

文章编号: 1000-0887(2005) 07-0810-09

双自由度非定点斜碰撞振动系统的 动力学分析*

金 俐, 陆启韶, 王 琪

(北京航空航天大学 理学院, 北京 100083)

(陈予恕推荐)

摘要: 对两个单摆组成的双自由度、非定点、斜碰撞振动系统的动力学行为进行了详细研究。揭示了在双自由度、非定点、斜碰撞过程中恢复系数、摩擦系数、系统参数和碰撞前后系统状态之间的关系。基于 Poincaré 映射方法和非定点斜碰撞关系推导出该系统单碰周期 n 次谐运动存在性判据。根据 Floquet 理论分析了该系统次谐运动周期解的稳定性问题, 给出了 Floquet 特征乘子的计算公式。通过数值仿真证实了该方法的有效性, 同时分析了非定点、斜碰撞系统碰撞点位置的概率分布情况。

关键词: 非定点碰撞; 斜碰撞; 次谐运动; 存在性; 稳定性; 概率分布

中图分类号: O175; O322 **文献标识码:** A

引 言

碰撞振动系统所呈现的复杂动力学现象多年来一直受到学者们的密切关注。Shaw 和 Whiston 等人^[1~4]对单自由度碰振系统进行了大量的研究工作, 得到了该类系统中存在复杂的动力学行为。李群宏和金栋平等人^[5,6]研究了双自由度碰振系统周期运动的存在性和稳定性, 并得到了单碰周期 n 次谐运动存在性判据和其稳定性分析的解析结果。Stronge^[7]对斜碰撞过程进行了研究, 指出用恢复阶段和压缩阶段能量变化的比值的平方根作为斜碰撞的恢复系数更为合理。继之, 他^[8]研究了旋转单摆与固定平面的斜碰撞情况, 得知此时只存在可逆的微滑动, 且滑动逆向与压缩恢复是同步的。

目前对多自由度(斜)碰撞振动系统的研究主要在定性或数值方面, 极难获得解析结果。特别地, 关于非定点、斜碰撞振动系统的研究文献还尚未见到。非定点碰撞意味着系统在运动过程中发生碰撞时, 碰撞点在碰撞物体上的位置随初始条件、系统参数以及时间诸因素改变。此外, 斜碰撞使得系统的动力学行为更加复杂。本文针对由两个单摆组成的双自由度、非定点、斜碰撞振动系统的动力学行为进行了详细的研究。

* 收稿日期: 2003_05_16; 修订日期: 2005_03_15

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(重大)(19990510 和 10432010)

作者简介: 金俐(1962—), 女, 浙江瑞安人, 副教授, 博士(联系人, Tel: + 86_010_82317937; E-mail: jinlibh@sina.com)。

1 双自由度非定点斜碰撞系统的碰撞过程分析

斜碰撞过程分析的目的是建立碰撞前后系统状态的关系,恢复系数是建立这些关系的关键因素,它是表征碰撞的法向过程的一个至关重要的参量。在此采用能量恢复系数 r_s , 其可表示为

$$r_s = \sqrt{\frac{W_r}{W_c}}, \quad (1)$$

式中 W_c 、 W_r 分别表示压缩阶段系统所吸收的弹性应变能与恢复阶段系统所释放的弹性应变能。

考虑图 1 所示在水平面上由长度分别为 l_1 和 l_2 的无质量刚性杆 O_1A 和 O_2B 以及质量分别为 m_1 和 m_2 的刚性质点 A 和 B 的两个单摆组成的系统。设单摆与杆碰撞时的摩擦系数为 μ , 且碰撞过程中有切向微滑移。取碰撞阶段的切换与切向微滑逆向同步, 且不计碰撞过程中微滑引起的角位移改变。设摆 O_1A 上的 A 点与摆 O_2B 上距悬挂点 O_2 为 $l_{A'}$ 的 A' 点发生碰撞时, 两单摆的摆角分别为 θ_0 和 φ_0 , 角速度分别为 $\dot{\theta}_0$ 和 $\dot{\varphi}_0$ 。下面利用能量恢复系数建立两单摆碰撞前后角速度之间的关系。

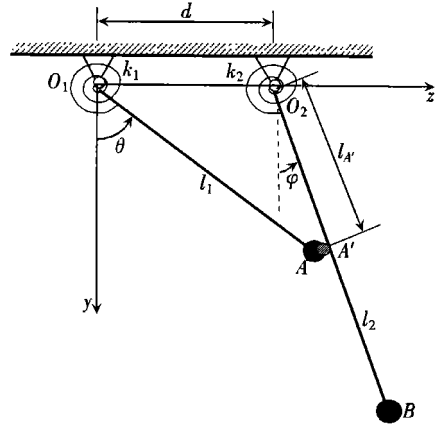


图 1 双自由度、非定点、斜碰撞振动系统

1.1 冲量矩方程

在碰撞的压缩阶段, 系统各分离体的冲量关系如图 2 所示。分别对两单摆应用冲量矩定理, 得

$$\begin{cases} m_1 l_1^2 (\dot{\theta} - \dot{\theta}_0) = -I_1 [\cos(\theta_0 - \varphi_0) + \mu \sin(\theta_0 - \varphi_0)], \\ m_1 l_2^2 (\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_0) = I_1 l_{A'}, \end{cases} \quad (2)$$

式中 $l_{A'} = (d^2 + l_1^2 - 2dl_1 \sin \theta_0)^{1/2}$, I 是冲量。在恢复阶段, 设恢复阶段结束时(即碰撞后)两单摆的角速度分别为 $\dot{\theta}$ 和 $\dot{\varphi}$ 。再分别对两单摆应用冲量矩定理, 并引入无量纲参数: $M = m_1/m_2$, $L_1 = l_2/l_{A'}$, $L_2 = l_2^2/(l_1 l_{A'})$, 可得碰撞前后两单摆角速度关系的第 1 个无量纲表达式, 即冲量矩方程

$$M \dot{\theta} + L_2 [\cos(\theta_0 - \varphi_0) - \mu \sin(\theta_0 - \varphi_0)] \dot{\varphi} = (\varepsilon_1^2 / \varepsilon_2^2) \{ M \dot{\theta}_0 + L_2 [\cos(\theta_0 - \varphi_0) + \mu \sin(\theta_0 - \varphi_0)] \dot{\varphi}_0 \}, \quad (3)$$

式中

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \left\{ M + L_1^2 [\cos^2(\theta_0 - \varphi_0) - \mu \sin(\theta_0 - \varphi_0) \cos(\theta_0 - \varphi_0)] \right\}^{1/2}, \\ \varepsilon_2 = \left\{ M + L_1^2 [\cos^2(\theta_0 - \varphi_0) + \mu \sin(\theta_0 - \varphi_0) \cos(\theta_0 - \varphi_0)] \right\}^{1/2}. \end{cases}$$

1.2 能量耗散方程

在碰撞的压缩和恢复阶段, 系统所吸收和释放的弹性应变能等于系统在该阶段法向动能的相应变化。应用式(1), 即 Stronge 按能量观点定义的恢复系数 r_s , 可得碰撞前后两单摆角速度关系的第 2 个无量纲表达式, 即能量耗散方程

$$\dot{\theta} \cos(\theta_0 - \varphi_0) - L_3 \dot{\varphi} = -r_s (\varepsilon_1 / \varepsilon_2) [\dot{\theta}_0 \cos(\theta_0 - \varphi_0) - L_3 \dot{\varphi}_0], \quad (4)$$

式中 $0 < r_s \leq 1$, $L_3 = l_{A'} l_1^{-1}$ 。由式(4)得知, 两单摆斜碰撞前后法向相对速度的关系不仅与恢

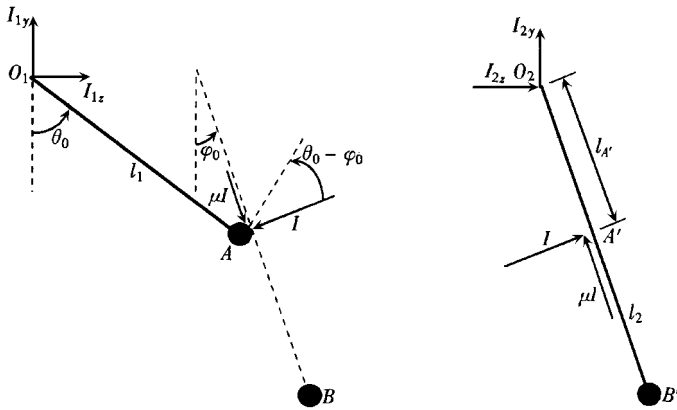


图2 双自由度斜碰撞过程的冲量关系

复系数有关,而且与摩擦系数、两摆的摆角、摆长以及两摆的质量比等因素有关。并且系统参数的选取应满足

$$M + L_1^2 [\cos^2(\theta_0 - \varphi_0) - \mu \sin(\theta_0 - \varphi_0) \cos(\theta_0 - \varphi_0)] > 0, \quad (5)$$

即满足微滑_逆向微滑_回弹条件。

1.3 碰撞前后的角速度关系

当摆 O_1A 上的 A 点与摆 O_2B 上 A' 点碰撞时,通过两个无量纲表达式(3)和(4)可建立两单摆在碰撞前后的角速度关系,即

$$\Phi = r_1 \theta_0 + r_2 \varphi_0, \quad \Psi = r_3 \theta_0 + r_4 \varphi_0, \quad (6)$$

式中

$$\begin{aligned} r_1 &= (M \varepsilon_1 + r_3 M \varepsilon_2 - r_5 \varepsilon_1^2 \varepsilon_2) \varepsilon_1^{-1} \varepsilon_2^{-2}, \\ r_2 &= L_3 (1 - r_1) \arccos(\theta_0 - \varphi_0), \\ r_3 &= L_3^{-1} (r_1 + r_5 \varepsilon_1 \varepsilon_2^{-1}) \cos(\theta_0 - \varphi_0), \\ r_4 &= 1 - r_1 - r_5 \varepsilon_1 \varepsilon_2^{-1}, \end{aligned}$$

当无摩擦碰撞时,3种定义的恢复系数数值相等并用 r 表示,此时有 $r_2 r_3 - r_1 r_4 = r$ 。

同理,当摆 O_2B 上的 B 点与摆 O_1A 上 B' 点碰撞时,两单摆碰撞前后的角速度关系类似地为

$$\Phi = r_{1B} \theta_0 + r_{2B} \varphi_0, \quad \Psi = r_{3B} \theta_0 + r_{4B} \varphi_0, \quad (7)$$

式中 r_{1B} 、 r_{2B} 、 r_{3B} 、 r_{4B} 是系统的参量、恢复系数和碰撞前两摆角的函数(在此略)。

这样,根据两单摆作刚性碰撞前后角位移不变的假定,以及碰撞前后角速度关系式(6)和(7),可将系统的碰撞过程和非碰撞过程的状态联系起来。

2 次谐周期碰撞运动的存在性

如图1所示的双自由度非定点斜碰撞振动系统中,在两单摆上有旋转弹簧和阻尼器,并受到简谐外激励力矩的作用。为明确起见,设单摆 O_2B 的杆长 $l_2 > l_1 + d$,以保证只可能存在摆 O_1A 的端点 A 与摆杆 O_2B 发生碰撞的情形。设 $x_1 = \theta$, $x_2 = \varphi$,非碰撞时无阻尼系统无量纲形式运动方程为

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + x_1 = f_1 \cos \omega t \\ \ddot{x}_2 + \Omega^2 x_2 = f_2 \cos \omega t \end{cases} \quad (\text{当 } \sin x_1 - L_3 \sin x_2 < \Delta \text{ 时}), \quad (8)$$

式中 $L_3 = l_A l_1^{-1}$, $\Delta = dl_1^{-1}$.

下面用解析方法讨论双自由度非定点无阻尼斜碰撞系统存在单碰周期 $n(n \in \mathbb{Z})$ 运动 (即 $(1, n)$ 周期运动) 的条件. 对有阻尼斜碰撞情形可用同样方法讨论, 但结果会更复杂.

记 $V_1 = x_1$, $V_2 = x_2$, 并定义 Poincaré 截面为

$$\Sigma = \left\{ (x_1, V_1, x_2, V_2, t) \in \mathbb{R}^4 \times S \mid \sin x_1 - L_3 \sin x_2 = \Delta \right\}, \quad (9)$$

式中 $S = \left\{ t \pmod{(2n\pi)} \mid t \in \mathbb{R}^+ \right\}$. 建立 Poincaré 映射 $P: \Sigma \rightarrow \Sigma$, 则对系统 $(1, n)$ 周期运动的研究转化为对 Poincaré 映射的不动点研究. 映射 P 是由两个映射复合而成. 第 1 个映射描述碰撞过程. 设系统在 t_0 时刻发生瞬时碰撞, 碰撞前后的点分别用 $(x_{10-}, V_{10-}, V_{20-}, t_{0-})$ 和 $(x_{10+}, V_{10+}, V_{20+}, t_{0+})$ 表示, 这一过程可定义为 $P_I: (x_{10-}, V_{10-}, V_{20-}, t_{0-}) \mapsto (x_{10+}, V_{10+}, V_{20+}, t_{0+})$, 第 2 个映射为相邻两次碰撞之间的阶段, 这一过程可定义为 $P_{II}: (x_{10+}, V_{10+}, V_{20+}, t_{0+}) \mapsto (x_{11-}, V_{11-}, V_{21-}, t_{1-}) \in \Sigma$, 其中点 $(x_{11-}, V_{11-}, V_{21-}, t_{1-})$ 由系统(8)的流 F_{t_1} 来确定.

于是, 从碰撞面 Σ 出发经历一次碰撞再回到碰撞面 Σ 的 Poincaré 映射 P 可写成

$$P = P_{II} \circ P_I: \Sigma \rightarrow \Sigma, (x_{10-}, V_{10-}, V_{20-}, t_{0-}) \mapsto (x_{11-}, V_{11-}, V_{21-}, t_{1-}), \quad (10)$$

所以只要当 $t_{1-} - t_0 = 0 \pmod{(2\pi/\omega)}$ 时, 有 $(x_{11-}, V_{11-}, V_{21-}) = (x_{10-}, V_{10-}, V_{20-})$ 成立, 就存在 $(1, n)$ 周期运动. 下面具体分析 $(1, n)$ 周期运动存在的条件.

如果碰撞前系统的状态已知, 由瞬时碰撞假定和角速度关系式(6), 可得系统碰撞后瞬时的状态. 将它们作为碰撞结束后系统(8)的初始状态, 可求得连续运动为

$$\begin{cases} x_1 = (r_1 V_{10+} + r_2 V_{20+} + h_1 \omega \sin \Omega t_0) \sin(t - t_0) + \\ \quad (x_{10-} - h_1 \cos \Omega t_0) \cos(t - t_0) + h_1 \cos \Omega t, \\ x_2 = \frac{(r_3 V_{10+} + r_4 V_{20+} + h_2 \omega \sin \Omega t_0)}{\Omega} \sin[\Omega(t - t_0)] + \\ \quad (x_{20-} - h_2 \cos \Omega t_0) \cos[\Omega(t - t_0)] + h_2 \cos \Omega t, \end{cases} \quad (11)$$

如果 $(1, n)$ 周期运动存在, 则当 $t_1 = t_0 + 2n\pi/\omega$ 时有 $(x_{11-}, V_{11-}, x_{21-}, V_{21-}) = (x_{10-}, V_{10-}, x_{20-}, V_{20-}) = (x_{10}, V_{10}, x_{20}, V_{20})$. 通过式(11)及 $(1, n)$ 周期运动的周期性条件, 经过详细地推导得知若满足条件

$$S_n \neq 0, S_{2n} \neq 0 \quad (12)$$

则可求得

$$S_0 = \frac{a_{S1}x_{10} + a_{S2}x_{20}}{a_d}, C_0 = \frac{a_{C1}x_{10} + a_{C2}x_{20}}{a_d}, \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} a_d &= \omega^2 S_n^2 S_{2n}^2 [h_2 r_2 + h_1(-r_4 - r_2 r_3 + r_1 r_4)](r_2 r_3 - r_1 r_4) \left\{ -\Omega h_2 S_n(-1 + C_{2n}) \times \right. \\ &\quad [2h_2 r_2 + h_1(-1 + r_1 - r_4 - r_2 r_3 + r_1 r_4)] + h_1 S_{2n}(-1 + C_n) \times \\ &\quad \left. [2h_1 r_3 + h_2(-1 - r_1 + r_4 - r_2 r_3 + r_1 r_4)] \right\}, \\ a_{S1} &= \omega \Omega h_2^2 S_n^2 S_{2n}^2 (-1 + C_n)(-1 + C_{2n}) [h_2 r_2 - \\ &\quad h_1(r_4 + r_2 r_3 - r_1 r_4)](r_2 r_3 - r_1 r_4)(-1 - r_1 - r_4 + r_2 r_3 - r_1 r_4), \\ a_{S2} &= \omega \Omega h_1^2 S_n^2 S_{2n}^2 (-1 + C_n)(-1 + C_{2n}) [-h_2 r_2 + \\ &\quad h_1(r_4 + r_2 r_3 - r_1 r_4)](r_2 r_3 - r_1 r_4)(-1 - r_1 - r_4 + r_2 r_3 - r_1 r_4), \\ a_{C1} &= -\omega^2 S_n^2 S_{2n}^3 (-1 + C_n) [h_2 r_2 - h_1(r_4 + r_2 r_3 - r_1 r_4)](r_2 r_3 - r_1 r_4) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & [-2h_1r_3 + h_1(1 + r_1 - r_4 + r_2r_3 - r_1r_4)], \\
 a_{C2} = & \omega^2 \mathcal{Q}_n^3 S_{2n}^2 (-1 + C_{2n}) [h_2r_2 - h_1(r_4 + r_2r_3 - r_1r_4)] (r_2r_3 - r_1r_4) \times \\
 & [-2h_1r_2 + h_1(1 - r_1 + r_4 + r_2r_3 - r_1r_4)], \\
 S_0 = & \sin(\varrho_0), \quad C_0 = \cos(\varrho_0), \quad S_n = \sin(2n\pi/\omega), \quad C_n = \cos(2n\pi/\omega), \\
 S_{2n} = & \sin(2n\pi\Omega/\omega), \quad C_{2n} = \cos(2n\pi\Omega/\omega), \quad n = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

如果存在

$$a_d \neq 0 \quad (14)$$

则由 a_d 的表达式可知条件(12)自然满足。再由 $S_0^2 + C_0^2 = 1$, 便得到一个关于 x_{10}, x_{20} 的方程:

$$(a_{C1}^2 + a_{S1}^2)x_{10}^2 + 2(a_{S1}a_{S2} + a_{C1}a_{C2})x_{10}x_{20} + (a_{C2}^2 + a_{S2}^2)x_{20}^2 - a_d^2 = 0, \quad (15)$$

考虑到 x_{10}, x_{20} 还应满足条件(见式(14))

$$\sin x_{10} - L_3 \sin x_{20} = \Delta, \quad (16)$$

可得出以下结论:

定理 对于给定的正整数 n , 若这个双自由度非定点斜碰撞振动系统的参数满足以下条件: (i) $a_d \neq 0$, (ii) 关于 x_{10}, x_{20} 的方程(15)和(16)有实数解, 则存在 $(1, n)$ 周期运动。

3 次谐周期碰撞运动的稳定性

现在研究斜碰撞振动系统(8)的 $(1, n)$ 周期运动的稳定性问题。取由式(9)建立的 Poincaré 截面 Σ 和由式(10)建立的 Poincaré 映射 P , 于是该系统的周期解稳定性就转化为 Poincaré 映射 P 的不动点稳定性问题。设 $(x_{10}, V_{10}, V_{20}, t_0) \in \Sigma$ 为映射 P 的不动点, 由系统的 Poincaré 映射 $P = P_{II} \circ P_I$, 则 Poincaré 映射 P 在不动点处的 Jacobi 矩阵为

$$DP(x_{10}, V_{10}, V_{20}, t_0) = DP_{II} \circ DP_I(x_{10}, V_{10}, V_{20}, t_0), \quad (17)$$

其中 $DP_i (i = I, II)$ 为映射 P_i 的 Jacobi 矩阵, 取斜碰撞条件(6)和映射 P_I 的定义 $P_I: (x_{10-}, V_{10-}, V_{20-}, t_{0-}) \mapsto (x_{10+}, V_{10+}, V_{20+}, t_{0+})$, 则映射 P_I 其 Jacobi 矩阵为

$$DP_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_1 & r_2 & 0 \\ 0 & r_3 & r_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

DP_{II} 为映射 P_{II} 的 Jacobi 矩阵, P_{II} 由下面的方程确定

$$\begin{cases}
 x_1(t) = (r_1V_{10+} + r_2V_{20+} + h_1\omega\sin\varrho_0)\sin(t - t_0) + \\
 \quad (x_{10-} - h_1\cos\varrho_0)\cos(t - t_0) + h_1\cos\varrho, \\
 V_1(t) = (r_1V_{10+} + r_2V_{20+} + h_1\omega\sin\varrho_0)\cos(t - t_0) - \\
 \quad (x_{10-} - h_1\cos\varrho_0)\sin(t - t_0) - h_1\omega\sin\varrho, \\
 x_2(t) = (r_3V_{10+} + r_4V_{20+} + h_2\omega\sin\varrho_0)\sin\Omega(t - t_0)/\Omega + \\
 \quad (x_{20-} - h_2\cos\varrho_0)\cos\Omega(t - t_0) + h_2\cos\varrho, \\
 V_2(t) = (r_3V_{10+} + r_4V_{20+} + h_2\omega\sin\varrho_0)\cos\Omega(t - t_0) - \\
 \quad (x_{20-} - h_2\cos\varrho_0)\Omega\sin\Omega(t - t_0) - h_2\omega\sin\varrho,
 \end{cases} \quad (19)$$

由隐函数定理可得

$$DP_{II} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

该矩阵中各元素的具体表达式如下:

$$\begin{aligned} a_{11} &= C_t, \quad a_{12} = S_t, \quad a_{13} = -V_1 S_\Omega / (V_2 \Omega), \\ a_{14} &= \left\{ \Omega V_2 [C_t(r_1 V_{10} + r_2 V_{20}) - S_t(h_1 C_0(-1 + \omega^2) + x_{10}) + \right. \\ &\quad \left. V_1 [(h_2 C_0 S_\Omega (\Omega^2 - \omega^2) + \Omega (C_\Omega (r_3 V_{10} + r_4 V_{20}) - \Omega S_\Omega x_{20}))] \right\} / (V_2 \Omega), \\ a_{21} &= -S_t, \quad a_{22} = C_t, \\ a_{23} &= S_\Omega [\omega^2 h_1 C_\omega + S_t(\omega h_1 S_0 + r_1 V_{10} + r_2 V_{20}) + C_t(x_{10} - h_1 C_0)] / (V_2 \Omega), \\ a_{24} &= \omega^2 h_1 C_0 C_t - \omega h_1 S_0 S_t + S_t(\omega h_1 S_0 + r_1 V_{10} + r_2 V_{20}) + C_t(x_{10} - h_1 C_0) - \\ &\quad \left\{ [-\omega^2 h_1 C_\omega - S_t(\omega h_1 S_0 + r_1 V_{10} + r_2 V_{20}) - C_t(x_{10} - h_1 C_0)] [\omega h_2 S_0 C_\Omega + \right. \\ &\quad \left. \omega^2 h_2 C_0 S_\Omega / \Omega - C_\Omega(\omega h_2 S_0 + r_3 V_{10} + r_4 V_{20}) + \Omega S_\Omega(x_{20} - h_2 C_0)] \right\} / V_2, \\ a_{31} &= 0, \quad a_{32} = 0, \\ a_{33} &= C_\Omega - S_\Omega [-\omega^2 h_2 C_\omega + \Omega S_\Omega(\omega h_2 S_0 + r_3 V_{10} + r_4 V_{20}) + \\ &\quad \Omega^2 C_\Omega(x_{20} - h_2 C_0)] / (V_2 \Omega), \\ a_{34} &= \omega^2 h_2 C_0 C_\Omega - \Omega \omega h_2 S_0 S_\Omega + \Omega S_\Omega [\omega h_2 S_0 + r_3 V_{10} + r_4 V_{20}] + \Omega^2 C_\Omega(x_{20} - h_2 C_0) - \\ &\quad \left\{ [-\omega^2 h_2 C_\omega - \Omega S_\Omega(\omega h_2 S_0 + r_3 V_{10} + r_4 V_{20}) - \Omega^2 C_\Omega(x_{20} - h_2 C_0)] [\omega h_2 S_0 C_\Omega + \right. \\ &\quad \left. \omega^2 h_2 C_0 S_\Omega / \Omega - C_\Omega(\omega h_2 S_0 + r_3 V_{10} + r_4 V_{20}) + \Omega S_\Omega(x_{20} - h_2 C_0)] \right\} / V_2, \\ a_{41} &= 0, \quad a_{42} = 0, \quad a_{43} = -S_\Omega / (V_2 \Omega), \\ a_{44} &= [-\omega h_2 C_\Omega S_0 - \omega^2 h_2 C_0 S_\Omega / \Omega + C_\Omega(\omega h_2 S_0 + r_3 V_{10} + r_4 V_{20}) - \\ &\quad \Omega S_\Omega(x_{20} - h_2 C_0)] / V_2, \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned} S_0 &= \sin(\omega t_0), \quad C_0 = \cos(\omega t_0), \quad S_t = \sin(t - t_0), \quad C_t = \cos(t - t_0), \\ S_\omega &= \sin \omega t, \quad C_\omega = \cos \omega t, \quad S_\Omega = \sin[\Omega(t - t_0)], \quad C_\Omega = \cos[\Omega(t - t_0)]. \end{aligned}$$

将式(18)、(20)代入式(17), 可得

$$DP = DP_{II} \circ DP_I = \begin{bmatrix} a_{11} & r_1 a_{12} + r_3 a_{13} & r_2 a_{12} + r_4 a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & r_1 a_{22} + r_3 a_{23} & r_2 a_{22} + r_4 a_{23} & a_{24} \\ 0 & r_3 a_{33} & r_4 a_{33} & a_{34} \\ 0 & r_3 a_{43} & r_4 a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad (21)$$

矩阵(21)的特征方程为

$$\lambda^4 + \eta_1 \lambda^3 + \eta_2 \lambda^2 + \eta_3 \lambda + \eta_4 = 0, \quad (22)$$

其中

$$\begin{aligned} \eta_1 &= -(a_{11} + r_1 a_{22} + r_3 a_{23} + r_4 a_{33} + a_{44}), \\ \eta_2 &= a_{11} a_{44} + r_1(-a_{12} a_{21} + a_{11} a_{22} + a_{22} a_{44} + a_{22} a_{33} r_4) - \\ &\quad r_2 r_3 a_{22} a_{33} + r_3(-a_{13} a_{21} + a_{11} a_{23} - a_{24} a_{43} + a_{23} a_{44}) + \\ &\quad r_4(a_{11} a_{33} - a_{34} a_{43} + a_{33} a_{44}), \\ \eta_3 &= r_1[-a_{12} a_{21} a_{44} - a_{11} a_{22} a_{44} + r_4(-a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{22} a_{33} + \end{aligned}$$

$$a_{22}a_{34}a_{43} - a_{22}a_{33}a_{44}] + r_2r_3(-a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{22}a_{34}a_{43} + a_{22}a_{33}a_{44}) + r_4(a_{11}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{33}a_{44}) + r_3(a_{11}a_{24}a_{42} - a_{14}a_{21}a_{43} - a_{13}a_{21}a_{44} - a_{11}a_{23}a_{44} - 2r_4a_{13}a_{21}a_{33}),$$

$$\eta_4 = (r_1r_4 - r_2r_3)(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})(a_{34}a_{43} - a_{33}a_{44}),$$

特征方程(22)的根(即 Floquet 特征乘子)为

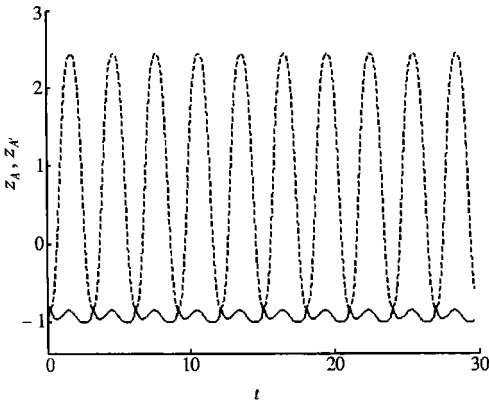
$$\begin{cases} \lambda_{1,2} = \frac{\sqrt{\Lambda}}{2} - \frac{\eta_1}{4} \pm \sqrt{\Pi + \frac{-\eta_1^3 + 4\eta_1\eta_2 - 8\eta_3}{4\sqrt{\Lambda}}}, \\ \lambda_{3,4} = -\frac{\sqrt{\Lambda}}{2} - \frac{\eta_1}{4} \pm \sqrt{\Pi - \frac{-\eta_1^3 + 4\eta_1\eta_2 - 8\eta_3}{4\sqrt{\Lambda}}}, \end{cases} \quad (23)$$

其中

$$\begin{aligned} \Theta &= 2\eta_2^3 - 9\eta_1\eta_2\eta_3 + 27\eta_3^2 + 27\eta_1^2\eta_4 - 72\eta_2\eta_4, \\ \Gamma &= -4(\eta_2^2 - 3\eta_1\eta_3 + 12\eta_4)^3 + \Theta^2, \\ \Lambda &= \frac{(\sqrt{\Gamma + \Theta})^{1/3}}{3 \cdot 2^{1/3}} + \frac{\eta_1^2}{4} - \frac{2\eta_2}{3} + \frac{2^{1/3}(\eta_2^2 - 3\eta_1\eta_3 + 12\eta_4)}{3(\sqrt{\Gamma + \Theta})^{1/3}}, \\ \Pi &= \frac{(\sqrt{\Gamma + \Theta})^{1/3}}{3 \cdot 2^{1/3}} + \frac{\eta_1^2}{2} - \frac{4\eta_2}{3} - \frac{2^{1/3}(\eta_2^2 - 3\eta_1\eta_3 + 12\eta_4)}{3(\sqrt{\Gamma + \Theta})^{1/3}}, \end{aligned}$$

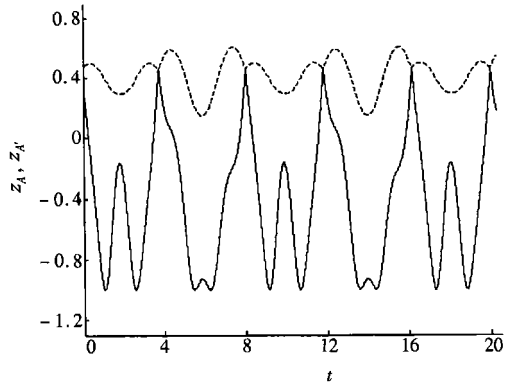
由此可以根据 Floquet 理论来讨论系统(8)的 $(1, n)$ 周期解的稳定性。

为验证上述分析方法的正确性,对一无阻尼无摩擦碰撞且摆 O_2B 无外激励力矩作用的双自由度、非定点、斜碰撞碰撞振系统的 $(1, n)$ 周期运动进行数值仿真。取参数为: $\delta_1 = \delta_2 = 0$, $\mu = 0$, $f_2 = 0$, $\Omega = 2.0$, $M = 0.5$, $l_1/l_2 = 0.5$, $r = 0.8$, 绘摆 O_1A 上的 A 点(实线)和摆 O_2B 上 A' 点(虚线)的 z 方向位移_时间历程,图 3 所示为单碰周期 1 运动,即 $(1, 1)$ 周期运动。当不满足前述定理中的单碰周期运动的条件时,该系统可能产生其他形式的周期运动。例如图 4 所示的双碰周期 4 运动,即 $(2, 4)$ 周期运动。



$$(d/l_1 = 0.8, f_1 = 2.75, \omega = 2.11)$$

图 3 单碰周期 1 运动



$$(d/l_1 = 0.4, f_1 = 3.5, \omega = 3.09)$$

图 4 双碰周期 4 运动

4 碰撞点位置的概率分布

单摆系统发生碰撞时,碰撞点在碰撞物体上的位置随初始条件、系统参数以及时间诸因素改变。对 (m, n) 周期运动情形,碰撞点集在摆 O_2B 上的分布是由 m 个点组成的离散分布形

式。然而, 由于双自由度、非定点、斜碰撞振动系统动力学行为的复杂性, 周期运动的存在范围与非周期运动相比是非常之小的。当系统作非周期运动时, 碰撞点位置的分布是非常复杂的。设单摆 O_2B 的摆长 $l_2 > l_1 + d$, 使碰撞只可能在摆 O_1A 的端点 A 与摆杆 O_2B 之间发生, 取运动稳定后碰撞 10^4 次的计算结果, 对碰撞点位置沿摆 O_2B 的分布情况进行分析。取参数为 $\delta_1 = \delta_2 = 0$, $\mu = 0$, $f_2 = 0$, $\Omega = 2.0$, $M = 0.5$, $l_1/l_2 = 0.5$, $r = 0.8$, $d/l_1 = 0.4$, $f_1 = 3.5$ 。从图 5 所示的情况可见, 摆 O_2B 上距悬挂点 O_2 为 $0 \sim 0.403l_2$ 和 $0.507l_2 \sim l_2$ 的区域没有发生碰撞, 只在 $0.404l_2 \sim 0.506l_2$ 的区域内发生碰撞, 碰撞点集是连续分布的, 其概率分布呈现单峰形式。而从图 6 可得知, 摆 O_2B 上距悬挂点 O_2 为 $0 \sim 0.365l_2$ 和 $0.577l_2 \sim l_2$ 的区域没有发生碰撞, 只在 $0.366l_2 \sim 0.576l_2$ 的区域内发生碰撞。此碰撞区域比图 5 所示的碰撞区域要宽, 碰撞点也是连续分布的集合, 但其概率分布呈现多峰形式。

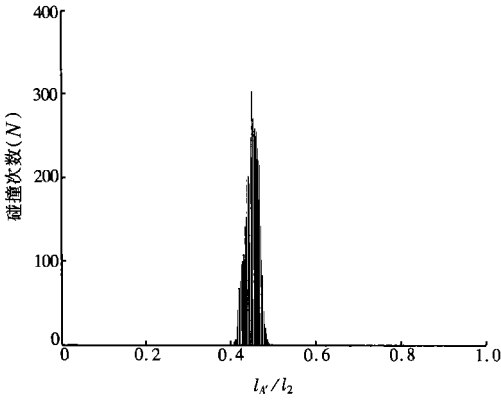


图 5 摆 O_2B 上碰撞点位置的
概率分布 ($\omega = 4.6$)

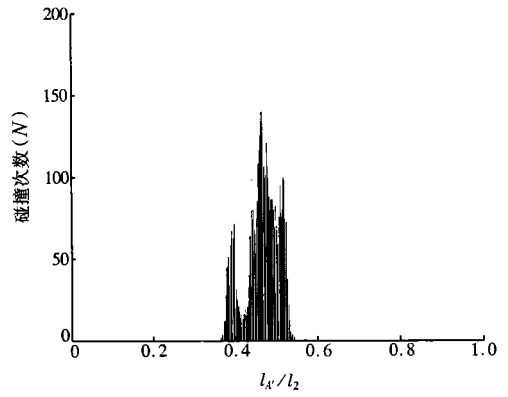


图 6 摆 O_2B 上碰撞点位置
的概率 ($\omega = 7.5$)

由此可知碰撞点位置的概率分布形式随系统参数改变较大。由于碰撞过程中冲击力很大, 碰撞点在碰撞物体上的分布形式密切关系到其表面的磨损程度, 并且直接影响到它的寿命和可靠性。因此, 对非定点斜碰撞系统碰撞点位置的分布分析具有重要的工程实际意义。同时, 由于碰撞点位置分布的复杂性使得非光滑多体动力系统的动力学特性更加复杂化, 也带来更大的研究难度。

5 结 论

本文对平面内两个单摆组成的双自由度、非定点、斜碰撞振动系统的动力学行为进行了详细研究。由于双自由度碰振系统动力学的复杂性, 一般难以进行碰振周期运动的解析研究, 此外, 在碰振运动过程中碰撞点位置及分布的不断变化, 加上斜碰撞情况, 这些都给系统动力学分析带来很大难度。本文给出了该非定点斜碰撞系统在碰撞前后状态之间的解析关系式, 揭示了该复杂系统在斜碰撞过程中恢复系数、摩擦系数及其它系统参数对系统运动状态的影响。得到了该系统单碰周期 n 次谐运动存在性判据, 根据 Floquet 理论分析了该次谐运动周期解的稳定性问题, 给出了 Floquet 特征乘子的计算公式, 并通过数值仿真验证了上述方法的有效性。同时分析了非定点、斜碰撞系统碰撞点位置的概率分布情况。本文结果对更复杂的多体非定点斜碰撞问题的研究具有较好的参考价值。

[参 考 文 献]

- [1] Shaw S W, Homes P J. A periodically forced piecewise linear oscillator[J]. Journal of Sound and Vibration, 1983, **90**(1): 129—155.
- [2] Shaw S W. The dynamics of a harmonically excited system having rigid amplitude constraints, part I —subharmonic motions and local bifurcations[J]. Transactions of ASME, Journal of Applied Mechanics, 1985, **52**(2): 453—458.
- [3] Whiston G S. The vibro_impact response of a harmonically excited and preloaded one_dimensional linear oscillator[J]. Journal of Sound and Vibration, 1987, **115**(2): 303—319.
- [4] Whiston G S. Global dynamics of a vibro_impacting linear oscillator[J]. Journal of Sound and Vibration, 1987, **118**(3): 395—424.
- [5] 李群宏, 陆启韶. 一类双自由度碰撞系统运动分析[J]. 力学学报, 2001, **33**(6): 776—786.
- [6] Jin D P, Hu H Y. Periodic impacting motions and their stability of a dual component system[J]. Acta Mechanica Sinica, 1997, **13**(4): 427—447.
- [7] Stronge W J. Impact Mechanics [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- [8] Stronge W J. Friction in collisions: resolution of a paradox[J]. Journal of Applied Physics, 1991, **69**(2): 610—612.

Dynamic Analysis of Two_Degree_of_Freedom Oblique Impact System With Non_Fixed Impact Positions

JIN Li, LU Qi_shao, WANG Qi

(School of Science, Beijing University of Aeronautics and Astronautics,
Beijing 100083, P. R. China)

Abstract: The dynamic behavior of a two_degree_of_freedom oblique impact system consisted of two pendulums with non_fixed impact positions is investigated. The relations between the restitution coefficient, the friction coefficient, as well as other parameters of the system and the states before or after impact, are clarified in this oblique impact process. The existence criterion of single impact periodic_n subharmonic motions was deduced based on the Poincaré map method and the oblique impact relations with non_fixed impact positions. The stability of these subharmonic periodic motions was analyzed by the Floquet theory, and the formulas to calculate the Floquet multipliers were given. The validity of this method is shown through numerical simulation. At the same time, the probability distribution of impact positions in this oblique system with non_fixed impact positions is analyzed.

Key words: impact with non_fixed position; oblique impact; subharmonic motion; existence; stability; probability distribution