应用数学和力学, 第 25 卷 第 4 期(2004 年 4 月)　　应用数学和力学编委会编
Applied Mathematics and Mechanics　　重庆出版社出版

文章编号: 1000_0887(2004) 04_0359_09

一类带有一般接触率和常数输入的流行病模型的全局分析*

李健全[1,2], 张　娟[1], 马知恩[1]

(1. 西安交通大学 应用数学系, 西安 710049;
2. 空军工程大学 电讯工程学院, 西安 710077)

(李继彬推荐)

摘要: 借助极限系统理论和构造适当的 Liapunov 函数, 对带有一般接触率和常数输入的 SIR 型和 SIRS 型传染病模型进行讨论· 当无染病者输入时, 地方病平衡点存在的阈值被找到· 对相应的 SIR 模型, 关于无病平衡点和地方病平衡点的全局渐近稳定性均得到充要条件; 对相应的 SIRS 模型, 得到无病平衡点和地方病平衡点全局渐近稳定的充分条件· 当有染病者输入时, 模型不存在无病平衡点· 对相应的 SIR 模型, 地方病平衡点是全局渐近稳定的; 对相应的 SIRS 模型, 得到地方病平衡点全局渐近稳定的充分条件·

关　键　词: 传染病模型; 平衡点; 全局渐近稳定性; 极限系统
中图分类号: O175.12　　文献标识码: A

引　　言

在现实生活中, 传染病广泛存在· 利用数学模型分析和研究传染病的传播已是数学应用的一个重要领域· 通常将总种群 (N) 分为 3 个子种群(类): 易感类(S), 染病类(I) 和恢复类(免疫类)(R)· 由 Kermack 和 McKendrick 建立的 SIR 传染病模型是大多数传染病模型的基础([1])· 传统的传染病模型通常用标准传染率 $\beta SI/N$ 或双线性传染率 βSI([2, 3])·

在本文中, 假设疾病的传染率为 $\beta(N)SI$, 其中传染系数 $\beta(N)$ 满足下列条件([4]):

$$\beta(N) > 0,\quad \beta'(N) \leqslant 0,\quad [\beta(N)N]' \geqslant 0,$$

和

$$[\beta'(N)]^2 + [(\beta(N)N)']^2 > 0\cdot$$

易知, $\beta(N) = \lambda/N$ 和 $\beta(N) = \lambda$ 都满足对 $\beta(N)$ 的假设, 它们分别对应于标准传染率和双线性传染率· 假设疾病的传播机制如图 1·

图 1 中 $S = S(t)$, $I = I(t)$ 和 $R = R(t)$ 分别表示易感类, 染病类和恢复类在 t 时刻的数量· $N = N(t)$ 表示总种群在 t 时刻的数量, $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$· $A\,(A > 0)$ 表示对总种群的常数输入率, a、b 和 $c\,(a > 0,\ b \geqslant 0,\ c \geqslant 0,\ a + b + c = 1)$ 分别表示对易感类、染

* 收稿日期: 2002_08_05; 修订日期: 2003_09_05
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19971066)
作者简介: 李健全(1965—), 男, 山西万荣人, 副教授, 博士(联系人. +86_29_84397993; Fax: +86_29_83237910; E_mail: jianq_li@263.net).

病类和恢复类的输入比例. $d(d>0)$ 表示各类的自然死亡率, $\alpha(\alpha>0)$ 表示染病类的因病死亡率, $\gamma(\gamma>0)$ 表示染病类的恢复率, $\epsilon(\epsilon\geqslant 0)$ 表示恢复者的免疫失去率. $\epsilon>0$ 意味着恢复者的免疫力是暂时的, $\epsilon=0$ 意味着恢复者具有永久免疫力.

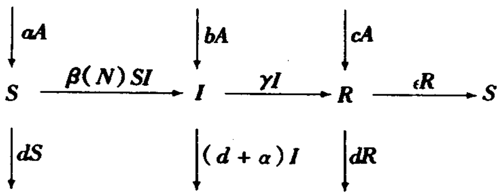

图 1 疾病的传播机制

在以上假设下, 疾病的传播模型可写为:

$$\begin{cases} S' = aA - \beta(N)IS - dS + \epsilon R, \\ I' = bA + \beta(N)IS - (d+\gamma+\alpha)I, \\ R' = cA + \gamma I - (d+\epsilon)R. \end{cases} \tag{1}$$

由于 $N = S + I + R$, 因此从(1) 可得:

$$N' = A - dN - \alpha I. \tag{2}$$

将 $S = N - I - R$ 代入(1) 中的第二个方程, 则由(1) 中的后两个方程和(2) 有:

$$\begin{cases} I' = bA + I[\beta(N)(N-I-R) - (d+\gamma+\alpha)], \\ R' = cA + \gamma I - (d+\epsilon)R, \\ N' = A - dN - \alpha I. \end{cases} \tag{3}$$

当 $\epsilon=0$ 时, 系统(1) 是 SIR 型的. 当 $\epsilon>0$ 时, 系统(1) 是 SIRS 型的. 通常 SIR 模型适用于由病毒传播而导致的流行病, 而 SIRS 模型适用于由病菌传播而导致的流行病. 当 $c=0$、$\epsilon=0$ 且 $\beta(N)$ 为常数时, (1) 对应的模型在[5] 中已作讨论. 在本文, 我们将分两种情形: $b=0$ 和 $b>0$ 来考虑系统(3). $b=0$ 意味着没有染病者输入, 而 $b>0$ 则意味着有染病者输入到种群内.

1 情形: $b = 0$

$b=0$ 意味着对种群的输入不含有染病者, 即对种群的输入或是易感者或是恢复者. 这时, $a+c=1$. 对此情形, 系统(3) 变为

$$\begin{cases} I' = I[\beta(N)(N-I-R) - (d+\gamma+\alpha)], \\ R' = cA + \gamma I - (d+\epsilon)R, \\ N' = A - dN - \alpha I. \end{cases} \tag{4}$$

定理 1.1 对系统(4), 下列结论成立.

1) 当 $I(0)=0$ 时, 对任意 $t>0$ 恒有 $I(t)=0$, 且 $\lim_{t\to\infty}R(t) = [cA/(d+\epsilon)]$, $\lim_{t\to\infty}N(t) = A/d$.

2) 当 $I(0)>0$, 对任意 $t>0$ 恒有 $I(t)>0$, 且

$$\Omega = \left\{(I,R,N): I \geqslant 0, R>0, I+R<N \leqslant A/d\right\}$$

是系统(4) 的正不变集.

3) 记 $R_0 = \beta(A/d)\cdot(A/d)\cdot[(\epsilon+(1-c)d)/(d+\gamma+\alpha)(d+\epsilon)]$. 系统(4) 总有无病平衡点 $P_0(0, cA/(d+\epsilon), A/d)$. 同时, 当且仅当 $R_0>1$ 时系统(4) 有唯一地方病平衡点 $P^*(I^*, R^*, N^*)$, 其中

$$I^* = \frac{A - dN^*}{\alpha},\quad R^* = \frac{(\alpha c+\gamma)A - \gamma dN^*}{\alpha(d+\epsilon)},$$

N^* 是方程

$$\beta(N)\left\{\left[(\alpha+d)(d+\epsilon)+\gamma d\right]N-(d+\epsilon+\alpha c+\gamma)A\right\}=\alpha(d+\epsilon)(d+\gamma+\alpha)$$

在区间 $(0, A/d)$ 内的唯一根•

证明　定理 1.1 的 1) 和 2) 容易证得, 故证明略去•

3) 易知系统(4) 总有无病平衡点 $P_0(0, cA/(d+\epsilon), A/d)$• 系统(4) 的地方病平衡点由方程组

$$\begin{cases}\beta(N)(N-I-R)-(d+\gamma+\alpha)=0,\\ cA+\gamma I-(d+\epsilon)R=0,\\ A-dN-\alpha I=0\end{cases}\tag{5}$$

来确定• 由(5) 的后两个方程可得:

$$I=\frac{A-dN}{\alpha},\quad R=\frac{(\alpha c+\gamma)A-\gamma dN}{\alpha(d+\epsilon)}•\tag{6}$$

将(6) 代入到(5) 中的第一个方程, 并整理即得:

$$\beta(N)\left\{\left[(\alpha+d)(d+\epsilon)+\gamma d\right]N-(d+\epsilon+\alpha c+\gamma)A\right\}=\alpha(d+\epsilon)(d+\gamma+\alpha)•\tag{7}$$

记 $f(N)=\beta(N)\left\{\left[(\alpha+d)(d+\epsilon)+\gamma d\right]N-(d+\epsilon+\alpha c+\gamma)A\right\}$• 由于 $f(A/d)=\beta(A/d)\cdot(\alpha A/d)\cdot\left[\epsilon+(1-c)d\right]$, 因此 $R_0>1$ 等价于 $f(A/d)>\alpha(d+\epsilon)(d+\gamma+\alpha)$• 由 $\beta'(N)\leqslant 0$ 和 $\left[N\beta(N)\right]'\geqslant 0$ 知 $f(N)$ 是单调不减的• 同时 $\beta(N)>0$ 意味着对于充分小的 N 有 $f(N)<0$• 因此, 当且仅当 $R_0>1$ 时 (7) 在 $(0, A/d)$ 内有唯一根 N^*• 将 $N=N^*$ 代入到 (6), 即得 I^*, R^*• 证毕•

1.1 SIR 模型的全局渐近稳定性

当 $\epsilon=0$ 时, 系统(4) 是 SIR 型的, 即

$$\begin{cases}I'=I\left[\beta(N)(N-I-R)-(d+\gamma+\alpha)\right],\\ R'=cA+\gamma I-dR,\\ N'=A-dN-\alpha I•\end{cases}\tag{8}$$

为了方便讨论(8) 的全局渐近稳定性, 引入下面两个引理:

引理 1.2　设 $\omega>\theta>0$, 记 $h(u)=\beta(u)(u-\omega)-\theta\left[\beta(\omega)-\beta(u)\right]$, 则对 $N>0$ 且 $N\neq\omega$ 有 $H(N)=\int_\omega^N h(u)\,\mathrm{d}u>0$; 对 $u>0$ 且 $u\neq\omega$ 有 $(u-\omega)h(u)>0$•

证明　易知 $h(u)$ 可改写为

$$h(u)=\beta(u)u-(\omega-\theta)\beta(u)-\theta\beta(\omega)•$$

由于 $\beta'(u)\leqslant 0$, $\left[\beta(u)u\right]'\geqslant 0$ 且 $\left[\beta'(u)\right]^2+\left[(\beta(u)u)'\right]^2>0$ 对于 $u>0$, 所以 $h'(u)>0$ 对于 $\omega>\theta>0$• 又 $h(\omega)=0$, 因此引理 1.2 成立• 证毕•

引理 1.3[6]　考虑系统

$$x'=f(t,x),\tag{9}$$

和

$$x'=g(x),\tag{10}$$

其中 f 和 g 对 $x\in R^n$ 是连续的, 且满足局部 Lipschitz 条件• 对 $t>0$, 系统 (9) 和 (10) 的解均存在, 同时 $\lim_{t\to\infty}f(t,x)=g(x)$ 对 $x\in R^n$ 一致成立• 如果 (9) 的解有界, 且极限系统 (10) 的平

衡点 P 是全局渐近稳定的, 则对(9) 的任意解 $x(t)$ 都有$\lim_{t\to\infty} x(t) = P$.

定理 1.4 对于系统(8), 当 $R_0 \leqslant 1$ 时, 无病平衡点 P_0 是全局渐近稳定的; 当 $R_0 > 1$ 时, 地方病平衡点 P^* 是全局渐近稳定的. (这里由于 $\epsilon = 0$, $a = 1 - c$, 故 $R_0 = (aA/d) \cdot [\beta(A/d)/(d + \gamma + \alpha)]$.)

证明 记 $X = R + N(\gamma/\alpha)$, 则由(8) 的后两个方程可得:

$$X' = A\left(c + \frac{\gamma}{\alpha}\right) - dX. \tag{11}$$

易知(11) 在初始条件 $X(0) = X_0$ 下的解是

$$X(t) = e^{-dt}X_0 + X(1 - e^{-dt}),$$

其中 $X = (A/d)(c + \gamma/\alpha)$. 这时有

$$R(t) = -\frac{\gamma}{\alpha}N(t) + e^{-dt}X_0 + X(1 - e^{-dt}). \tag{12}$$

将(12) 代入到(8) 中的第一个方程, 则得以(8) 的等价系统:

$$\begin{cases} I' = I\left\{\beta(N)\left[\left(1 + \frac{\gamma}{\alpha}\right)N - I - e^{-dt}X_0 - X(1 - e^{-dt})\right] - (d + \gamma + \alpha)\right\}, \\ N' = A - dN - \alpha I. \end{cases} \tag{13}$$

易知, (13) 有极限系统:

$$\begin{cases} I' = I\left\{\beta(N)\left[\left(1 + \frac{\gamma}{\alpha}\right)N - I - X\right] - (d + \gamma + \alpha)\right\} =: F(I, N), \\ N' = A - dN - \alpha I =: G(I, N). \end{cases} \tag{14}$$

根据引理 1.3, 可通过考虑(14) 的全局渐近稳定性来获得(8) 的全局渐近稳定性.

直接计算可知, 系统(14) 总有平衡点 $P_0(0, A/d)$, 当 $R_0 > 1$ 时还有正平衡点 $P^*(I^*, N^*)$(其中 I^*, N^* 在定理 1.1 中定义).

通过讨论(14) 在平衡点 P_0 和 P^* 处的线性化系统, 可知: P_0 当 $R_0 < 1$ 时是局部渐近稳定的, 当 $R_0 > 1$ 时是不稳定的, 当 $R_0 = 1$ 时是高阶平衡点; P^* 当 $R_0 > 1$ 时是局部渐近稳定的.

因为

$$\frac{\partial}{\partial I}\left(\frac{F}{I}\right) + \frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{G}{I}\right) = -\beta(N) - \frac{d}{I} < 0,$$

所以(14) 在区域 Ω 内没有周期解. 因此, 当 $R_0 < 1$ 时 P_0 是全局渐近稳定的, 当 $R_0 > 1$ 时 P^* 是全局渐近稳定的.

为了证明当 $R_0 = 1$ 时 P_0 的全局稳定性, 将(14) 改写如下:

$$\begin{cases} I' = I\left\{\beta(N)\left[\left(1 + \frac{\gamma}{\alpha}\right)\left(N - \frac{A}{d}\right) - I\right] + \frac{aA}{d}\left[\beta(N) - \beta\left(\frac{A}{d}\right)\right]\right\}, \\ N' = -d\left(N - \frac{A}{d}\right) - \alpha I, \end{cases} \tag{15}$$

其中用到 $d + \gamma + \alpha = (aA/d) \cdot \beta(A/d)$, 这是因为 $R_0 = 1$.

构造 Liapunov 函数

$$V(I, N) = \frac{\alpha^2 I}{\alpha + \gamma} + \int_{A/d}^{N}\left\{\beta(u)\left(u - \frac{A}{d}\right) - \frac{\alpha aA}{d(\alpha + \gamma)}\left[\beta\left(\frac{A}{d}\right) - \beta(u)\right]\right\}\mathrm{d}u,$$

则 $V(I, N)$ 沿系统(15) 关于 t 的导数为

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(15)} = -\frac{\alpha^2 I^2}{\alpha + \gamma}\beta(N) - d\left(N - \frac{A}{d}\right)\left\{\beta(N)\left(N - \frac{A}{d}\right) - \right.$$

$$\frac{\alpha aA}{d(\alpha+\gamma)}\left[\beta\left(\frac{A}{d}\right)-\beta(N)\right]\}.$$

在引理 1.2 中, 取 $\omega = A/d$ 和 $\theta = \alpha aA/(d(\alpha+\gamma))$, 则由引理 1.2, 函数 $V(I, N)$ 是正定的, $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t\mid_{(15)}$ 是负定的. 因此 (14) 的平衡点 P_0 当 $R_0 = 1$ 时是全局渐近稳定的.

根据定理 1.1 的 2), 系统 (8) 的解是有界的, 即 (13) 的解是有界的. 因此, 由引理 1.3, 当 $R_0 \leqslant 1$ 时无病平衡点 P_0 是全局渐近稳定的, 当 $R_0 > 1$ 时地方病平衡点 P^* 是全局渐近稳定的. 证毕.

1.2 SIRS 模型的稳定性

在这一节, 将考虑 SIRS 模型 (3) 当 $b = 0$ 时的稳定性. 这时模型 (3) 对应于 $\epsilon > 0$ 时的系统 (4).

定理 1.5 对于系统 (4), 无病平衡点 P_0 当 $R_0 < 1$ 时是全局渐近稳定的, 当 $R_0 > 1$ 时是不稳定的.

证明 由系统 (4) 在无病平衡点 P_0 处的线性化系统, 易知 P_0 当 $R_0 < 1$ 时是渐近稳定的, 当 $R_0 > 1$ 时是不稳定的.

令 $V = I$, 则 V 沿着 (4) 的导数为

$$V'\mid_{(4)} = I[\beta(N)(N-I-R)-(d+\gamma+\alpha)] \leqslant$$
$$I[\beta(N)N - R\beta(N)-(d+\gamma+\alpha)].$$

由 (4) 中的第二个方程可知, 对于任意的正数 δ, 都存在 $T > 0$, 使得当 $t > T$ 时, $R \geqslant cA/(d+\epsilon)-\delta$, 因此, 当 $t > T$ 时有

$$V'\mid_{(4)} \leqslant I\left[\beta(N)N-\frac{cA}{d+\epsilon}\beta(N)+\delta\beta(N)-(d+\gamma+\alpha)\right].$$

由于 $\beta'(N) \leqslant 0$, $[\beta(N)N]' \geqslant 0$ 和 $N \leqslant A/d$, 所以

$$V'\mid_{(4)} \leqslant I\left[\beta\left(\frac{A}{d}\right)\left(\frac{A}{d}-\frac{cA}{d+\epsilon}\right)-(d+\gamma+\alpha)+\delta\beta(N)\right] =$$
$$(d+\gamma+\alpha)\left[(R_0-1)+\frac{\delta\beta(N)}{d+\gamma+\alpha}\right]I.$$

当 $R_0 < 1$ 时, 可以取 $\delta > 0$ 充分小, 使 $(R_0-1)+\delta\beta(N)/(d+\gamma+\alpha) < 0$. 又由于 P_0 是 (4) 在集 $\{(I, R, N): V' = 0\}$ 上的唯一平衡点. 因此, 由 LaSalle 不变集原理 ([7]), 当 $R_0 < 1$ 时无病平衡点 P_0 是全局渐近的. 证毕.

定理 1.6 对于系统 (4), 地方病平衡点 P^* 只要存在, 则它一定是局部渐近稳定的. 当 $R_0 > 1$ 且 $\alpha \leqslant d+2\epsilon$ 时, 地方病平衡点 P^* 是全局渐近稳定的.

证明 通过直接计算, 可得 (4) 在 P^* 处的 Jacobi 矩阵为

$$\boldsymbol{J}(P^*) = (j_{ij}) =$$
$$\begin{pmatrix} -\beta(N^*)I^* & -\beta(N^*)I^* & I^*[(\beta(N^*)N^*)'-(I^*+R^*)\beta'(N^*)] \\ \gamma & -(d+\epsilon) & 0 \\ -\alpha & 0 & -d \end{pmatrix}.$$

根据对 $\beta(N)$ 的假设, 有 $j_{ii} < 0 (i = 1, 2, 3)$, $j_{12}j_{21} < 0$, $j_{13}j_{31} \leqslant 0$, $j_{23} = j_{32} = 0$, 因此, $\boldsymbol{J}(P^*)$ 是符号稳定的 ([8]), 即对 SIRS 模型地方病平衡点 P^* 是局部渐近稳定的.

为了证明 P^* 的全局渐近稳定性, 将 (4) 改写为:

$$\begin{cases} I' = I\Big\{\beta(N)(N-N^*) - S^*[\beta(N^*)-\beta(N)] - \\ \qquad \beta(N)(I-I^*) - \beta(N)(R-R^*)\Big\}, \\ R' = \gamma(I-I^*) - (d+\epsilon)(R-R^*), \\ N' = -d(N-N^*) - \alpha(I-I^*), \end{cases} \tag{16}$$

其中 $S^* = N^* - I^* - R^*$•

考虑 Liapunov 函数

$$V(I,R,N) = \alpha\left(I - I^* - I^*\ln\frac{I}{I^*}\right) + \frac{\alpha}{2\gamma}\cdot\beta(N)\cdot(R-R^*)^2 + \int_{N^*}^{N}\Big\{\beta(u)(u-N^*) - S^*[\beta(N^*)-\beta(u)]\Big\}\mathrm{d}u,$$

则有 $V(I,R,N)$ 沿着系统(16) 的导数

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(16)} = -\alpha\beta(N)(I-I^*)^2 + \left[\frac{\alpha}{2\gamma}\cdot\beta'(N)N'\mid_{(16)} - \frac{\alpha(d+\epsilon)}{\gamma}\cdot\beta(N)\right]\times (R-R^*)^2 - d(N-N^*)\Big\{\beta(N)(N-N^*) - S^*[\beta(N^*)-\beta(N)]\Big\}\cdot$$

注意到

$$\frac{\alpha}{2\gamma}\cdot\beta'(N)N'\mid_{(16)} - \frac{\alpha(d+\epsilon)}{\gamma}\cdot\beta(N) = \frac{\alpha}{2\gamma}\cdot\beta'(N)(A-dN-\alpha I) - \frac{\alpha(d+\epsilon)}{\gamma}\cdot\beta(N) = \frac{\alpha}{2\gamma}\cdot\beta'(N)\cdot A - \frac{\alpha}{\gamma}\left[\frac{1}{2}\beta'(N)(dN+\alpha I) + (d+\epsilon)\beta(N)\right]\cdot$$

由于 $\beta'(N)\leqslant 0$, $N\geqslant I$, 且 $\alpha\leqslant d+2\epsilon$, 于是有

$$\frac{\alpha}{2\gamma}\cdot\beta'(N)N'\mid_{(16)} - \frac{\alpha(d+\epsilon)}{\gamma}\cdot\beta(N) \leqslant \frac{\alpha}{2\gamma}\cdot\beta'(N)\cdot A - \frac{\alpha}{\gamma}\left[\frac{(d+\alpha)}{2}\beta'(N)N + (d+\epsilon)\beta(N)\right] \leqslant \frac{\alpha}{2\gamma}\cdot\beta'(N)\cdot A - \frac{\alpha(d+\epsilon)}{\gamma}[\beta(N)N]' < 0\cdot$$

因此,

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(16)} \leqslant -\alpha\beta(N)(I-I^*)^2 + \left\{\frac{\alpha}{2\gamma}\cdot\beta'(N)\cdot A - \frac{\alpha(d+\epsilon)}{\gamma}\cdot[\beta(N)N]'\right\}(R-R^*)^2 - d(N-N^*)\times \Big\{\beta(N)(N-N^*) - S^*[\beta(N^*)-\beta(N)]\Big\}\cdot$$

由引理1. 2, $V(I,R,N)$ 是正定的, 而 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t\mid_{(16)}$ 是负定的• 因此, 当 $\alpha\leqslant d+2\epsilon$ 时, 系统(4) 的地方病平衡点 P^* 是全局渐近稳定的• 证毕•

2 情形: $b > 0$

$b > 0$ 意味着对种群的输入含有染病者• 对此情形, 我们有下列结论:

定理 2. 1 设 $b > 0$• 系统(3) 总不会有无病平衡点, 但总有地方病平衡点 $P^*(I^*, R^*, N^*)$, 其中

$$I^* = \frac{A - dN^*}{\alpha},\quad R^* = \frac{(\alpha c+\gamma)A - \gamma dN^*}{\alpha(d+\epsilon)},$$

N^* 是方程

$$\beta(N)\left\{[(\alpha+d)(d+\epsilon)+\gamma d]N-(d+\epsilon+\alpha c+\gamma)A\right\}=$$
$$\alpha(d+\epsilon)\left[(d+\gamma+\alpha)-\frac{\alpha bA}{A-dN}\right]$$

在区间 $(0, A/d)$ 内的唯一解.

证明　当 $b>0$ 时, 易知(3) 没有无病平衡点, 而地方病平衡点由方程组

$$\begin{cases}\beta(N)(N-I-R)-(d+\gamma+\alpha)+\dfrac{bA}{I}=0,\\ cA+\gamma I-(d+\epsilon)R=0,\\ A-dN-\alpha I=0,\end{cases}\tag{17}$$

来确定. 由(17) 的后两个方程, 可得:

$$I=\frac{A-dN}{\alpha},\quad R=\frac{(\alpha c+\gamma)A-\gamma dN}{\alpha(d+\epsilon)}.\tag{18}$$

将(18) 代入到(17) 中的第一个方程, 得:

$$\beta(N)\left\{[(\alpha+d)(d+\epsilon)+\gamma d]N-(d+\epsilon+\alpha c+\gamma)A\right\}=$$
$$\alpha(d+\epsilon)\left[(d+\gamma+\alpha)-\frac{\alpha bA}{A-dN}\right].\tag{19}$$

记

$$f(N)=\beta(N)\left\{[(\alpha+d)(d+\epsilon)+\gamma d]N-(d+\epsilon+\alpha c+\gamma)A\right\},$$
$$g(N)=\alpha(d+\epsilon)\left[(d+\gamma+\alpha)-\frac{\alpha bA}{A-dN}\right].$$

由于 $\beta'(N)\leqslant 0$, $[N\beta(N)]'\geqslant 0$, 于是 $f(N)$ 是单调不减的. 同时

$$f\left(\frac{A}{d}\right)=\beta\left(\frac{A}{d}\right)\cdot\left(\frac{\alpha A}{d}\right)\cdot[\epsilon+(1-c)d],$$

并且当 N 充分小时有 $f(N)<0$. 又 $g(N)$ 是严格单调递增的, 且 $g(0)>0$, $\lim\limits_{N\to(A/d)^-}g(N)=-\infty$. 因此, (19) 在区间 $(0, A/d)$ 内总有根 N^*. 将 $N=N^*$ 代入到(18), 得 I^*、R^*. 证毕.

定理 2.2　对 SIR 模型, 即 $\epsilon=0$, 系统(3) 的地方病平衡点 P^* 是全局渐近稳定的.

证明　当 $\epsilon=0$ 时, (3) 变为

$$\begin{cases}I'=bA+I[\beta(N)(N-I-R)-(d+\gamma+\alpha)],\\ R'=cA+\gamma I-dR,\\ N'=A-dN-\alpha I.\end{cases}\tag{20}$$

类似于定理 1.4 的证明, 对(20) 也有 $\lim\limits_{t\to\infty}(R+(\gamma/\alpha)N)=X$ (X 在定理 1.4 中定义). 并且可以通过考虑极限系统

$$\begin{cases}I'=bA+I\left\{\beta(N)\left[\left(1+\dfrac{\gamma}{\alpha}\right)N-I-X\right]-(d+\gamma+\alpha)\right\}=F(I,N),\\ N'=A-dN-\alpha I=G(I,N)\end{cases}\tag{21}$$

来获得(20) 的全局稳定性.

易证 $P^*(I^*, N^*)$ 是(21) 的唯一正平衡点. 通过讨论(21) 在 P^* 处的线性系统易知 P^* 是局部渐近稳定的.

由于

$$\frac{\partial}{\partial I}\left(\frac{F}{I}\right)+\frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{G}{I}\right)=-\frac{bA}{I^2}-\beta(N)-\frac{d}{I}<0,$$

因此,(21)没有周期解,即 P^* 是全局渐近稳定的.

系统(20)解的有界性是显然的. 于是,由引理1.3,定理2.2成立. 证毕.

定理2.3 对SIRS模型,即 $\epsilon>0$,系统(3)的地方病平衡点 P^* 是局部渐近稳定的. 当 $\alpha\leqslant d+2\epsilon$ 时,地方病平衡点 P^* 是全局渐近稳定的.

证明 直接计算,可得(3)在 P^* 的Jacobi矩阵

$$\boldsymbol{J}(P^*)=(j_{ij})=\begin{pmatrix}-\beta(N^*)I^*-\dfrac{bA}{I^*} & -\beta(N^*)I^* & I^*\left[(\beta(N^*)N^*)'-(I^*+R^*)\beta'(N^*)\right]\\ \gamma & -(d+\epsilon) & 0\\ -\alpha & 0 & -d\end{pmatrix}.$$

类似于定理1.6的证明,可证得: P^* 是局部渐近稳定的.

为了证明 P^* 的全局渐近稳定性,改写(3)为:

$$\begin{cases}I'=I\Big\{\beta(N)(N-N^*)-S^*\left[\beta(N^*)-\beta(N)\right]-\\ \qquad\beta(N)(I-I^*)-\beta(N)(R-R^*)\Big\}-\dfrac{bA(I-I^*)}{I^*},\\ R'=\gamma(I-I^*)-(d+\epsilon)(R-R^*),\\ N'=-d(N-N^*)-\alpha(I-I^*),\end{cases}\tag{22}$$

其中 $S^*=N^*-I^*-R^*$.

设

$$V(I,R,N)=\alpha\left(I-I^*-I^*\ln\frac{I}{I^*}\right)+\frac{\alpha}{2\gamma}\cdot\beta(N)\cdot(R-R^*)^2+\\ \int_{N^*}^{N}\Big\{\beta(u)(u-N^*)-S^*\left[\beta(N^*)-\beta(u)\right]\Big\}\mathrm{d}u,$$

则 $V(I,R,N)$ 沿着(22)的导数 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t$ 为

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(22)}=-\left[\alpha\beta(N)+\frac{bA}{I\cdot I^*}\right](I-I^*)^2+\\ \left[\frac{\alpha}{2\gamma}\cdot\beta'(N)N'-\frac{\alpha(d+\epsilon)}{\gamma}\cdot\beta(N)\right](R-R^*)^2-\\ d(N-N^*)\Big\{\beta(N)(N-N^*)-S^*\left[\beta(N^*)-\beta(N)\right]\Big\}.$$

类似于定理1.6的证明,有

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(22)}\leqslant-\alpha\beta(N)(I-I^*)^2+\Big\{\frac{\alpha}{2\gamma}\cdot\beta'(N)\cdot A-\\ \frac{\alpha(d+\epsilon)}{\gamma}\cdot\left[\beta(N)N\right]'\Big\}(R-R^*)^2-d(N-N^*)\times\\ \Big\{\beta(N)(N-N^*)-S^*\left[\beta(N^*)-\beta(N)\right]\Big\}.$$

根据引理1.2, $V(I,R,N)$ 是正定的,而 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t\,|_{(22)}$ 是负定的. 因此,当 $\alpha\leqslant d+2\epsilon$ 时,系统(3)的地方病平衡点 P^* 是全局渐近稳定的. 证毕.

[参考文献]

[1] Kermack W O, McKendrick A G. Contributions to the mathematical theory of epidemics—Part 1[J]. Proc Roy Soc London Ser A, 1927, **115**(3): 700—721.

[2] Mena_Lorca J, Hethcote H W. Dynamic models of infectious diseases as regulators of population sizes [J]. J Math Biol, 1992, **30**(4): 693—716.

[3] Li J, Ma Z. Qualitative analysis of SIS epidemic model with vaccination and varying total population size[J]. Math Comput Modelling, 2002, **35**(11/12): 1235—1243.

[4] Heesterbeck J A P, Metz J A J. The saturating contact rate in marriage_and epidemic models[J]. J Math Biol, 1993, **31**(2): 529—539.

[5] Brauer F, Van den Driessche P. Models for transmission of disease with immigration of infectives[J]. Math Biosci, 2001, **171**(2): 143—154.

[6] Han L, Ma Z, Hethcote H W. Four predator prey models with infectious diseases[J]. Math Comput Modelling, 2001, **34**(7/8): 849—858.

[7] LaSalle J P. The Stability of Dynamical System [M]. New York: Academic Press, 1976.

[8] Jeffries C, Klee V, Van den Driessche P. When is a matrix sign stable? [J]. Canad J Math, 1977, **29**(2): 315—326.

Global Analysis of Some Epidemic Models With General Contact Rate and Constant Immigration

LI Jian_quan[1,2], ZHANG Juan[1], MA Zhi_en[1]

(1. Department of Applied Mathematics, Xi' an Jiaotong University,
Xi' an 710049, P. R. China;
2. Telecommunication Engineering Institute, Air Force Engineering University,
Xi' an 710077, P. R. China)

Abstract: An epidemic models of SIR type and SIRS type with general contact rate and constant immigration of each class were discussed by means of theory of limit system and suitable Liapunov functions. In the absence of input of infectious individuals, the threshold of existence of endemic equilibrium is found. For the disease_free equilibrium and the endemic equilibrium of corresponding SIR model, the sufficient and necessary conditions of global asymptotical stabilities are all obtained. For corresponding SIRS model, the sufficient conditions of global asymptotical stabilitiese of the disease_free equilibrium and the endemic equilibrium are obtained. In the existence of input of infectious individuals, the models have no disease_free equilibrium. For corresponding SIR model, the endemic equilibrium is globally asymptotically stable; for corresponding SIRS model, the sufficient conditions of global asymptotical stability of the endemic equilibrium are obtained.

Key words: epidemic models; equilibrium; global asymptotical stability; limit system