

文章编号: 1000_0887(2005) 05_0625_06

层焰系统奇点结构的研究*

王秀娥¹, 殷先军²

- (1. 北京工商大学 基础部, 北京 100037;
2. 北京理工大学 理学院, 北京 100081)

(本刊原编委樊大钧推荐)

摘要: 在一定的假设条件下, 将气体燃烧的物理模型简化为层焰系统。借助于热力学理论和相关的守恒定律建立了层焰系统的数学模型并对其进行了深入地分析。利用常微分方程的定性理论和方法, 结合燃烧的实际需要, 对应于参数的不同取值, 研究了位于瑞利线上奇点的个数和位置, 确定了爆燃区和爆炸区内不同奇点的定性结构及其稳定性, 给出了在反应速度_滞止焓平面及燃烧速度_滞止焓平面内层焰系统轨线的相图

关键词: 层焰系统; 瑞利线; 奇点; 轨线; 相图

中图分类号: O175.1 **文献标识码:** A

引 言

一般的燃烧装置和燃烧过程是比较复杂的, 为了便于研究并不失一般性, 在一定的假设条件下, 将其物理模型简化为层焰系统。由热力学理论(见文献[1]和文献[2])可知, 层焰系统可由下述方程描述:

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = F_{\varphi}(\varphi, \tau) = \varphi - 1 + \frac{1}{\gamma M_0^2} \left\{ \frac{1}{\varphi} \left[1 + \alpha' \tau - \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2 (\varphi^2 - 1) \right] - 1 \right\}, \quad (1)$$

$$\frac{d\varepsilon}{d\xi} = F_{\varepsilon}(\varphi, \tau) = \left[\frac{\lambda \beta_1 T^{\alpha_1}}{m^2 c_p} \right] (1 - \tau) e^{-E_1/(RT)}, \quad (2)$$

$$\frac{d\tau}{d\xi} = \tau - \varepsilon, \quad (3)$$

其中方程(1)、(2)、(3)分别为动量守恒方程、质量守恒方程和滞止温度的无量纲形式, 式中 $0 \leq \tau \leq 1$ 为滞止焓, φ 为无量纲化燃烧速度, ε 为标准化质量通量分数, ξ 为无量纲化距离变量, $\gamma, M_0, \alpha_1, \alpha', m, \rho, \beta_1, c_p, E_1, R, T$ 为热力学参数(见文献[1])。

从方程(1)、(2)中消去 $d\xi$ 得

* 收稿日期: 2003_10_24; 修订日期: 2004_12_17

基金项目: 北京市自然科学基金资助项目(1042007); 教育部留学回国人员科研启动基金资助项目(Lxkyjj200416)

作者简介: 王秀娥(1957—), 女, 山东郓城人, 副教授(E-mail: hgrhs@hotmail.com); 殷先军(联系人, Tel: + 86_10_68911583; E-mail: yinxj@hotmail.com)。

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{F_{\varphi}(\varphi, \tau)}{\tau - \varepsilon}, \quad (4)$$

$$\frac{d\varepsilon}{d\tau} = \frac{F_{\varepsilon}(\varphi, \tau)}{\tau - \varepsilon}, \quad (5)$$

且当 $\tau = 0$ 时, $\varepsilon = 0, \varphi = 1$; 当 $\tau = 1$ 时, $\varepsilon = 1, \varphi = \varphi_{\infty}$ (φ_{∞} 是由 $F_{\varphi}(\varphi, 1) = 0$ 所确定的一个常数)。

理论上, 如果我们可以得到方程(4)和(5)的解 $\varphi = \varphi(\tau), \varepsilon = \varepsilon(\tau)$, 那么对方程(3)积分, 得

$$\xi = \int_{\tau_1}^{\tau} \frac{d\tau}{\tau - \varepsilon}.$$

在解空间 $(\varphi, \tau, \varepsilon)$ 中, $\varphi = \varphi(\tau), \varepsilon = \varepsilon(\tau)$ 表示一条在如图 1 所示的区域中连接 $(1, 0, 0)$ 和 $(\varphi_{\infty}, 1, 1)$ 的曲线。

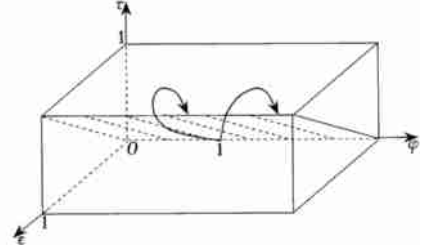


图 1 层焰系统解的图示

1 奇点的位置

由方程(1)、(2)和(3)可知, 系统的所有奇点都位于平面 $\tau = \varepsilon$ 中, 并且满足

$$F_{\varphi}(\varphi, \tau) = 0, \quad F_{\varepsilon}(\varphi, \tau) = 0,$$

在燃烧模型中, 重要的是在直线 $\tau = \varepsilon = 0$ 和 $\tau = \varepsilon = 1$ 上的奇点。令 $F_{\varphi}(\varphi, \tau) = 0$, 得

$$\alpha' \tau = - \frac{\gamma + 1}{2} M_0^2 \varphi^2 + (1 + \gamma M_0^2) \varphi - \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2 \right], \quad (6)$$

由此解得

$$\varphi = \varphi_{\pm}(\tau) = \frac{1 + \gamma M_0^2 \pm [(M_0^2 - 1)^2 - 2(\gamma + 1)M_0^2 \alpha' \tau]^{1/2}}{(\gamma + 1)M_0^2}.$$

由(6)式定义的曲线为水平等倾线——瑞利线, 不论式中参数取何值, 在 (φ, τ) 平面上, 瑞利线总是穿过点 $(1, 0)$ 。由(6)式, 得

$$\frac{\partial(\alpha' \tau)}{\partial \varphi} = -(\gamma + 1)M_0^2 \varphi + 1 + \gamma M_0^2.$$

令 $\partial(\alpha' \tau)/\partial \varphi = 0$, 得

$$\varphi = \frac{1 + \gamma M_0^2}{(\gamma + 1)M_0^2} = \frac{\gamma}{\gamma + 1} + \frac{1}{\gamma + 1} M_0^{-2},$$

$$\frac{\partial^2(\alpha' \tau)}{\partial \varphi^2} = -(\gamma + 1)M_0^2 < 0,$$

从而 $\alpha' \tau$ 在 $\xi = \gamma/(\gamma + 1) + [1/(\gamma + 1)]M_0^{-2}$ 取得一最大值:

$$\tau_{\max} = \frac{(M_0^2 - 1)^2}{2(\gamma + 1)M_0^2}.$$

如图 2 所示, 瑞利线关于 φ 凸, 交 φ 轴于 $\varphi = 1$ 和 $\varphi = (\gamma - 1)/(\gamma + 1) + [2/(\gamma + 1)]M_0^{-2}$ 两点, 曲线在这两点的斜率分别为 $M_0^2 - 1$ 和 $1 - M_0^2$ 。如分别取 $M_0 = 0.2, M_0 = 3$, 由于 $\tau_{\max} > 1$, 所以, 每一条水平等倾线在 $\varphi - \alpha' \tau$ 平面内交 $\tau = \varepsilon = 1$ 于两点。因而, 对每一个 M_0 , 系统有 4 个奇点, 分别对应于瑞利线和直线 $\tau = \varepsilon = 0, \tau = \varepsilon = 1$ 的交点: $(\varphi_-(0), 0, 0), (\varphi_-(0), 0, 0), (\varphi_+(1), 1, 1), (\varphi_-(1), 1, 1)$ 。

由物理意义知, 水平等倾线在 $M_0 > 1$ 时位于爆炸区内, f 点代表爆炸的冷边界点, 而 $a(b)$ 则为强(弱)爆炸的热边界点; 当 $M_0 < 1$ 时, 水平等倾线位于暴燃区中, f 表示暴燃的冷边界点,

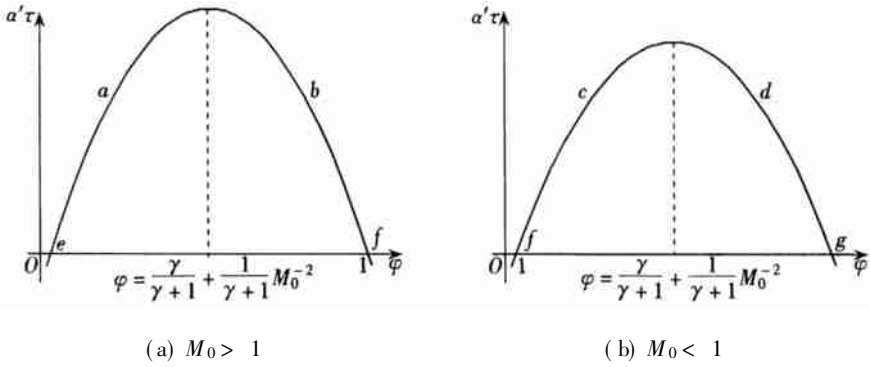


图2 奇点的位置

而 $c(d)$ 表示强(弱)暴燃的热边界点。

2 奇点的类型

利用文献[3]提供的方法讨论奇点的类型。为简单起见,将 $(\varphi, \tau, \varepsilon)$ 投影到 $\tau-\varepsilon, \varphi-\tau$ 平面内。我们首先讨论在 $(\tau, \varepsilon) = (0, 0)$ 和 $(\tau, \varepsilon) = (1, 1)$ 附近轨线的性态。

由方程(2)、(3)知:若 $(0, 0)$ 为奇点,则 $F_\varepsilon(\varphi, \tau) = 0$ 。为了简化冷边界的困难,我们假设在 $(0, 0)$ 附近, $F_\varepsilon(\varphi, \tau) = 0$, 所以,在此区域中有

$$\frac{d\varepsilon}{d\xi} = 0, \quad \frac{d\tau}{d\xi} = \tau - \varepsilon,$$

因而在 $(0, 0)$ 的一个小邻域中, $\varepsilon = 0, \tau$ 单调增, $(0, 0)$ 附近的轨线结构见图3。

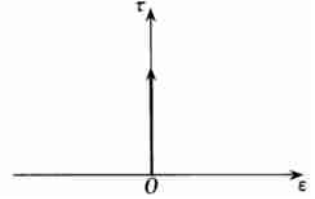


图3 $(0, 0)$ 附近轨线的结构

对奇点 $(1, 1)$, 令 $\varepsilon = \varepsilon - 1, \tau = \tau - 1$, 则一次近似的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} 0 & -\frac{\lambda\beta_1 T^{\alpha_1}}{m^2 c_p} e^{-E_1/(RT)} \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{\lambda\beta_1 T^{\alpha_1}}{m^2 c_p} e^{-E_1/(RT)} < 0,$$

可见 $(1, 1)$ 是鞍点, 只有一条轨线从 $\varepsilon \leq 1, \tau \leq 1$ 的区域趋近于 $(1, 1)$ 。为了确定这一特征方向, 将一次近似方程改写为

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon}{d\xi} = -\lim_{\tau \rightarrow 1} \frac{F_\varepsilon(\varphi, \tau) - F_\varepsilon(\varphi, 1)}{1 - \tau} \tau = -\lim_{\tau \rightarrow 1} \frac{F_\varepsilon(\varphi, \tau)}{1 - \tau} \tau, \\ \frac{d\tau}{d\xi} = \tau - \varepsilon, \end{cases}$$

令 $\varepsilon = r \cos \theta, \tau = r \sin \theta$, 则此特征方向对应的 θ 满足

$$G(\theta) = \cos \theta (\sin \theta - \cos \theta) + A \sin^2 \theta = \sin^2 \theta (\cot \theta - \cot^2 \theta + A) = 0,$$

其中 $A = \lim_{\tau \rightarrow 1} F_\varepsilon(\varphi, \tau)/(1 - \tau)$, 由此得

$$\cot \theta = \frac{1 + \sqrt{1 + 4A}}{2},$$

即特征方向为

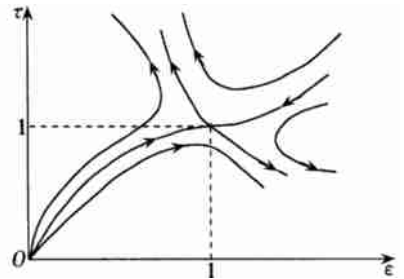


图4 $(1, 1)$ 附近轨线的结构

$$\frac{d\varepsilon}{d\xi} = \frac{\sqrt{1 + 4 \lim_{\tau \rightarrow 1} [F_\varepsilon(\varphi, \tau)/(1 - \tau)]}}{2} \geq 1.$$

所以, 在位于 $\tau > \varepsilon$ 内 $(1, 1)$ 点的邻域中, ε 比 τ 增加的快. 因此, 在 $\tau\varepsilon$ 平面内, $(1, 1)$ 点附近的轨线结构如图 4 所示.

下面讨论 $\varphi\tau$ 平面内奇点附近的轨线分布. 在该平面内, 奇点为 $(\varphi_+(0), 0)$, $(\varphi_-(0), 0)$, $(\varphi_+(1), 1)$, $(\varphi_-(1), 1)$. 对奇点 $(\varphi_+(0), 0)$, $(\varphi_-(0), 0)$, 令 $\varphi = \varphi - \varphi_\pm(0)$, $\tau = \tau$, 则一次近似方程为

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{d\xi} = \left[1 + \frac{1}{\sqrt{M_0^2}} \frac{(1 - \gamma) M_0^2 \varphi_\pm^2(0) - 1 + [(\gamma - 1)/2] M_0^2 (\varphi_\pm^2(0) - 1)}{\varphi_\pm^2(0)} \right] \varphi_+ \\ \quad \frac{\alpha'}{\sqrt{M_0^2} \varphi_\pm(0)} \tau, \\ \frac{d\tau}{d\xi} = \tau. \end{cases}$$

由 $F(\varphi_\pm(0), 0) = 0$, 得

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \left[1 + \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\sqrt{M_0^2} \varphi_\pm(0)} - \frac{1}{\varphi_\pm(0)} \right] \varphi_+ + \frac{\alpha'}{\sqrt{M_0^2} \varphi_\pm(0)} \tau.$$

当 $\varphi_\pm(0) = 1$ 时,

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{1}{\gamma} \left[1 - \frac{1}{M_0^2} \right] \varphi_+ + \frac{\alpha'}{\sqrt{M_0^2}} \tau.$$

当 $\varphi_\pm(0) \neq 1$ 时,

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{1}{\gamma \varphi_\pm(0)} \left[\varphi_\pm(0) + \gamma \varphi_\pm(0) - \gamma - \frac{1}{M_0^2} \right] \varphi_+ + \frac{\alpha'}{\sqrt{M_0^2} \varphi_\pm(0)} \tau.$$

$$\therefore (1 + \gamma) \varphi_\pm(0) = \gamma - 1 + \frac{2}{M_0^2},$$

$$\therefore \frac{d\varphi}{d\xi} = - \frac{1}{\gamma \varphi_\pm(0)} \left[1 - \frac{1}{M_0^2} \right] \varphi_+ + \frac{\alpha'}{\sqrt{M_0^2} \varphi_\pm(0)} \tau.$$

一般地, 记

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{(-1)^a}{\gamma \varphi_\pm(0)} \left[1 - \frac{1}{M_0^2} \right] \varphi_+ + \frac{\alpha'}{\sqrt{M_0^2} \varphi_\pm(0)} \tau.$$

则当 $\varphi_\pm(0) = 1$ 时, $a = 0$; 当 $\varphi_\pm(0) \neq 1$ 时, $a = 1$. 于一阶近似的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} \frac{(-1)^a}{\gamma \varphi_\pm(0)} \left[1 - \frac{1}{M_0^2} \right] & \frac{\alpha'}{\sqrt{M_0^2} \varphi_\pm(0)} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{(-1)^a}{\gamma \varphi_\pm(0)} \left[1 - \frac{1}{M_0^2} \right],$$

所以, 当 $(-1)^a (1 - 1/M_0^2) > 0$ 时, $(\varphi_\pm(0), 0)$ 为不稳定结点; 当 $(-1)^a (1 - 1/M_0^2) < 0$ 时, $(\varphi_\pm(0), 0)$ 为鞍点.

对奇点 $(\varphi_\pm(1), 1)$, 令 $\varphi = \varphi - \varphi_\pm(1)$, $\tau = 1 - \tau$, 对应的一次近似方程为

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{1}{\gamma \varphi_\pm(1)} \left[(\gamma + 1) \varphi_\pm(1) - \gamma - \frac{1}{M_0^2} \right] \varphi_- - \frac{\alpha'}{\sqrt{M_0^2} \varphi_\pm(1)} \tau, \\ \frac{d\tau}{d\xi} = -\tau. \end{cases}$$

由图 2 知

$$\begin{aligned} \varphi_+(1) &> \frac{1}{\gamma+1} \left[\gamma + \frac{1}{M_0^2} \right], \\ \varphi_-(1) &< \frac{1}{\gamma+1} \left[\gamma + \frac{1}{M_0^2} \right], \\ \therefore \frac{1}{\gamma\varphi_+(1)} \left[(\gamma+1)\varphi_+(1) - \gamma - \frac{1}{M_0^2} \right] &> 0, \\ \frac{1}{\gamma\varphi_-(1)} \left[(\gamma+1)\varphi_-(1) - \gamma - \frac{1}{M_0^2} \right] &< 0. \end{aligned}$$

因而特征方程

$$\begin{vmatrix} \lambda - \frac{1}{\gamma\varphi_+(1)} \left[(\gamma+1)\varphi_+(1) - \gamma - \frac{1}{M_0^2} \right] & \frac{\alpha'}{\gamma M_0^2 \varphi_+(1)} \\ 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$

有 2 个根: -1 和

$$\frac{1}{\gamma\varphi_+(1)} \left[(\gamma+1)\varphi_+(1) - \gamma - \frac{1}{M_0^2} \right] > 0,$$

即 $(\varphi_+(1), 1)$ 是鞍点. 而 $(\varphi_-(1), 1)$ 对应的 2 个特征根分别为 -1 和

$$\frac{1}{\gamma\varphi_-(1)} \left[(\gamma+1)\varphi_-(1) - \gamma - \frac{1}{M_0^2} \right] < 0,$$

从而 $(\varphi_-(1), 1)$ 是渐近稳定结点.

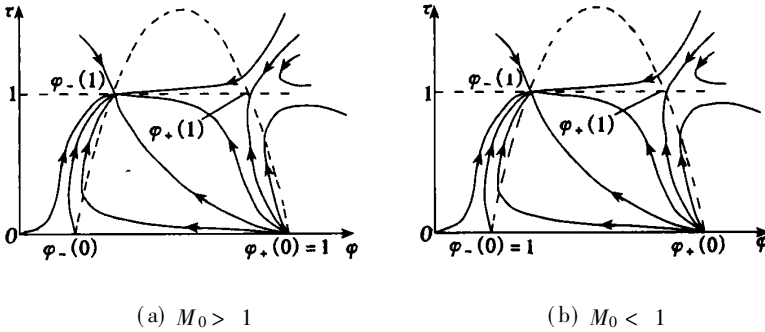


图 5 $(\varphi_{\pm}(0), 0), (\varphi_{\pm}(1), 1)$ 附近系统的相图

综上所述, 我们得到 φ - τ 平面内奇点的类型如图 5 所示.

[参 考 文 献]

[1] Joseph O Hirshfelder, Charles F Curtiss. Theory of detonations. I Irreversible unimolecular Reaction[J]. The Journal of Chemical Physics, 1958, 28(6): 1130—1147.
 [2] Faïres M V. 热力学[M]. 鍾毅章 译. 香港: 新兴图书公司, 1979, 75—188.
 [3] 张芷芬, 丁同仁, 黄文灶. 微分方程的定性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1985, 39—150.

Study on the Structure of Singular Points of Laminar Flame System

WANG Xiu_e¹, YIN Xian_jun²

- (1. Department of Basic Science, Beijing Technology and Business University,
Beijing 100037, P. R. China;
2. School of Science, Beijing Institute of Technology,
Beijing 100081, P. R. China)

Abstract: Under some certain assumptions, the physical model of the air combustion system was simplified to a laminar flame system. The mathematical model of the laminar flame system, which was built according to thermodynamics theory and the corresponding conservative laws, was studied. With the aid of qualitative theory and method of ordinary differential equations, the location of singular points on the Rayleigh curves is determined, the qualitative structure and the stability of the singular points of the laminar flame system, which are located in the areas of deflagration and detonation, are given for different parameter values and uses of combustion. The phase portraits of the laminar flame system in the reaction_stagnation enthalpy and combustion velocity_stagnation enthalpy planes are shown in the corresponding figures.

Key words: laminar flame system; Rayleigh curve; singular point; orbit; phase portrait