文章编号: 1000_0887(2005)07_0794_07

# 无粘、可压、绝热流体的 Euler 方程初值问题的适定性*

王曰朋

(上海大学 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

(郭兴明推荐)

摘要: 根据分层理论提供的基本方法, 讨论 Euler 方程的初值问题的适定性, 给出了方程的典型初边值问题适定性的判别条件, 确定了 Euler 方程的局部(准确)解的解空间构造, 对适定问题给出了解析解的计算公式.

关 键 词: Euler 方程; 初边值问题; 适定性; 分层理论

中图分类号: O175.29 文献标识码: A

## 引 言

在流体力学中,“理想流体在很多情况下, 是一个合理的近似, 例如, 在研究飞行器周围的流场分布时, 除飞行器表面附近一薄层中通常必须考虑粘性以及热传导的影响外, 在流场中其余的部分均可假设为理想流体来进行讨论; 即使对整个流场中均假设为理想流体, 也可得出相当合理的结果, 因此对理想流体的研究, 不仅具有理论上的重要意义, 而且具有实际上的重大价值[1]”. Euler 方程是描述理想流体的基本方程组之一. 关于等熵, 不可压缩理想流体的 Euler 方程的局部解问题, 文献[2]和文献[3]进行了较为全面的研究. 但是对于无粘、可压缩、绝热的 Euler 方程在连续可微函数类中各种初边值问题的适定性讨论却不多. 本文用分层理论提供的基本方法讨论 Euler 方程几类典型的初边值问题适定性的充要条件, 并在初始条件与方程中的参数解析的条件下, 给出了适定问题解析解的计算公式.

无粘、可压、绝热的 Euler 方程原型[4]为:

$$
\mathrm{D}:\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = -\dfrac{1}{\rho}\nabla P + \boldsymbol{F}, \\[2mm] \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\boldsymbol{u}) = 0, \\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 0, \end{cases}
$$

其中

$$
(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}_+ = V_0,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z},
$$

* 收稿日期: 2003_10_08; 修订日期: 2005_03_08

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(40175014); 上海市科委重点资助项目(02DJ14032)

作者简介: 王曰朋(1970—), 山东滨州人, 博士(Tel: +86_21_56331051; E_mail: eduwyp@eyou.com).

$\boldsymbol{u} = (u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t))$ 为速度向量, $\rho(x, y, z, t) > 0$ 和 $s(x, y, z, t)$ 分别代表密度和熵, $P$ 表示压力, $\rho, s, P$ 由状态方程联系: $P = P(\rho, s)$, 外力 $\boldsymbol{F} = (F_1(x, y, z, t), F_2(x, y, z, t), F_3(x, y, z, t))$, 未知函数组是 $(u, v, w, \rho, s)$•

文中使用的特定符号与定义, 请参看文献[5]•

应用分层理论求解偏微分方程的步骤是:

第 1 步, 使用 Ehresmann 空间的局部坐标改写方程;

第 2 步, 根据定义计算本方程;

第 3 步, 通过对纤维空间 $\rho_{3, k-1}: E_{3, k-1}(\mathrm{D}) \to W_{3, k-1}(V_0, Z)$ 分层, 寻找相应问题的适定性条件•

## 1 Euler 方程初边值问题的适定性

根据上述求解偏微分方程的步骤, 首先改写方程:

记 $(x, y, z, t) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathrm{R}^4 \triangleq V_0$, 未知函数组 $(u, v, w, \rho, s) = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) \in \mathrm{R}^3 \times \mathrm{R}_+^* \times \mathrm{R} = Z$, 则 Euler 方程可看作 $J^1(V_0, Z)$ 的一个子集 $\mathrm{D} \subseteq J^1(V_0, Z)$, 使用 $J^1(V_0, Z)$ 的局部坐标, 可将 Euler 方程改写如下:

$$
\mathrm{D}: \begin{cases} f_i: \ p_4^i + u_1 p_1^i + u_2 p_2^i + u_3 p_3^i + \dfrac{P_1}{u_4} p_i^4 + \dfrac{P_2}{u_4} p_i^5 - F_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3), \\ f_4: \ p_4^4 + u_1 p_1^4 + u_2 p_2^4 + u_3 p_3^4 + u_4 (p_1^1 + p_2^2 + p_3^3) = 0, \\ f_5: \ p_4^5 + u_1 p_1^5 + u_2 p_2^5 + u_3 p_3^5 = 0, \end{cases}
$$

其中

$$
(x_j, u_i, p_j^i) = \beta \in \mathrm{D}, \quad P_1 = \frac{\partial P}{\partial \rho} > 0, \ P_2 = \frac{\partial P}{\partial s}•
$$

将上述各式中的左侧分别记为 $f_i (i = 1, \cdots, 5)$, 则又可将 D 写成

$$
\mathrm{D} = V(f_i) \subseteq J^1(V_0, Z),
$$

$(V(f_i)$ 代表对应 $f_i: J^1(V_0, Z) \to \mathrm{R}$ 的公共零点);

第 2 步, D 的本方程 $\mathrm{D}_*$

根据定义[5], 计算 D 的本方程 $\mathrm{D}_* = \bigcup_k \mathrm{D}_k$ 如下:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{D}_{-1} = J^{-1}(V_0, Z) = V_0, \\
&\mathrm{D}_0 = J^0(V_0, Z) = V_0 \times Z, \\
&\mathrm{D}_1 = V(f_j), \\
&\vdots \\
&\mathrm{D}_k = V e_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1}}(f_j), e_{i_1 i_2 \cdots i_{k-2}}(f_j), \cdots, (e_{i_1}(f_j), f_j), \\
&i_1, i_2, \cdots, i_{k-1} = 1, 2, 3, 4; \ 1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_{k-1} \leqslant 4; j = 1, \cdots, 5; \\
&k = -1, 0, 1, 2, \cdots, \\
&\mathrm{D}_k \subseteq J^k(V_0, Z)•
\end{aligned}
$$

第 3 步, 分层

Euler 方程初边值问题的适定性判别条件, 将通过对纤维空间

$$
\rho_{3, k-1}: E_{3, k-1}(\mathrm{D}) \to W_{3, k-1}(V_0, Z)
$$

的分层而得到•

根据 Euler 方程的表现形式, 需要讨论以下两种初边值问题:

设 $P_0 \in V_0$ 是给定的一点, 则

第三类初值问题( $C_3$ )

$$(C_3):\quad \begin{cases} D, \\ u_i \mid_{\Sigma_3} = u_i, \end{cases}$$

其中 $\Sigma_3 \subseteq V_0$ 是 $V_0$ 中的 $C^\infty$ 超曲面, $\Sigma_3: \left\{ x_3 = G_3(x_1, x_2, x_4) \right\}$, $P_0 \in \Sigma_3$, 且 $u_i \in C^\infty$•

第四类初值问题 ( $C_4$ )

$$(C_4):\quad \begin{cases} D, \\ u_i \mid_{\Sigma_4} = u_i^{(0)}, \end{cases}$$

其中 $\Sigma_4 \subseteq V_0$ 是 $V_0$ 中的 $C^\infty$ 超曲面, $\Sigma_4: \left\{ x_4 = G_4(x_1, x_2, x_3) \right\}$, $P_0 \in \Sigma_4$, 且 $u_i^{(0)} \in C^\infty$•

使用分层理论的术语[5], ( $C_3$ ) 和( $C_4$ ) 可分别表述如下:

$$\begin{cases} \sigma^{(3)}(\xi) = (x_1^0 + \xi_1, x_2^0 + \xi_2, x_3^0 + g_3(\xi), x_4^0 + \xi_4), \\ \gamma^{(3)}(\xi) = (\sigma^{(3)}(\xi), u_i(\xi)), \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \sigma^{(4)}(\zeta) = (x_1^0 + \zeta_1, x_2^0 + \zeta_2, x_3^0 + \zeta_3, x_4^0 + g_4(\zeta)), \\ \gamma^{(4)}(\zeta) = (\sigma^{(4)}(\zeta), u_i^{(0)}(\zeta)), \end{cases} \tag{2}$$

$$g_l \in C^\infty, g_l(0,0,0) = 0 \qquad (l = 3, 4),\ u_i \in C^\infty,\ u_i^{(0)} \in C^\infty,$$

即 $(\sigma^{(3)}, \gamma^{(3)}) \in I_\infty(\Sigma_3, D)$, $(\sigma^{(4)}, \gamma^{(4)}) \in I_\infty(\Sigma_4, D)$, $I_\infty(\Sigma, D)$ 的定义请参看文献[5]•

**定理 1** 第三类初值问题( 1) 适定的充要条件是:

$$\begin{cases} u_3 - \dfrac{\partial g_3}{\partial \xi_4} - u_1 \dfrac{\partial g_3}{\partial \xi_1} - u_2 \dfrac{\partial g_3}{\partial \xi_2} \neq 0, \\ \left( u_3 - \dfrac{\partial g_3}{\partial \xi_4} - u_1 \dfrac{\partial g_3}{\partial \xi_1} - u_2 \dfrac{\partial g_3}{\partial \xi_2} \right)^2 - P_1 \left[ 1 + \left( \dfrac{\partial g_3}{\partial \xi_1} \right)^2 + \left( \dfrac{\partial g_3}{\partial \xi_2} \right)^2 \right] \neq 0• \end{cases} \tag{3}$$

**证明简述** 条件( 3) 是通过对 $\rho_{3,k-1}: E_{3,k-1}(D) \to W_{3,k-1}(V_0, Z)$ 的分层而得到的• 根据初始条件的定义[5], 以及 $D_k$ 的表达式, 证明过程被归结为对以下代数方程组的解的性质讨论:

$$\begin{cases} \varphi_{3^k}^{i} - \dfrac{P_1}{u_4} \alpha_i p_{3^k}^{4} - \dfrac{P_2}{u_4} \alpha_i p_{3^k}^{5} = \phi_{i,k-1}^{(3)} \\ \varphi_{3^k}^{3} + \dfrac{P_1}{u_4} p_{3^k}^{4} + \dfrac{P_2}{u_4} p_{3^k}^{5} = \phi_{3,k-1}^{(3)} \\ \varphi_{3^k}^{4} + u_4 (p_{3^k}^{3} - \alpha_1 p_{3^k}^{1} - \alpha_2 p_{3^k}^{2}) = \phi_{4,k-1}^{(3)} \\ \varphi_{3^k}^{5} = \phi_{5,k-1}^{(3)} \end{cases} \qquad (k \geqslant 1;\ i = 1, 2) \tag{4}$$

式中 $\alpha = u_3 - \alpha_4 - u_1 \alpha_1 - u_2 \alpha_2$, $\alpha_i = \dfrac{\partial g_3}{\partial \xi_i}$ $(i = 1, 2, 4)$, $\phi_{i,k-1}^{(3)}(\xi)$ 见附录•

显然, 以 $p_{3^k}^{i}(i = 1, \cdots, 5)$ 为未知数的方程组( 4) 存在唯一解的充要条件是:

$$\begin{cases} \alpha \neq 0, \\ \alpha^2 - P_1(1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2) \neq 0, \end{cases}$$

此即相对于 $(\sigma^{(3)}, \gamma^{(3)})$ 的横截层 $S_{3,k-1}^{t}(D)$ 的末方程[5], 也是第三类初值问题适定的充要条件, 即( 3)• 定理证毕•

**推论 1** 考虑流体力学中常见的边值问题如下:

$$\begin{cases} \mathrm{D}, \\ u_i \mid_\Sigma = u_i, \end{cases}$$

$C^\infty$ 超曲面 $\Sigma \subseteq \mathrm{R}^4$ 并且 $\Sigma:\{Q(x, y, z) = 0\}$ 满足条件 $(u_1, u_2, u_3)$• $\because Q = 0$, 根据(3), 此边值问题是不适定的•

定理 2　第四类初值问题(2) 适定的充要条件是:

$$\begin{cases} 1 - u_1^{(0)} \dfrac{\partial g_4}{\partial \zeta_1} - u_2^{(0)} \dfrac{\partial g_4}{\partial \zeta_2} - u_3^{(0)} \dfrac{\partial g_4}{\partial \zeta_3} \neq 0, \\ \left(1 - u_1^{(0)} \dfrac{\partial g_4}{\partial \zeta_1} - u_2^{(0)} \dfrac{\partial g_4}{\partial \zeta_2} - u_3^{(0)} \dfrac{\partial g_4}{\partial \zeta_3}\right)^2 - \\ \qquad P_1\left[\left(\dfrac{\partial g_4}{\partial \zeta_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial g_4}{\partial \zeta_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial g_4}{\partial \zeta_3}\right)^2\right] \neq 0• \end{cases} \tag{5}$$

证明简述　证明过程与定理 1 相似, 以 $p^i_{4^k}(i = 1, \cdots, 5)$ 为未知数的方程组

$$\begin{cases} \Lambda p^i_{4^k} - \dfrac{P_1}{u_4^{(0)}} \lambda_i p^4_{4^k} - \dfrac{P_2}{u_4^{(0)}} \lambda_i p^5_{4^k} = \phi^{(4)}_{i, k-1}, \\ \Lambda p^4_{4^k} - u_4^{(0)}(\lambda_1 p^1_{4^k} + \lambda_2 p^2_{4^k} + \lambda_3 p^3_{4^k}) = \phi^{(4)}_{4, k-1}, \\ \Lambda p^5_{4^k} = \phi^{(4)}_{5, k-1}, \end{cases} \tag{6}$$

存在唯一解的充要条件是(5) 成立, 即相对于 $(\sigma^{(4)}, \gamma^{(4)})$ 的横截层 $S^t_{3, k-1}(\mathrm{D})$ 的末方程, 也是第四类初值问题适定的充要条件•

式中

$$i = 1, 2, 3, \ k \geqslant 1,$$

$$\Lambda = 1 - u_1^{(0)} \lambda_1 - u_2^{(0)} \lambda_2 - u_3^{(0)} \lambda_3, \quad \lambda_i = \frac{\partial g_4}{\partial \zeta_i}, \quad \lambda = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2,$$

$\phi^{(4)}_{i, k-1}(\zeta)$ 见附录•　定理证毕•

推论 2 在超曲面 $\{t = 0\} \subseteq \mathrm{R}^4$ 上, 任何 $C^\infty$ 初始条件构成的 D 的 Cauchy 问题(即第四类初值问题) 都是适定的•

## 2　Euler 方程局部解的解空间构造

根据 1 的结论, 可以讨论 Euler 方程的源空间与解空间的构造如下:

设 $P_0 \in \mathrm{R}^4$ 是任意给定的一点•

定理 3(源空间构造定理)　设 $U = (u, v, w, \rho, s)$ 是 Euler 方程 D 的任一组解, 并在 $P_0$ 解析•　则存在一个 $C^\infty$ 超曲面 $S \subseteq \mathrm{R}^4$, $P_0 \in S$, 使得 $U$ 在 $S$ 上的限制 $U\mid_S$ 所构成的初值问题是适定的, 并且由 $U\mid_S$ 作为初始条件得到的解析解就是 $U$•

证明简述　设方程中的所有参数都在 $P_0$ 解析, 取 $C^\infty$ 超曲面

$$(S):\{t = t_0\} \subseteq \mathrm{R}^4,$$

并记 $U\mid_S = (u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, u_3^{(0)}, u_4^{(0)}, u_5^{(0)})$, 则根据定理 2, 初值问题

$$\begin{cases} \mathrm{D}, \\ U\mid_S = (u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, u_3^{(0)}, u_4^{(0)}, u_5^{(0)}) \end{cases}$$

是适定的, 并由 $U\mid_S$ 做为初始条件所得唯一稳定的解析解就是 $U$•　定理证毕•

定理 4(局部解的解空间构造定理)　任给 5 个函数 $G_i(i = 1, 2, 3, 4, 5)$, 它们在 $P_0$ 解析,

并且 $G_4(P_0) > 0$• 则可构造 Euler 方程一个适定的初值问题, 使得此适定问题稳定的解析解由 $G_i$ 完全决定•

证明简述 由上述 $G_i$, 可定义 D 的一组初始条件如下:

$$u_i \mid_{(S)} = G_i,$$

其中 $C^\infty$ 超曲面 $(S): \{t = t_0\} \subseteq \mathrm{R}^4$, 则根据定理 2, 此初值问题是适定的• 然后由代数方程组(6)即可逐步确定此初值问题稳定的解析解, 这个解析解由 $G_i$ 完全确定• 定理证毕•

# 3 两类初值问题在适定情况下局部解析解的计算公式

为简单起见, 以 $P_0 = (0, 0, 0, 0) \in \mathrm{R}^4$ 为例, 在一般情况下, 计算过程完全一样• 根据上面的讨论, 设给定了两组无穷可微函数: $h_i$ 和 $h_i (i = 1, \cdots, 5)$, 并相应地取 $C^\infty$ 超曲面 $\{z = 0\}$ 与 $\{t = 0\}$, 对每个正整数 $k$, 先求得带有 3 个变量的两组解析函数 $H^i_{3^k}(\xi), H^i_{4^k}(\zeta)\ (i = 1, \cdots, 5)$• 然后, 对于每个多重指标 $j^\lambda = (j_1^{\lambda_1} j_2^{\lambda_2} j_3^{\lambda_3} j_4^{\lambda_4}), \mid \lambda \mid = k$, 计算解析函数

$$H^i_{3^k}(\xi), H^i_{4^k}(\zeta)$$

在原点 $(0, 0, 0) \in \mathrm{R}^3$ 的值 $H^i_{3^k}(0, 0, 0), H^i_{4^k}(0, 0, 0)$• 最后就得到以下两个收敛级数

$$u_i(x) = \sum_\lambda \frac{1}{\lambda!} H^i_{j^\lambda}(0) x^\lambda,$$

$$u_i(x) = \sum_\lambda \frac{1}{\lambda!} H^i_{j^\lambda}(0) x^\lambda,$$

$$i = 1, 2, 3, 4, 5, \quad x = (x_1, x_2, x_3, x_4),$$

$$x^\lambda = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} x_3^{\lambda_3} x_4^{\lambda_4}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = \lambda,$$

这就是方程 D 在 $\mathrm{R}^4$ 的原点附近两种形式的解析解, 而 D 的任何解析解都可以用这种方式求得•

1) $H^i_{j^\lambda}(\xi)$ 的计算公式: $k \geqslant 1$

$$H^i_{3^k}(\xi) = \frac{1}{h_3(\xi)} \phi^{(3)}_{i, k-1}(\xi), \qquad i = 1, 2, 5,$$

$$H^3_{3^k}(\xi) = \frac{1}{h_4(\xi)[(h_3(\xi))^2 - P_1]}[h_3(\xi) h_4(\xi) \phi^{(3)}_{3, k-1}(\xi) - P_1 \phi^{(3)}_{4, k-1}(\xi) - P_2 \phi^{(3)}_{5, k-1}(\xi)],$$

$$H^4_{3^k}(\xi) = \frac{1}{(h_3(\xi))^2 - P_1}\left[h_3(\xi) \phi^{(3)}_{4, k-1}(\xi) - h_4(\xi) \phi^{(3)}_{3, k-1}(\xi) + \frac{P_2}{h_3(\xi)} \phi^{(3)}_{5, k-1}(\xi)\right],$$

$$H^i_{j^{\lambda'} l}(\xi) = \frac{\partial H^i_{j^{\lambda'}}(\xi)}{\partial \xi_l}, \qquad l = 1, 2, 4, \mid \lambda' \mid = k - 1,$$

$k = 0$ 时, $H^i_0(\xi) = h_i(\xi)\ (i = 1, 2, 3, 4, 5)$,

其中 $h_3(\xi) \neq 0, h_3(\xi) \neq \sqrt{P_1}$•

2) $H^{i}_{j^{\lambda'}}(\zeta)$ 的计算公式:

$$k \geqslant 1 \text{ 时}, H^i_{4^k}(\zeta) = \phi^{(4)}_{i, k-1}(\zeta), \quad H^i_{j^{\lambda'} l}(\zeta) = \frac{\partial H^i_{j^{\lambda'}}(\zeta)}{\partial \zeta_l}, \qquad l = 1, 2, 3,$$

$$k = 0 \text{ 时}, H^i_0(\zeta) = h_i(\zeta),$$

$$i = 1, 2, 3, 4, 5, \mid \lambda' \mid = k - 1•$$

## 附　录

$\phi^{(3)}_{i,k-1}(\xi)$ 和 $\phi^{(4)}_{i,k-1}(\zeta)$ 的计算公式:

1) $\phi^{(3)}_{i,k-1}(\xi)$ 的计算公式

$$\phi^{(3)}_{i,k-1}(\xi) = \phi^{(3)}_{i,k-1}(\tau) - \left(p^{i}_{3^{k-1}}(4) + u_1 p^{i}_{3^{k-1}}(1) + u_2 p^{i}_{3^{k-1}}(2) + \frac{P_1}{u_4} p^{4}_{3^{k-1}}(i) + \frac{P_2}{u_4} p^{5}_{3^{k-1}}(i)\right) \quad (i = 1, 2),$$

$$\phi^{(3)}_{3,k-1}(\xi) = \phi^{(3)}_{3,k-1}(\tau) - \left(p^{3}_{3^{k-1}}(4) + u_1 p^{3}_{3^{k-1}}(1) + u_2 p^{3}_{3^{k-1}}(2)\right),$$

$$\phi^{(3)}_{4,k-1}(\xi) = \phi^{(3)}_{4,k-1}(\tau) - \left(p^{4}_{3^{k-1}}(4) + u_1 p^{4}_{3^{k-1}}(1) + u_2 p^{4}_{3^{k-1}}(2) + u_4 p^{1}_{3^{k-1}}(1) + u_4 p^{2}_{3^{k-1}}(2)\right),$$

$$\phi^{(3)}_{5,k-1}(\xi) = \phi^{(3)}_{5,k-1}(\tau) - \left(p^{5}_{3^{k-1}}(4) + u_1 p^{5}_{3^{k-1}}(1) + u_2 p^{5}_{3^{k-1}}(2)\right),$$

$$\phi^{(3)}_{i,k-1}(\tau) = e_3^{k-1}(F_i) - e_3^{k-2}\left(p^{i}_{1}p^{1}_{3} + p^{i}_{2}p^{2}_{3} + p^{i}_{3}p^{3}_{3} + e_3\left(\frac{P_1}{u_4}\right)p^{4}_{i} + e_3\left(\frac{P_2}{u_4}\right)p^{5}_{i}\right) - \cdots -$$
$$\left(p^{i}_{13^{k-2}}p^{1}_{3} + p^{i}_{23^{k-2}}p^{2}_{3} + p^{i}_{3^{k-1}}p^{3}_{3} + e_3\left(\frac{P_1}{u_4}\right)p^{4}_{i3^{k-2}} + e_3\left(\frac{P_2}{u_4}\right)p^{5}_{i3^{k-2}}\right), \qquad i = 1, 2, 3,$$

$$\phi^{(3)}_{4,k-1}(\tau) = -e_3^{k-2}\left(p^{4}_{1}p^{1}_{3} + p^{4}_{2}p^{2}_{3} + p^{4}_{3}p^{3}_{3} + p^{4}_{3}(p^{1}_{1} + p^{2}_{2} + p^{3}_{3})\right) - \cdots -$$
$$\left(p^{4}_{13^{k-2}}p^{1}_{3} + p^{4}_{23^{k-2}}p^{2}_{3} + p^{4}_{3^{k-1}}p^{3}_{3} + p^{4}_{3}(p^{1}_{13^{k-2}} + p^{2}_{23^{k-2}} + p^{3}_{3^{k-1}})\right),$$

$$\phi^{(3)}_{5,k-1}(\tau) = -e_3^{k-2}\left(p^{5}_{1}p^{1}_{3} + p^{5}_{2}p^{2}_{3} + p^{5}_{3}p^{3}_{3}\right) - \cdots - \left(p^{5}_{13^{k-2}}p^{1}_{3} + p^{5}_{23^{k-2}}p^{2}_{3} + p^{5}_{3^{k-1}}p^{3}_{3}\right),$$

$$p^{i}_{j\lambda}(l) = \frac{\partial p^{i}_{j\lambda}(\xi)}{\partial \xi_l} \quad (l = 1, 2, 4), \quad e_3^{l}(\quad) \text{ 代表 } \underbrace{e_3(e_3\cdots(e_3(\quad))\cdots)}_{l}.$$

2) $\phi^{(4)}_{i,k-1}(\zeta)$ 的计算公式

$$\phi^{(4)}_{i,k-1}(\zeta) = \phi^{(4)}_{i,k-1}(\tau) - \left(u_1 p^{i}_{4^{k-1}}(1) + u_2 p^{i}_{4^{k-1}}(2) + u_3 p^{i}_{4^{k-1}}(3) + \frac{P_1}{u_4} p^{4}_{4^{k-1}}(i) + \frac{P_2}{u_4} p^{5}_{4^{k-1}}(i)\right), \qquad i = 1, 2, 3,$$

$$\phi^{(4)}_{4,k-1}(\zeta) = \phi^{(4)}_{4,k-1}(\tau) - \big(u_1 p^{4}_{4^{k-1}}(1) + u_2 p^{4}_{4^{k-1}}(2) + u_3 p^{4}_{4^{k-1}}(3) +$$
$$u_4\left(p^{1}_{4^{k-1}}(1) + p^{2}_{4^{k-1}}(2) + p^{3}_{4^{k-1}}(3)\right)\big),$$

$$\phi^{(4)}_{5,k-1}(\zeta) = \phi^{(4)}_{5,k-1}(\tau) - \left(u_1 p^{5}_{4^{k-1}}(1) + u_2 p^{5}_{4^{k-1}}(2) + u_3 p^{5}_{4^{k-1}}(3)\right),$$

$$\phi^{(4)}_{i,k-1}(\tau) = e_4^{k-1}(F_i) - e_4^{k-2}\left(p^{i}_{1}p^{1}_{4} + p^{i}_{2}p^{2}_{4} + p^{i}_{3}p^{3}_{4} + e_4\left(\frac{P_1}{u_4}\right)p^{4}_{i} + e_4\left(\frac{P_2}{u_4}\right)p^{5}_{i}\right) - \cdots -$$
$$\left(p^{i}_{14^{k-2}}p^{1}_{4} + p^{i}_{24^{k-2}}p^{2}_{4} + p^{i}_{34^{k-2}}p^{3}_{4} + e_4\left(\frac{P_1}{u_4}\right)p^{4}_{i4^{k-2}} + e_4\left(\frac{P_2}{u_4}\right)p^{5}_{i4^{k-2}}\right), \qquad i = 1, 2, 3,$$

$$\phi^{(4)}_{4,k-1}(\tau) = -e_4^{k-2}\left(p^{4}_{1}p^{1}_{4} + p^{4}_{2}p^{2}_{4} + p^{4}_{3}p^{3}_{4} + p^{4}_{4}(p^{1}_{1} + p^{2}_{2} + p^{3}_{3})\right) - \cdots -$$
$$\left(p^{4}_{14^{k-2}}p^{1}_{4} + p^{4}_{24^{k-2}}p^{2}_{4} + p^{4}_{34^{k-2}}p^{3}_{4} + p^{4}_{4}(p^{1}_{14^{k-2}} + p^{2}_{24^{k-2}} + p^{3}_{34^{k-2}})\right),$$

$$\phi^{(4)}_{5,k-1}(\tau) = -e_4^{k-2}\left(p^{5}_{1}p^{1}_{4} + p^{5}_{2}p^{2}_{4} + p^{5}_{3}p^{3}_{4}\right) - \cdots - \left(p^{5}_{14^{k-2}}p^{1}_{4} + p^{5}_{24^{k-2}}p^{2}_{4} + p^{5}_{34^{k-2}}p^{3}_{4}\right),$$

$$p^{i}_{j\lambda}(l) = \frac{\partial p^{i}_{j\lambda}(\zeta)}{\partial \zeta_l} \quad l = 1, 2, 3, \quad e_4^{l}(\quad) \text{ 代表 } \underbrace{e_4(e_4\cdots(e_4(\quad))\cdots)}_{l}.$$

## [参　考　文　献]


[1] 李大潜, 秦铁虎. 物理学与偏微分方程(上册) [M]. 北京: 高等教育出版社, 1997, 96—106.

[2] SHIH Wei_hui. Solutions Analytiques de Quelques Equations aux Derives Partielles en Mecanique des Fluides [M]. Paris: Hermann Paris, 1992.

[3] 沈臻. 关于不可压、无粘流体的 Euler 方程初值问题的适定性(Ⅰ)、(Ⅱ) [J]. 应用数学和力学, 2003, **24**(5): 484—504.

[4] Landau L, Lifchitz E. Mecanique des Fluides [M]. Moscou: Editions Mir, 1971, 10—13.

[5] 施惟慧, 陈达段, 何幼桦. 分层理论与非线性偏微分方程基础[M]. 上海: 上海大学出版社, 2001.

# Well Posedness of Initial Value Problem for Euler Equations of Inviscid Compressible Adiabatic Fluid

WANG Yue_peng
(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics,
Shanghai University, Shanghai 200072, P.R.China)

**Abstract:** The well_posedness of the initial value problem of the Euler equations was mainly discussed based on the stratification theory, and the necessary and sufficient conditions of well_posedness are presented for some representative initial or boundary value problem, thus the structure of solution space for local (exact) solution of the Euler equations is determined. Moreover the computation formulas of the analytical solution of the well_posed problem are also given.

**Key words:** Euler equation; initial or boundary value problem; well posedness; stratification theory