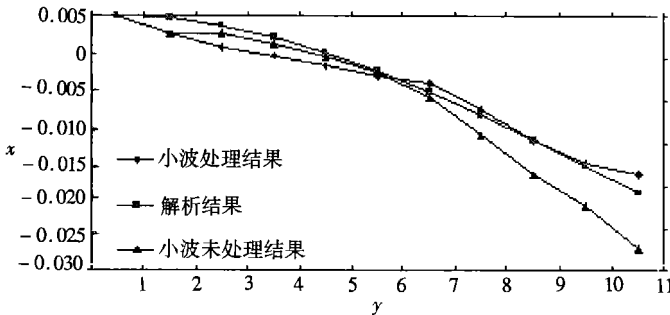


图3 悬臂梁挠度计算结果比较

高斯型权函数中当参数 $d_m = 5.0$, $c = 0.8$, 我们得到三次样条小波函数 V_0 空间的权函数及二次样条小波函数 V_0 空间的原函数与尺度空间函数的多分辨率分析曲线差异, 见图 1, 图 2。

我们选择上述高斯型权函数, $d_m = 4.0$, $c = 0.8$, 选择三次样条构造尺度函数和小波函

数, $w(x) = \sum_k S_{j,k} \phi_{j,k}(x) + \sum_k g_{j,k} \psi_{j,k}(x)$, $j = -2$, 计算结果如图 3^[9]。

4 结 论

我们选取样条小波函数, 实现了权函数的小波多分辨率分析, 为小波的尺度空间研究 MLS 打下基础。本文的悬臂梁变形计算结果表明, 原权函数投影到三次样条小波函数空间形成的新的权函数的性能优于原高斯型权函数, 可以用它来进行无单元方法中权函数研究。

[参 考 文 献]

- [1] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Element-free Galerkin methods[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1994, **37**: 229—256.
- [2] Monaghan J. An introduction to SPH[J]. Computer Physics Communication, 1988, **48**: 89—96.
- [3] Liu W K, Jun S, Zhang S. Reproducing kernel particle methods[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1995, **20**: 1081—1106.
- [4] Melenk J M, Babuska I. The partition of unity finite element method: basic theory and application [J]. Computer Methods in Applied Mechanics Engineering, 1996, **139**: 289—314.
- [5] 周小平. 对进一步发展无单元法的几点设想[J]. 福州大学学报, 2001, **29**(3): 84—87.
- [6] Mallat S. Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$ [J]. Trans of the American Mathematical Society, 1989, **315**: 69—87.
- [7] 赵松年, 熊小芸. 小波变换与子波分析[M]. 北京: 电子工业出版社, 1992.
- [8] Charles K C. An Introduction to Wavelet [M]. Academic Press, 1992.
- [9] 张选兵. 基于敏感性分析和小波分析的无单元研究[D]. 武汉: 中国科学院武汉岩土力学研究所, 2002, 06.

Application of Wavelet Theory in Research on Weight Function of Meshless Method

ZHANG Hong¹, ZHANG Xuan_bing², GE Xiu_run³

(1. School of Remote Sensing and Information Engineering, Wuhan University, Wuhan 430079, P. R. China;

2. College of Civil Engineering and Architecture, Fuzhou University, Fuzhou 350002, P. R. China;

3. Wuhan Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, P. R. China)

Abstract: Multiresolution analysis of wavelet theory can give an effective way to describe the information at various levels of approximations or different resolutions, based on spline wavelet analysis, so weight function is orthonormally projected onto a sequence of closed spline subspaces, and is viewed at various levels of approximations or different resolutions. Now, the useful new way to research weight function is found, and the numerical result is given.

Key words: meshless method; weight function; spline wavelet; multiresolution analysis