

文章编号: 1000-0887(2005) 08-0883-09

考虑地基耦合效应含裂纹中厚矩形板的非线性振动分析*

肖勇刚^{1,2}, 傅衣铭¹, 查旭东²

(1. 湖南大学 工程力学系, 长沙 410082;
2. 长沙理工大学 桥梁与结构工程学院, 长沙 410076)

(我刊编委傅衣铭来稿)

摘要: 基于 Reissner 板理论和 Hamilton 变分原理, 建立了双参数地基上具有表面横向贯穿裂纹的中厚矩形板的非线性运动控制方程。在周边自由的条件下, 提出了一组满足问题全部边界条件和裂纹处连续条件的试函数。且利用 Galerkin 法和谐波平衡法对方程进行求解, 分析了考虑地基耦合效应的中厚矩形裂纹板的非线性振动特性。数值计算中, 讨论了不同裂纹位置、裂纹深度、板的结构参数和地基物理参数对弹性地基上具裂纹的四边自由中厚矩形板的非线性幅频响应的影响。

关键词: 中厚矩形板; 弹性地基; 裂纹; 非线性振动

中图分类号: O343.2 **文献标识码:** A

引 言

弹性地基上中厚矩形板是结构工程中非常重要的一类结构, 不同边界条件下弹性基支板的力学特性已经引起了相当广泛的关注。Szilard^[1]对 Winkler 地基上的弹性板的弯曲问题进行了求解。Faw 等^[2]、李正良等^[3]、王建国等^[4]分析了双参数地基上板的弯曲问题。Sonzogni 和 Idelsohn^[5]采用优化的 Kantorovich 方法, 分析了一边自由的变厚度方板的自振特性。Bhaskar 和 Dumir^[6]用正交配点法分析了弹性地基上正交异性薄板的非线性振动。Saliba^[7]应用叠加原理分析了周边固支对称梯形板的横向自由振动问题。梁兴复等^[8]构造了满足边界条件的多项式挠度函数, 利用 Galerkin 法分析了弹性地基上矩形薄板的自由振动。

裂纹对弹性板结构的力学性能有着重大影响, 但上述研究均局限于完好的弹性基支板的力学特性分析。虽然, Khadem 等^[9]分析了含表面横向贯通裂纹四边简支弹性矩形板的自由振动, 但对弹性地基上含裂纹中厚矩形板的非线性振动特性的认识仍待深入探讨。本文探讨了板中裂纹位置和裂纹深度的变化以及板和地基结构参数的变化, 对考虑地基耦合效应含横向

* 收稿日期: 2004_07_07; 修订日期: 2005_03_18

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50208004); 交通部资助项目(200231582512)

作者简介: 肖勇刚(1964—), 男, 江西南康人, 副教授, 博士(联系人, Tel/Fax: + 86_731_5219360; E_mail: xyg7906@sohu.com);

傅衣铭(1945—), 男, 湖南湘潭人, 教授, 博导, 从事结构非线性动力分析

表面贯穿裂纹且周边自由中厚矩形板的非线性自由振动特性的影响。所得结论对工程实际中弹性板结构的损伤检测具有指导意义。

1 基本方程

考虑在横向分布荷载 $q(x, y, t)$ 作用下的中厚矩形板($a \times b \times h$), 板上任一点的坐标由位于板中面的直角坐标系(x, y, z) 确定。对问题引入下列假设:

1) 中厚板遵循 Reissner 板理论; 2) 设中厚矩形板在 $y = y_1$ 处有一横向表面贯通裂纹, 它将板分成 I、II 两个区域; 3) 弹性地基为各向同性的均质弹性半空间, 且中厚板与地基层的接触面处位移保持连续。由假设 3) 可设地基层沿 z 方向的位移 $w(x, y, z, t)$ 满足

$$w(x, y, z, t) = w(x, y, t) \cdot \phi(z),$$

式中, $\phi(z)$ 为地基层沉陷沿深度 z 方向的衰减函数, 且 $\phi(h/2) = 1$, $\phi(H) = 0$, h 为板厚, H 为地基层厚度; $w(x, y, t)$ 为板中面的挠度。地基的应变分量为

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_{xy} = 0, \quad \varepsilon_z = w(x, y) \cdot d\phi/dz, \\ \varepsilon_{xz} = \partial w/\partial x \cdot \phi(z), \quad \varepsilon_{yz} = \partial w/\partial y \cdot \phi(z). \end{cases}$$

考虑板的横向剪切变形影响时, 板的位移分量

$$u = u^0 + z \cdot \alpha, \quad v = v^0 + z \cdot \beta, \quad w = w^0, \quad (1)$$

式中, u, v, w 分别为板内任一点沿 x, y, z 方向的位移; u^0, v^0, w^0 分别是 u, v, w 在中面上的值。

板的应变与位移的关系为

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + z \cdot \alpha_x, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_y^0 + z \cdot \beta_y, \quad \varepsilon_z = 0, \\ \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xy}^0 + z(\alpha_y + \beta_x), \quad \varepsilon_{xz} = \alpha_x + w_{,x}, \quad \varepsilon_{yz} = \beta_y + w_{,y}, \end{cases} \quad (2)$$

式中, α, β 分别为板中面法线在 x 和 y 方向的转角, $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \varepsilon_{xy}^0$ 分别为中面应变, 其与位移的关系如 von Kármán 理论所示。板与地基的应力与应变关系服从广义 Hooke 定理。

设 E, μ 和 G 分别为板的弹性模量, Poisson 比和剪切模量; E_s, μ_s 和 G_s 分别是地基的弹性模量、Poisson 比和剪切模量; $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ 和 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xy}$ 分别是板和地基的 Kirchhoff 应力分量。

弹性板的应变能为

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \sigma_{xy} \varepsilon_{xy} + \sigma_{xz} \varepsilon_{xz} + \sigma_{yz} \varepsilon_{yz}) dx dy dz; \quad (3)$$

地基的弹性应变能为

$$\begin{aligned} \Pi_2 = & \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \sigma_{xy} \varepsilon_{xy} + \sigma_{xz} \varepsilon_{xz} + \sigma_{yz} \varepsilon_{yz}) dx dy dz = \\ & \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{h/2}^H \left\{ (\lambda_s + 2G_s) w^2 \left(\frac{d\phi}{dz} \right)^2 + G_s \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \phi^2 \right\} dx dy dz; \quad (4) \end{aligned}$$

式中, $\lambda_s = E_s \cdot \mu_s / [(1 + \mu_s)(1 - 2\mu_s)]$ 为 Lam 系数。

运动惯量做的功为

$$\begin{aligned} \Pi_3 = & - \iint_A \int \rho h (u_{,t} u + v_{,t} v + w_{,t} w) + \rho J (\beta_{,t} \beta + \alpha_{,t} \alpha) dx dy - \\ & \iiint_V \rho_s w_{,t} w dx dy dz, \quad (5) \end{aligned}$$

式中 ρ, J 和 ρ_s 分别为弹性板的密度、截面转动惯量以及地基的密度。

外力做的功为

$$\Pi_4 = \iint_A q w dx dy + \int_C (N_x u + N_y v + N_z w + M_x \alpha + M_y \beta) ds, \quad (6)$$

式中 N_x, N_y, N_z, M_x, M_y 为弹性板边界上给定的外力和外力偶矩。

系统的总势能为

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 - \Pi_3 - \Pi_4 \quad (7)$$

由 Hamilton 变分原理有: $\delta \Pi = 0$, 即 $\delta \Pi_1 + \delta \Pi_2 - \delta \Pi_3 - \delta \Pi_4 = 0$, 式中地基的弹性应变能的变分可写为

$$\delta \Pi_2 = (\delta \Pi_2)_w + (\delta \Pi_2)_\phi = 0,$$

其中

$$\begin{aligned} (\delta \Pi_2)_w = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[(\lambda_s + 2G_s) \int_{h/2}^H \left(\frac{d\phi}{dz} \right)^2 dz \right] w \delta w + \right. \\ & \left. \left[G_s \int_{h/2}^H \phi^2 dz \right] \left[\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \delta w + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \delta w \right] \right\} dx dy \end{aligned} \quad (8)$$

令

$$K_f = (\lambda_s + 2G_s) \int_{h/2}^H \left(\frac{d\phi}{dz} \right)^2 dz, \quad G_f = G_s \int_{h/2}^H \phi^2 dz,$$

K_f 和 G_f 分别为地基反应模量和地基横向拉力系数。则式(8)可写为

$$(\delta \Pi_2)_w = \int_0^a \int_0^b (K_f w - G_f \cdot \cdot^2 w) \delta w dx dy + \iint_{\Omega_1} (K_f w - G_f \cdot \cdot^2 w) \delta w dx dy = 0, \quad (9)$$

式中 Ω_1 是板域外无限大半空间区域。

$$\begin{aligned} (\delta \Pi_2)_\phi = & \delta \left\{ \frac{1}{2} \int_{h/2}^H \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda_s + 2G_s) w^2 dx dy \right] \left(\frac{d\phi}{dz} \right)^2 + \right. \\ & \left. \int_{h/2}^H \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_s \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \right] \phi^2 dz \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

令

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda_s + 2G_s) w^2 dx dy, \quad n = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_s \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

则由 $(\delta \Pi_2)_\phi = 0$, 可得

$$m \frac{d^2 \phi}{dz^2} - n \phi = 0 \quad (11)$$

且需满足相应边界条件: $[(d\phi/dz) \delta \phi] |_{h/2}^H = 0$ 。再令

$$\left(\frac{Y_d}{H} \right)^2 = \frac{n}{m} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_s \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda_s + 2G_s) w^2 dx dy}, \quad (12)$$

式中 Y_d 是一个与地基弹性有关的系数, 它反映了地基沉陷沿深度衰减的快慢。

由式(11), 可解得

$$\phi(z) = \frac{\text{sh} \left[\frac{Y_d}{H} (1 - z/H) \right]}{\text{sh} (Y_d)} \quad \left(z \geq \frac{h}{2} \right); \quad (13)$$

将式(13)代入 K_f 和 G_f 中, 得

$$K_f = (\lambda_s + 2G_s) \frac{Y_d}{H} \left[\frac{\text{sh}(Y_d) \text{ch}(Y_d) + Y_d}{2\text{sh}^2(Y_d)} \right], \quad G_f = G_s \frac{H}{Y_d} \left[\frac{\text{sh}(Y_d) \text{ch}(Y_d) - Y_d}{2\text{sh}^2(Y_d)} \right]. \quad (14)$$

根据 Hamilton 变分原理, $\delta \Pi = 0$, 得板域内考虑地基耦合效应的中厚矩形板的非线性运

动控制方程,其由式(11)和下式组成

$$\begin{cases} N_{x,x} + N_{xy,y} = \rho h u_{,t}, & N_{xy,x} + N_{y,y} = \rho h v_{,t}, \\ Q_{x,x} + Q_{y,y} + G_f \cdot \nabla^2 w - K_f w = (\rho h + m_s) w_{,tt} - q - \\ \quad (N_x w_{,xx} + N_y w_{,yy} + 2N_{xy} w_{,xy}), \\ M_{x,x} + M_{xy,y} - Q_x = \rho h \alpha_{,t}, & M_{xy,x} + M_{y,y} - Q_y = \rho h \beta_{,t}, \end{cases} \quad (15)$$

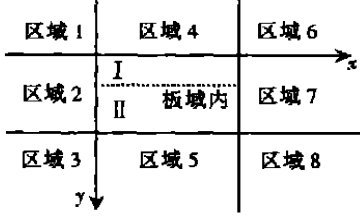


图1 弹性地基区域划分图

式中, N_x, N_y, N_{xy} 为板的薄膜内力, M_x, M_y, M_{xy} 为板的内力偶矩, Q_x, Q_y 为横向剪力, m_s 为地基振动的附加质量, 且

$$m_s = \int_{h/2}^H \rho_s \phi^2(z) dz$$

不计板域外地基的振动,则由变分式(9)可得板域外地基 ($x > a, x < 0, y > b, y < 0$) 的挠度控制方程为

$$K_f w - G_f \cdot \nabla^2 w = 0 \quad (16)$$

将板域外的弹性半空间按图1划分为8个区域,为使

弹性地基的沉陷能连续,分别取各区的挠度函数等于板边缘的挠度值乘一个指数衰减函数,即

$$\begin{cases} w_{a1}(x, y, t) = w_1(0, 0, t) e^{cx} e^{cy}, & \text{区域 1} (-\infty < x \leq 0, -\infty < y \leq 0), \\ w_{a2}(x, y, t) = [k_{c1} w_1(0, y, t) + k_{c2} w_2(0, y, t)] e^{cx}, & \text{区域 2} (-\infty < x \leq 0, 0 \leq y \leq b), \\ w_{a3}(x, y, t) = w_1(0, b, t) e^{cx} e^{-c(y-b)}, & \text{区域 3} (-\infty < x \leq 0, b \leq y < \infty), \\ w_{a4}(x, y, t) = w_1(x, 0, t) e^{cy}, & \text{区域 4} (0 \leq x \leq a, -\infty < y \leq 0), \\ w_{a5}(x, y, t) = w_2(x, b, t) e^{-c(y-b)}, & \text{区域 5} (0 \leq x \leq a, b \leq y < \infty), \\ w_{a6}(x, y, t) = w_2(a, 0, t) e^{-c(x-a)} e^{cy}, & \text{区域 6} (a \leq x < \infty, -\infty < y \leq 0), \\ w_{a7}(x, y, t) = [k_{c1} w_1(a, y, t) + k_{c2} w_2(a, y, t)] e^{-c(x-a)}, & \text{区域 7} (a \leq x < \infty, 0 \leq y \leq b), \\ w_{a8}(x, y, t) = w_2(a, b, t) e^{-c(x-a)} e^{-c(y-b)}, & \text{区域 8} (a \leq x < \infty, b \leq y < \infty), \end{cases} \quad (17)$$

由方程(16)可得 $c = \sqrt{K_f/G_f}$. 式中 w_1 和 w_2 分别是裂纹板区域 I 和 II 的挠度函数, k_{c1} 和 k_{c2} 是与板中裂纹位置有关的权重, $k_{c1} = y_1/b, k_{c2} = 1 - k_{c1}$.

在式(15)中略去面内惯性项 $u_{,tt}, v_{,tt}$ 的影响,引入应力函数 $\varphi(x, y)$, 令 $N_x/h = \varphi_{,yy}, N_y/h = \varphi_{,xx}, N_{xy}/h = -\varphi_{,xy}$, 则式(15)中第1、2式自动满足. 又由弹性板的应变与位移关系式,消去中面位移 u^0, v^0 后,利用板的应力与应变关系式和薄膜内力的表达式,可得应力函数 $\varphi(x, y)$ 应满足的相容方程:

引入如下无量纲参量:

$$\begin{cases} \xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad W = \frac{w}{h}, \quad \lambda = \frac{a}{b}, \quad \lambda_1 = \frac{h}{a}, \quad \lambda_2 = \frac{h}{b}, \quad G = \frac{12(1-\mu^2)a}{Eh^2} G_f, \\ K = \frac{12(1-\mu^2)a^3}{Eh^2} K_f, \quad s = \frac{h_1}{h}, \quad Q_0 = \frac{a^3}{D} q_0, \quad F = \frac{\varphi}{Eh^3}, \quad \lambda_3 = \frac{12(1-\mu^2)ah}{b^2}, \\ \lambda_4 = \frac{h^2}{5(1-\mu)b^2}, \quad K_1 = \frac{12a^3}{h^3} \left[1 + \frac{m_s}{\rho h} \right], \quad \tau = t \sqrt{\frac{E}{\rho h^2(1-\mu^2)}}, \end{cases} \quad (18)$$

式中, D 是板的弯曲刚度且 $D = Eh^3/12(1-\mu^2)$.

将无量纲参数代入式(15)的第3、4、5式,令 $q(x, y, t) = 0$, 同时将无量纲参数代入相容方程, 可得弹性地基上含裂纹中厚板的无量纲非线性自由振动的控制方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial^4 F_i}{\partial \xi^4} + 2\lambda^2 \frac{\partial^4 F_i}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \lambda^4 \frac{\partial^4 F_i}{\partial \eta^4} = \lambda^2 \left[\left(\frac{\partial^2 W_i}{\partial \xi \partial \eta} \right)^2 - \frac{\partial^2 W_i}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 W_i}{\partial \eta^2} \right], \\ \lambda^3 \left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 W_i}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 W_i}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial^2 F_i}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial^2 W_i}{\partial \xi \partial \eta} \right) + \frac{\partial^3 \alpha_i}{\partial \xi^3} + \lambda^2 \frac{\partial^3 \alpha_i}{\partial \xi \partial \eta^2} + \\ \lambda \frac{\partial^3 \beta_i}{\partial \xi^2 \partial \eta} + \lambda^3 \frac{\partial^3 \beta_i}{\partial \eta^3} - G \left(\frac{\partial^2 W_i}{\partial \xi^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2 W_i}{\partial \eta^2} \right) + K W_i = K_1 \frac{\partial^2 W_i}{\partial \tau^2}, \quad (i = 1, 2), \quad (19) \\ \lambda^4 \left(\frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial \xi^2} + \frac{(1-\mu)}{2} \frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial \eta^2} + \frac{(1+\mu)}{2\lambda} \frac{\partial^2 \beta_i}{\partial \xi \partial \eta} \right) - \alpha_i = \lambda_i \frac{\partial W_i}{\partial \xi}, \\ \lambda^4 \left(\frac{\partial^2 \beta_i}{\partial \eta^2} + \frac{(1-\mu)}{2\lambda^2} \frac{\partial^2 \beta_i}{\partial \xi^2} + \frac{(1+\mu)}{2\lambda} \frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial \xi \partial \eta} \right) - \beta_i = \lambda_2 \frac{\partial W_i}{\partial \eta}, \end{cases}$$

对四边自由中厚板, 其无量纲边界条件为

$$\begin{cases} \xi = 0, 1, \quad M_{1\xi} = M_{2\xi} = 0, \quad M_{1\xi\eta} = M_{2\xi\eta} = 0, \quad Q_{1\xi} = Q_{2\xi} = 0, \\ \quad \quad \quad F_{,1\eta} = F_{,2\eta} = 0, \quad F_{,1\xi\eta} = F_{,2\xi\eta} = 0; \\ \eta = 0, \quad M_{1\eta} = 0, \quad M_{1\eta\xi} = 0, \quad Q_{1\eta} = 0, \quad F_{,1\xi} = 0, \quad F_{,1\eta\xi} = 0, \\ \eta = 1, \quad M_{2\eta} = 0, \quad M_{2\eta\xi} = 0, \quad Q_{2\eta} = 0, \quad F_{,2\xi} = 0, \quad F_{,2\eta\xi} = 0 \end{cases} \quad (20)$$

裂纹处的连续条件为

$$\begin{cases} \eta = \eta_0, \quad M_{1\eta} = M_{2\eta}, \quad M_{1\eta\xi} = M_{2\eta\xi}, \quad Q_{1\eta} = Q_{2\eta}, \quad F_{,1\xi} = F_{,2\xi}, \quad F_{,1\eta\xi} = F_{,2\eta\xi}, \\ \eta = \eta_0, \quad W_{1\eta} = W_{2\eta}, \quad \alpha_{1\eta} = \alpha_{2\eta}, \quad \beta_{1\eta} - \beta_{2\eta} = \theta, \quad U_{1\eta} = U_{2\eta}, \quad V_{1\eta} - V_{2\eta} = \delta, \end{cases} \quad (21)$$

式中, θ 、 δ 分别是裂纹处附加转角和间断位移的无量纲表示。

设板中裂纹为横向表面贯穿裂纹, 裂纹处的物理性质用等效线弹簧模拟, 则裂纹处的附加转角和位移间断值与板中应力的关系为^[9]

$$\theta = -\frac{6h}{a} \alpha_{bb} \left[\lambda \frac{\partial \beta_1}{\partial \eta} + \mu \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi} \right], \quad \delta = -\frac{h}{a} \alpha_{bt} \left[\lambda \frac{\partial \beta_1}{\partial \eta} + \mu \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi} \right], \quad (22)$$

式中, α_{bb} 、 α_{bt} 为无量纲柔度系数, 其值取决于裂纹深度和板厚, 即

$$\alpha_{bb} = \int_0^s g_b^2 ds, \quad \alpha_{bt} = \int_0^s g_b g_t ds,$$

其中 g_b 和 g_t 为与裂纹深度 h_1 和板厚 h 的比值相关的无量纲函数($s = h_1/h$), 且

$$g_b = \sqrt{s} (1.99 - 2.47s + 12.97s^2 - 23.11s^3 + 24.80s^4),$$

$$g_t = \sqrt{s} (1.99 - 0.41s + 18.7s^2 - 38.48s^3 + 53.85s^4).$$

2 求解方法

通常将方程(19)的解的形式设定为下列分离函数形式

$$\begin{cases} F_i(\xi, \eta, \tau) = F_{mn}^{(i)}(\tau) F_i(\xi, \eta), \quad W_i(\xi, \eta, \tau) = W_{pq}^{(i)}(\tau) W_i(\xi, \eta), \\ \alpha_i(\xi, \eta, \tau) = \alpha_{pq}^{(i)}(\tau) \alpha_i(\xi, \eta), \quad \beta_i(\xi, \eta, \tau) = \beta_{pq}^{(i)}(\tau) \beta_i(\xi, \eta), \end{cases} \quad (i = 1, 2), \quad (23)$$

其中

$$W_1(\xi, \eta) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} (c_{1pq} \cos 2\pi p \xi + c_{2pq} \cos 2\pi q \eta + c_{3pq} \cos 2\pi p \xi \cos 2\pi q \eta) +$$

$$\begin{aligned}
& f_1 \left(\xi - \frac{1}{2} \right)^2 + f_2 \left(\eta - \frac{1}{2} \right)^2 + f_3 \left(\eta - \frac{1}{2} \right), \\
W_2(\xi, \eta) &= \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} (c_{1pq} \cos 2\pi p \xi + c_{2pq} \cos 2\pi q (1 - \eta) + c_{3pq} \cos 2\pi p \xi \cos 2\pi q (1 - \eta)) + \\
& f_1 \left(\xi - \frac{1}{2} \right)^2 + f_2 \left(\frac{1}{2} - \eta \right)^2 - f_3 \left(\frac{1}{2} - \eta \right), \\
\alpha_1 &= -\lambda_1 \frac{\partial W_1}{\partial \xi} + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} c_{4pq} \sin 2\pi p \xi \cos 2\pi q \eta, \\
\alpha_2 &= -\lambda_1 \frac{\partial W_2}{\partial \xi} + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} c_{4pq} \sin 2\pi p \xi \cos 2\pi q (1 - \eta), \\
\beta_1 &= -\lambda_2 \frac{\partial W_1}{\partial \xi} + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} c_{5pq} \cos 2\pi p \xi \sin 2\pi q \eta, \\
\beta_2 &= -\lambda_2 \frac{\partial W_2}{\partial \xi} + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} c_{5pq} \cos 2\pi p \xi \sin 2\pi q (1 - \eta), \\
F_1(\xi, \eta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\sin 2\pi m \xi)^2 [f_{1mn} (\sin 2\pi n \eta)^2 + f_{2mn} \eta^2 (1 - \eta)^2], \\
F_2(\xi, \eta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\sin 2\pi m \xi)^2 [f_{1mn} (\sin 2\pi n (1 - \eta))^2 + f_{2mn} \eta^2 (1 - \eta)^2],
\end{aligned}$$

式中系数 c_{ipq}, f_{imn} 为待定常数。将式(23)代入边界条件(20)和裂纹连续条件(21), 得一组代数方程, 求解方程, 可求得系数 c_{ipq} 和 f_{imn} , 它们与板的结构参数和裂纹参数相关。限于篇幅, 在此不予列出。

将式(23)代入方程组(19), 应用 Galerkin 法, 得到如下的仅含时间函数 $F_{mn}^{(i)}(\tau), W_{pq}^{(i)}(\tau), \alpha_{pq}^{(i)}(\tau), \beta_{pq}^{(i)}(\tau)$ 的非线性常微分方程组:

$$\begin{cases}
a_{1j}^{(i)mn} F_{mn}^{(i)}(\tau) = a_{2j}^{(i)pqt} W_{pq}^{(i)}(\tau) W_{st}^{(i)}(\tau), \\
a_{3j}^{(i)mnpq} F_{mn}^{(i)}(\tau) W_{pq}^{(i)}(\tau) + a_{4j}^{(i)pq} \alpha_{pq}^{(i)}(\tau) + a_{5j}^{(i)pq} \beta_{pq}^{(i)}(\tau) + \\
a_{6j}^{(i)pq} W_{pq}^{(i)}(\tau) = a_{7j}^{(i)pq} \dot{W}_{pq}^{(i)}(\tau), \\
a_{8j}^{(i)pq} \alpha_{pq}^{(i)}(\tau) + a_{9j}^{(i)pq} \beta_{pq}^{(i)}(\tau) = a_{10j}^{(i)pq} W_{pq}^{(i)}(\tau), \\
a_{11j}^{(i)pq} \alpha_{pq}^{(i)}(\tau) + a_{12j}^{(i)pq} \beta_{pq}^{(i)}(\tau) = a_{13j}^{(i)pq} W_{pq}^{(i)}(\tau)
\end{cases} \quad (i = 1, 2), \quad (24)$$

上式中 $a_{1jk}^{(i)mn}$ 和 $a_{13jk}^{(i)pq}$ 为常系数, 限于篇幅, 它们的计算式在此不予列出。

对于非线性自由振动, 常采用谐波平衡法求解上述含时间变量的方程组。为此, 将未知函数 $F_{mn}^{(i)}(\tau), W_{pq}^{(i)}(\tau), \alpha_{pq}^{(i)}(\tau), \beta_{pq}^{(i)}(\tau)$ 展开为时间 τ 的 Fourier 余弦级数:

$$\begin{cases}
F_{mn}^{(i)}(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} F_{mn}^{(ik)} \cos k \omega \tau, \quad W_{pq}^{(i)}(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} W_{pq}^{(ik)} \cos k \omega \tau, \\
\alpha_{pq}^{(i)}(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{pq}^{(ik)} \cos k \omega \tau, \quad \beta_{pq}^{(i)}(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{pq}^{(ik)} \cos k \omega \tau,
\end{cases} \quad (i = 1, 2), \quad (25)$$

式中系数 $F_{mn}^{(ik)}, W_{pq}^{(ik)}, \alpha_{pq}^{(ik)}, \beta_{pq}^{(ik)}$ 分别为相应未知函数的第 k 次谐波的幅值, ω 是板的无量纲非线性自由振动频率, 其与板的有量纲非线性自由振动圆频率 ω 相关, 且 $(\omega, \omega_0) = \sqrt{\rho h^2 (1 - \mu^2) / E} \cdot (\omega, \omega_0)$ 。而式中的 ω_0 和 ω_0 分别为相应情况下无量纲及有量纲的板的线性自由振动基频率。

将式(25)代入式(24),使方程中的每一项均化为余弦函数的1次幂,然后令相同余弦函数项的系数相等,得到一组关于系数 $F_{mn}^{(ik)}$ 、 $W_{pq}^{(ik)}$ 、 $\alpha_{pq}^{(ik)}$ 、 $\beta_{pq}^{(ik)}$ 和 ω 的非线性代数方程组。在算例中,在给定一组板和地基的有关参数以及 γ_d 和 ω 的一个初值,由式(14)得到地基参数 K_f 、 G_f 的初值,从而由式(24)得到一组 $F_{mn}^{(ik)}$ 、 $W_{pq}^{(ik)}$ 、 $\alpha_{pq}^{(ik)}$ 、 $\beta_{pq}^{(ik)}$ 的值,由此从式(23),求得 $W_i(\xi, \eta, \tau)$ 的值,将其代入板外8个区域的挠度函数表达式(17)中,则 $w_{ai}(i=1, \dots, 8)$ 的表达式可确定,然后可由式(12)求得一个新的 γ_d 值。如此循环反复计算,直至 $|(\gamma_d)_j - (\gamma_d)_{j-1}| \leq \varepsilon$ (ε 为计算精度)。则可得弹性地基上含裂纹中厚矩形板的非线性自由振动的幅频响应曲线。

3 数值结果与讨论

在数值计算中,设地基基层为普通粘性土,其密度为 $\rho_s = 1920 \text{ kg/m}^3$,弹性中厚板的参数为: $a = 1.8 \text{ m}$, $b = 1.5 \text{ m}$, $E = 3.0 \times 10^4 \text{ MPa}$, $\mu = 0.15$ 和 $\rho = 2450 \text{ kg/m}^3$ 。

若不考虑板的非线性影响,也不考虑板中裂纹影响(即裂纹位置 $\eta_0 = 0$),则问题蜕变为双参数地基上四边自由中厚矩形板的线性自由振动问题。表1为根据本文理论计算的基频和文献[10]的实验动测基频的对比。

表1 理论计算结果与实测结果对比

板号	板尺寸 $a \times b \times h$	文献[10]实测 基频 ω_e / (Hz)	本文模型		Winkler 模型	
			计算值 ω_e / Hz	相对误差 R_e / (%)	计算值 ω_e / Hz	相对误差 R_e / (%)
B01	1.8 × 1.5 × 0.1	52.371	56.472	7.83	46.27	11.64
B02	1.8 × 1.5 × 0.15	60.370	66.831	10.70	52.78	12.57

注: $a = a/m$, $b = b/m$, $h = h/m$; 相对误差 $R_e = \left[\frac{| \text{实测值 } \omega_e - \text{理论计算值 } \omega_e |}{\text{实测值 } \omega_e} \right] \times 100\%$

从表1可知,和Winkler地基模型相比较,本文计算结果和文献[10]的实测结果吻合得更好,说明本文所选试探函数和分析方法是合理的。

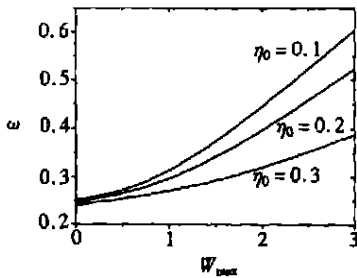


图2 裂纹位置对板的非线性幅频响应曲线的影响

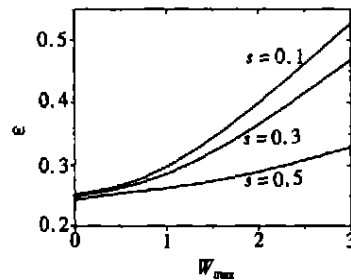


图3 裂纹深度对板的非线性幅频响应曲线的影响

在图2至图6中,分别显示了板中裂纹位置和裂纹深度以及板的结构参数(厚跨比 λ_1 、长宽比 λ) 和地基反应模量 K 变化对弹性地基上中厚矩形板非线性自由振动幅频响应曲线的影响。图中 ω 为板的无量纲非线性自由振动频率, W_{\max} 是板的无量纲最大振动幅值。

由这些图可知,在所有情况下,板的非线性自由振动频率均随板振幅的增加而显著增大,且呈典型的非线性硬弹簧特性。

由图2和图3可知,当板的振幅一定时,随着板中横向表面贯穿裂纹向板的横向对称面靠

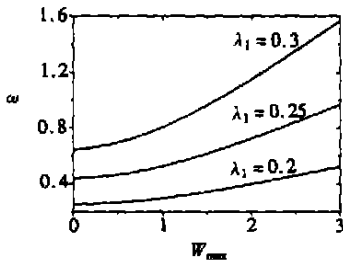


图 4 厚宽比对板的非线性幅频响应曲线的影响

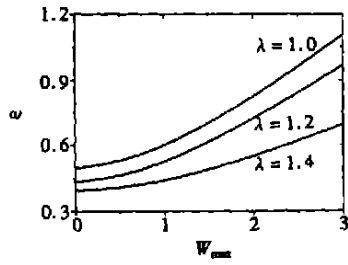


图 5 长宽比对板的非线性幅频响应曲线的影响

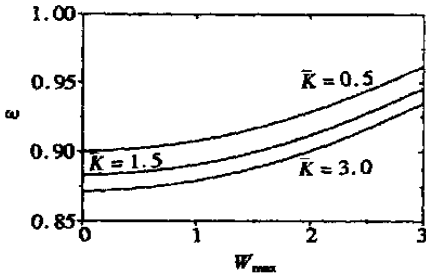


图 6 地基反应模量对板的非线性幅频响应曲线的影响

近,其非线性自由振动频率呈降低趋势,且振幅越大,下降得越多。当板的振幅一定时,随板中横向表面贯穿裂纹深度的增加,其非线性自由振动频率呈降低趋势,且振幅越大,下降得越多。

由图 4 和图 5 可看到,当板中裂纹位置和裂纹深度不变,且其振动幅值一定时,板的非线性自由振动频率随板厚(板长度 a 不变)的增加、长宽比的减小而呈增加的趋势,且板愈厚,振动频率增加的愈显著,即厚板的横向剪切效应的影响愈显著。图 6 显示了随着地基反应模量 K 增加,板的非线性自由振动频率也随之增加,但

增加得不十分明显。

4 结 论

本文探讨了裂纹位置、裂纹深度、板的几何参数和地基反应模量的变化对弹性地基上含裂纹中厚矩形板的非线性幅频响应的影响。

弹性地基上板的非线性自由振动频率随板振幅的增加而显著增大,且呈典型的非线性硬弹簧特性。板中横向表面贯穿裂纹的位置和深度对板的非线性自由振动特性有显著影响,当振幅一定时,随裂纹位置趋近于板的横向对称面和裂纹深度的增加,板的振动频率呈降低趋势,且振幅愈大,振动频率下降的幅度愈显著。板的厚度增大及长宽比减小时,弹性地基板的非线性自由振动的频率随之增高。弹性地基板非线性自由振动的频率随地基反应模量的增大而略有增加,但不显著。板的横向剪切变形对弹性地基中厚板的幅频响应有较显著的影响,但不会改变板的非线性自由振动的本质。

[参 考 文 献]

[1] Szilard R. Theory and Analysis of Plates Classical and Numerical Method [M]. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, Inc, 1974.

[2] Faw T F, Shi X P, Tan S A. Use of pasternak foundation in concrete pavement analysis[J]. Journal of Transportation Engineering, 1996(July/ Aug): 323—328.

[3] 李正良, 邓安福. 双参数地基上板弯曲问题的边界积分方程[J]. 应用数学和力学, 1992, 13(7): 633—643.

- [4] 王建国, 黄茂光. 双参数弹性地基板的边界元分析[J]. 土木工程学报, 1992, 25(3): 51—59.
- [5] Sonzogni V E, Idelsohn S R. Free vibration of rectangular plates of exponentially varying thickness and with a free edge[J]. Journal of Sound and Vibration, 1990, 140(3): 513—522.
- [6] Bhaskar A, Dumir P C. Nonlinear vibration of orthotropic thin rectangular plates on elastic foundations[J]. Journal of Sound and Vibration, 1988, 125(1): 1—11.
- [7] Saliba H T. Transverse free vibration of fully clamped symmetrical trapezoidal plates[J]. Journal of Sound and Vibration, 1988, 126(1): 237—247.
- [8] 梁兴复, 章权, 曲蕾, 等. 用伽辽金法解弹性地基上自由矩形板弯曲、稳定和振动问题[J]. 青岛建筑工程学院学报, 1994, 15(1): 6—12.
- [9] Khadem S E, Rezaee M. An analytical approach for obtaining the location and depth of an all-over part-through crack on externally in-plane loaded rectangular plate using vibration analysis[J]. Journal of Sound and Vibration, 2000, 230(2): 291—308.
- [10] 曾亚. 混凝土刚性路面板静、动力特性及损伤诊断研究[D]. 博士学位论文. 长沙: 湖南大学, 1998, 61—69.

Nonlinear Vibration for the Moderate Thickness Rectangular Cracked Plates Including the Coupled Effect of Elastic Foundation

XIAO Yong_gang^{1, 2}, FU Yi_ming¹, ZHA Xu_dong²

(1. Department of Engineering Mechanics, Hunan University,
Changsha 410082, P. R. China;

2. College of Bridge and Structure Engineering, Changsha University of
Science and Technology, Changsha 410076, P. R. China)

Abstract: Based on Reissner plate theory and Hamilton variational principle, the nonlinear equations of motion were derived for the moderate thickness rectangular plates with transverse surface penetrating crack on the two-parameter foundation. Under the condition of free boundary, a set of trial functions satisfying all boundary conditions and crack's continuous conditions were proposed. By employing the Galerkin method and the harmonic balance method, the nonlinear vibration equations were solved and the nonlinear vibration behaviors of the plate were analyzed. In numerical computation, the effects of the different location and depth of crack, the different structural parameters of plates and the different physical parameters of foundation on the nonlinear amplitude frequency response curves of the plate were discussed.

Key words: moderate thickness rectangular plate; elastic foundation; crack; nonlinear vibration