

文章编号: 1000-0887(2005) 06-0743-06

# 输流粘弹性曲管的稳定性分析<sup>\*</sup>

王忠民, 张战午, 赵凤群

(西安理工大学 理学院, 西安 710048)

(沈惠申推荐)

**摘要:** 根据变质量弹性系统 Hamilton 原理, 用变分法建立了输流粘弹性曲管的运动微分方程, 并用归一化幂级数法导出了输流粘弹性曲管的复特征方程组。以两端固支 Kelvin\_Voigt 模型粘弹性输流圆管为例, 分析了无量纲延滞时间和质量比对输流管道无量纲复频率和无量纲流速之间的变化关系的影响。在无量纲延滞时间较大时, 粘弹性输流圆管的特点是它的第 1、2、3 阶模态不再耦合, 而是在第 1、第 2 阶上先发散失稳, 然后在 1 阶模态上再发生单一模态颤振。

**关键词:** 动力稳定性; 输流曲管; Kelvin\_Voigt 模型; 幂级数法

**中图分类号:** O353      **文献标识码:** A

## 引 言

输流管道在石油、机械、核电等工程领域具有非常广泛的应用, 其振动和稳定性的研究在结构动力学方面具有重要的理论价值。通常, 输流管道可分为输流直管和输流曲管, 与输流直管相比, 输流曲管因几何形状复杂, 数值分析难度更大。近年来, 国内外学者对输流曲管的振动和稳定性进行了一些研究。Chen<sup>[1, 2]</sup>用解析法分析了圆形弹性输流曲管面内、面外振动和稳定性问题。Misra 等<sup>[3]</sup>用有限元法对复杂形状的输流曲管的临界流速进行了计算。Aithal 等<sup>[4]</sup>用解析法对单跨圆形输流曲管进行了分析。魏发远等<sup>[5]</sup>提出了分析输流曲管临界流速的迁移矩阵法。倪樵等<sup>[6]</sup>用微分求积法(简称 DQM)对具有弹性支承的半圆形输流曲管的稳定性进行了分析。在上述解法中, 解析法对等刚度、等曲率的输流曲管比较有效, 有限元法、迁移矩阵法及 DQ 法涉及到离散单元及大量的数值积分运算、离散段数以及离散网点的数目等, 计算工作量较大。

随着材料科学技术的不断发展, 具有粘弹性性能的输流曲管结构在工程实际中的应用日益广泛<sup>[7, 8]</sup>。在弹性输流曲管和粘弹性输流直管研究的基础上, 本文采用归一化幂级数法研究了输流粘弹性圆管的振动和稳定性问题, 具体地分析了两端固支 Kelvin\_Voigt 模型粘弹性输流圆管的无量纲延滞时间和质量比对输流管道无量纲复频率和无量纲流速之间的变化关系的影响, 得出了 Kelvin\_Voigt 模型粘弹性输流圆管的一些重要特性。由于幂级数法的复系数均以递推的形式给出, 便于上机计算。数值计算表明, 该方法具有很好的精度。同时, 该法可推广

\* 收稿日期: 2003\_11\_21; 修订日期: 2005\_02\_22

基金项目: 陕西省教育厅专项科研计划资助项目(03JK069)

作者简介: 王忠民(1957—), 男, 陕西华县人, 教授, 博士生导师, 博士(联系人, E-mail: wangzhongm@xaut.edu.cn)。

到处理任意支承下变刚度、变曲率输流曲管的问题。

## 1 输流粘弹性曲管的运动微分方程

输流粘弹性曲管如图 1 所示。设管道的径向位移为  $u_r(\theta, t)$ , 切向位移为  $u_\theta(\theta, t)$ , 管道半径为  $r$ , 圆心角为  $\alpha$ , 曲管中心线的弧坐标为  $s$ , 角坐标为  $\theta$ , 通流截面面积为  $A$ , 截面惯性矩为  $I$ , 流体相对管壁的流速恒定且为  $U$ 。令  $m_s, m_d$  分别为单位长度管道、流体的质量, 则单位长度管道的总质量为  $m = m_s + m_d$ 。

根据变质量系统 Hamilton 变分原理<sup>[9]</sup>, 图 1 所示的悬臂输流曲管的变分表达式为

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt - \int_{t_1}^{t_2} m_d U \left[ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} + U \boldsymbol{\tau} \right] \cdot \delta \mathbf{R} dt = 0, \quad (1)$$

式中,  $L$  为 Lagrange 函数, 即  $L = T_s + T_f - V_s - V_f$ ,  $\mathbf{R}$  为变形管道中心线上任一点的位置矢量,  $\boldsymbol{\tau}$  为管道中心线切线方向的单位矢量,  $t_1$  和  $t_2$  分别为始末时刻。

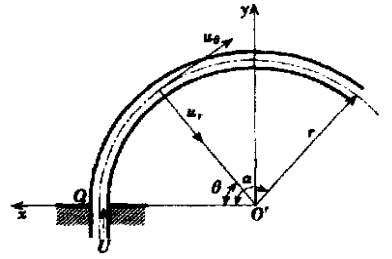


图 1 输流粘弹性曲管

圆管的弯曲变形能  $V_s$ :

$$V_s = \int_0^\alpha \frac{1}{2} \frac{D_2}{D_1} \frac{J_z}{r^3} \left[ \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + u_r \right] \left[ \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right] d\theta, \quad (2)$$

式中  $D_1, D_2$  为粘弹性管道的微分算子,  $J_z$  为曲管截面的几何性质。根据高等材料力学可知, 当曲管的半径远大于管道截面的高度时, 可用截面的惯性矩  $I$  代替  $J_z$ 。

圆管的动能  $T_s$ :

$$T_s = \int_0^\alpha \frac{1}{2} m_s \left[ \left( \frac{\partial u_r}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial t} \right)^2 \right] r d\theta. \quad (3)$$

流体势能  $V_f$ : 考虑流体不可压缩且不计重力作用, 则流体的势能为零, 即

$$V_f = 0. \quad (4)$$

流体动能  $T_f$ : 设流体的绝对速度为  $\mathbf{u}_a$ , 则

$$T_f = \int_0^\alpha \frac{1}{2} m_d \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{u}_a r d\theta = \frac{1}{2} m_d \int_0^\alpha \left[ U^2 + \left( \frac{\partial u_r}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial t} \right)^2 + 2U \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + 2 \frac{U}{r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_\theta \right) \frac{\partial u_r}{\partial t} + \frac{U^2}{r^2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_\theta \right)^2 \right] r d\theta. \quad (5)$$

设管道轴线不可伸长, 由高等材料力学知, 径向位移与切向位移的关系为

$$u_r = \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}. \quad (6)$$

对于 Kelvin\_Voigt 模型, 微分算子<sup>[10]</sup>

$$D_1 = 1, D_2 = E + \eta \frac{\partial}{\partial t}, \quad (7)$$

式中,  $E, \eta$  分别为该模型的弹性模量和粘性系数。

引入无量纲量

$$w = \frac{u_\theta}{r}, \quad \beta = \frac{\eta A}{m}, \quad \tau = \frac{t}{r} \left( \frac{EI}{m} \right)^{1/2}, \quad u = U r \left( \frac{\eta A}{EI} \right)^{1/2}, \quad H = \frac{1}{r^2} \left( \frac{EI}{m} \right)^{1/2} \frac{\eta}{E}, \quad (8)$$

将式(2)~式(8)代入式(1), 得到系统的运动微分方程

$$H \frac{\partial^7 w}{\partial \theta^6 \partial \tau} + \frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} + 2H \frac{\partial^5 w}{\partial \theta^4 \partial \tau} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + u^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + 2\beta^{1/2} u \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^3 \partial \tau} + \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial \tau^2} + H \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^2 \partial \tau} + (1 + 2u^2) \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + 2\beta^{1/2} u \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial \tau} + u^2 w - \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = 0 \quad (9)$$

设方程(9)的解为

$$w(\theta, \tau) = W(\theta)e^{j\omega\tau} \quad (10)$$

其中,  $j = \sqrt{-1}$ ,  $\omega$  为管道无量纲频率. 将式(10)代入式(9), 得到系统的振型微分方程

$$(1 + j\omega H) \frac{d^6 W}{d\theta^6} + (2 + 2j\omega H + u^2) \frac{d^4 W}{d\theta^4} + 2j\omega\beta^{1/2} u \frac{d^3 W}{d\theta^3} + (1 + 2u^2 + j\omega H - \omega^2) \frac{d^2 W}{d\theta^2} + 2j\omega\beta^{1/2} u \frac{dW}{d\theta} + (u^2 + \omega^2) W = 0 \quad (11)$$

对固支固支管, 其边界条件为:

$$\begin{cases} W(0) = 0, W'(0) = 0, W''(0) = 0, \\ W(\alpha) = 0, W'(\alpha) = 0, W''(\alpha) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

## 2 归一化幂级数法

设方程(11)的解为

$$W(\theta) = \sum_{m=1}^6 A_m V_m(\theta), V_m(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n} \theta^n \quad (13)$$

式中  $V_m(\xi)$  ( $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ) 是 6 个线性独立的基本解.

将式(13)代入方程(11), 由幂级数展开的唯一性, 得待定复系数  $c_{m,n}$  的递推公式

$$\begin{aligned} &(n+6) \dots (n+1)(1 + j\omega H) c_{m, n+6} + \\ &(n+4) \dots (n+1)(2j\omega H + 2 + u^2) c_{m, n+4} + \\ &2(n+3) \dots (n+1)j\omega\beta^{1/2} u c_{m, n+3} + \\ &(n+2)(n+1)(1 + 2u^2 + j\omega H - \omega^2) c_{m, n+2} + \\ &2(n+1)j\omega\beta^{1/2} u c_{m, n+1} + (u^2 + \omega^2) c_{m,n} = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

又由幂级数的归一化条件可知

$$V_i^{(j)}(0) = \begin{cases} 1 & (j = i - 1) \\ 0 & (j \neq i - 1) \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, 6; j = 0, 1, \dots, 5), \quad (15)$$

式中,  $V_i^{(j)}(\theta)$  表示  $V_i(\theta)$  对  $\theta$  求  $j$  阶导数.

从式(13)和式(15)得

$$c_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{j!} & (j = i - 1) \\ 0 & (j \neq i - 1) \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, 6; j = 0, 1, \dots, 5) \quad (16)$$

将式(13)代入边界条件(12), 得

$$\begin{cases} A_1 = A_2 = A_3 = 0, \sum_{m=4}^6 A_m \sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n} \alpha^n = 0, \\ \sum_{m=4}^6 A_m \sum_{n=0}^{\infty} c_{m, n+1} (n+1) \alpha^n = 0, \sum_{m=4}^6 A_m \sum_{n=0}^{\infty} c_{m, n+2} (n+2)(n+1) \alpha^n = 0 \end{cases} \quad (17)$$

由线性代数理论知, 齐次线性方程组(17)有非零解的充要条件是该方程组的系数行列式为零, 得系统的复频率特征方程

$$F(\omega, \alpha, \beta, u, H) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = 0, \tag{18}$$

其中  $a_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{j+3, n+i-1} \frac{(n+i-1)!}{n!} \alpha^n \quad (i, j = 1, 2, 3)$

令复频率  $\omega = p + jq$ , 代入式(18), 并分离虚部和实部, 则有

$$\begin{cases} \text{Re}[F(p, q, \alpha, \beta, u, H)] = 0, \\ \text{Im}[F(p, q, \alpha, \beta, u, H)] = 0 \end{cases} \tag{19}$$

### 3 计算结果分析

令  $H = 0$ , 方程(11) 退化为弹性输流圆管面内运动的情形。为了验证本文解法的有效性, 图2 给出了两端固定的半圆形弹性输流圆管无量纲频率与无量纲流速的变化曲线, 这与 Chen<sup>[1]</sup> 的结果相当吻合。图2 中 1st、2nd、3rd、4th 分别表示第 1、2、3 和 4 阶模态(以下同), 实线和点分别是本文和 Chen<sup>[1]</sup> 的计算结果。

图3 给出了两端固定的半圆形弹性输流曲管前 3 阶无量纲复频率与无量纲流速的变化关系曲线。从图中可以看出, 当无量纲流速  $u$  为零时,  $\omega$  为实数。随着流速的增加,  $\omega$  实部减小, 虚部保持为零, 表明圆管作无阻尼的简谐振动。当流速增加到约  $u = 3$  时, 第 1 阶模态频率  $\omega$  的实部变为零, 这对应于圆管以第 1 阶模态运动发散。当流速越过临界值  $u = 3$  后,  $\text{Re}(\omega) = 0$ ,  $\text{Im}(\omega)$  为正负两个分支, 这时圆管对应于发散失稳。当流速进一步增大到  $u \approx 3.75$  时, 系统在第一阶模态中重新得到稳定, 然而, 系统在稳定后, 又会在流速  $u \approx 4.0$  处,  $\text{Re}(\omega) \neq 0$ , 且  $\text{Im}(\omega)$  为正负两个分支, 这时系统的第 1、第 2 阶模态合成, 产生耦合模态颤振。此外, 当流速增大到  $u \approx 4.9$  时, 系统的第 1、2、3 阶模态也将合成, 产生耦合模态颤振。

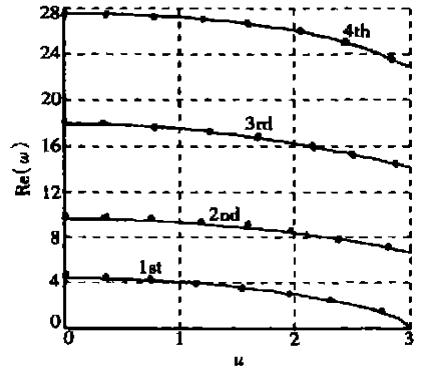


图2 两端固定半圆形弹性输流管道无量纲频率与无量纲流速变化曲线 ( $H = 0, \beta = 0.5, \alpha = \pi$ )

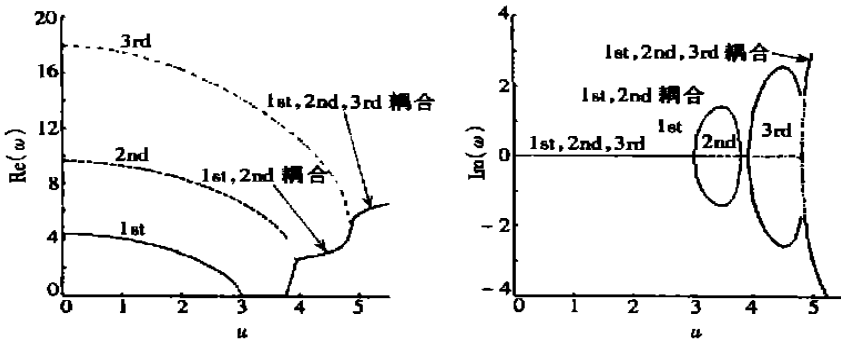


图3 无量纲频率实部、虚部与无量纲流速变化曲线 ( $\alpha = \pi, \beta = 0.5, H = 0$ )

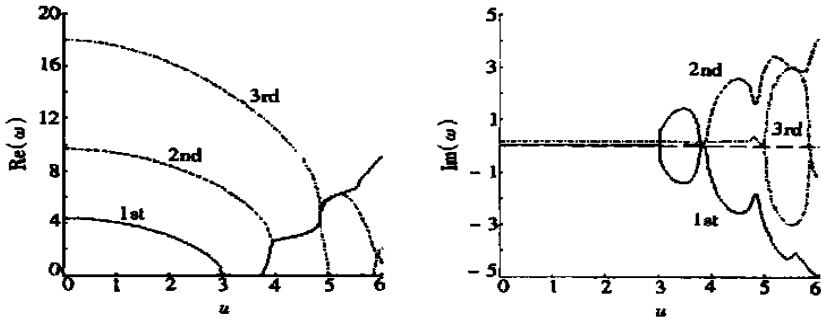


图 4 无量纲频率实部、虚部与无量纲流速变化曲线 ( $\alpha = \pi, \beta = 0.5, H = 0.001$ )

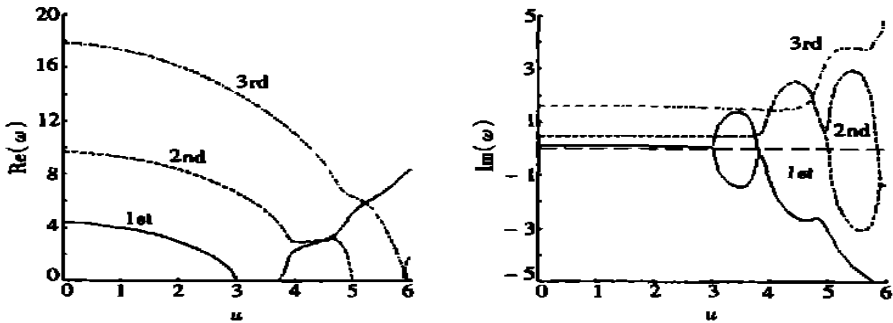


图 5 无量纲频率实部、虚部与无量纲流速变化曲线 ( $\alpha = \pi, \beta = 0.5, H = 0.01$ )

图 4、图 5 给出了两端固定的半圆形输流曲管在无量纲松弛延滞  $H = 0.001$  和  $H = 0.01$  时前 3 阶无量纲复频率与无量纲流速的变化关系曲线。从图中可以看出，与弹性输流管道 ( $H = 0$ ) 相比，随着无量纲延滞时间  $H$  的增大，无量纲复频率与无量纲流速的变化关系曲线发生很大的变化，尤其是当  $H$  的量级大于  $10^{-2}$  时，这种变化变得更为显著。具体表现在以下几个方面：1) 在无量纲延滞时间较大时，随着无量纲流速的增加，无量纲频率的实部减小，虚部为几乎不变的正值，且虚部的值随着  $H$  的增大及模态阶数的提高而变大。这表明，系统的频率在减小而阻尼则增大，即系统做有阻尼的振动。事实上，对于一个 Kelvin-Voigt 粘弹性系统来说，若粘性越大，则它的频率会越变小而粘性阻尼会增大，以上这个结果与粘弹性的振动理论是相一致的。2) 与弹性系统 ( $H = 0$ ) 相比较，在较大时，粘弹性系统另一个显著的特点就是它的第 1、2、3 阶模态不再耦合，也就是说耦合模态颤振将不再发生，而是在各阶模态（如第 1、第 2 阶）上先发散失稳，然后在 1 阶模态上再发生单一模态颤振。3) 在一定的范围内 ( $H = 0 \sim 10^{-2}$  量级)， $H$  对第 1 阶模态的发散临界流速和再稳定流速范围的变化影响不大，但是这种影响随着模态的增大而有所增大。

[参 考 文 献]

[1] Chen S S. Flow induced in-plane instabilities of curved pipes[J]. Nuclear Engineering and Design, 1972, 23(1): 29—38.  
 [2] Chen S S. Out-of-plane vibration and stability of curved tubes conveying fluid[J]. Journal of Applied Mechanics, ASME, 1973, 40(2): 362—368.  
 [3] Misra A K, Paidoussis M P, Van K S. On the dynamics of curved pipes transporting fluid—Part I: Inextensible theory[J]. Journal of Fluids and Structures, 1988, 2(3): 221—244.

- [4] Aithal R, Steven Gipson G. Instability of damped curved pipes[J]. Journal of Applied Mechanics, ASME, 1993, 116(1): 77—90.
- [5] 魏发远, 黄玉盈, 任志良, 等. 分析输液曲管临界流速的迁移矩阵法[J]. 固体力学学报, 2000, 21(1): 33—39.
- [6] 倪樵, 张惠兰, 黄玉盈, 等. DQ法用于具有弹性支承半圆形输液曲管的稳定性分析[J]. 工程力学, 2000, 17(6): 59—64.
- [7] WANG Zhong\_min, ZHAO Feng\_qun, FENG Zhen\_yu, et al. The dynamic behaviors of viscoelastic pipes conveying fluid with the Kelvin model[J]. Acta Mechanica Solid Sinica, 2000, 13(3): 262—270.
- [8] 赵凤群, 王忠民, 冯振宇. 三参量固体模型粘弹性输流管道的动力特性分析[J]. 固体力学学报, 2002, 23(4): 483—489.
- [9] McIver D B. Hamilton's principle for systems of changing mass[J]. Journal of Engineering Mathematics, 1973, 7(3): 249—261.
- [10] 杨挺青. 粘弹性力学[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1990: 12—27.

## Stability Analysis of Viscoelastic Curved Pipes Conveying Fluid

WANG Zhong\_min, ZHANG Zhan\_wu, ZHAO Feng\_qun

(School of Sciences, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, P.R. China)

**Abstract:** Based on the Hamilton's principle for elastic systems of changing mass, a differential equation of motion for viscoelastic curved pipes conveying fluid was derived using variational method, and the complex characteristic equation for the viscoelastic circular pipe conveying fluid was obtained by normalized power series method. The effects of dimensionless delay time on the variation relationship between dimensionless complex frequency of the damped clamped viscoelastic circular pipe conveying fluid with the Kelvin\_Voigt model and dimensionless flow velocity were analyzed. For greater dimensionless delay time, the behavior of the viscoelastic pipe is that the first, second and third mode does not couple, while the pipe behaves divergent instability in the first and second order mode, then single\_mode flutter takes place in the first order mode.

**Key words:** dynamic stability; viscoelastic circular pipe conveying fluid; Kelvin\_Voigt model; power series method