

文章编号: 1000-0887(2005) 08-0892-07

具有缺陷的不可压缩 neo-Hookean 球壳的动力学行为的定性分析*

袁学刚^{1,2}, 朱正佑¹, 程昌钧¹

(1. 上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072;
2. 烟台大学, 数学与信息科学系, 山东 烟台 264005)

(我刊编委程昌钧来稿)

摘要: 研究了一类具有缺陷的不可压缩超弹性材料球壳的径向对称运动问题, 该类材料可以看作是带有径向摄动的均匀各向同性不可压缩的 neo-Hookean 材料。得到了描述球壳内表面运动的二阶非线性常微分方程, 并给出了方程的首次积分。通过对微分方程的解的动力学行为的分析, 讨论了材料的缺陷参数和球壳变形前的内外半径的比值对解的定性性质的影响, 并给出了相应的数值算例。特别地, 对于一些给定的参数, 证明了存在一个正的临界值, 当内压与外压之差小于临界值时, 球壳内表面随时间的演化是非线性周期振动; 当内压与外压之差大于临界值时, 球壳的内表面半径随时间的演化将无限增大, 即球壳最终将被破坏。

关键词: 具有缺陷的不可压 neo-Hookean 材料; 动力学行为; 临界值; 非线性周期振动
中图分类号: O175; O343 **文献标识码:** A

引 言

在应用中, 材料内部空穴的生成、增长以及相邻空穴的贯通被认为是材料被破坏的先兆。这些现象的出现, 主要是由于材料的不稳定性引起的; 另一方面, 对于不同的材料和结构, 其力学行为也不尽相同。目前, 已有一系列的文章研究了超弹性材料和结构的不稳定性问题^[1~13]。Knowles^[10, 11]首先研究了各向同性的不可压缩超弹性材料组成的圆柱形管的振动问题, 并且根据材料的应变能函数给出了圆柱形管产生周期振动的条件以及振动周期的计算公式。此后, Guo 和 Sulecki^[12], Calderer^[13] 等人分别研究了各向同性的不可压缩超弹性材料球壳的有限振动问题, 并分析了球壳运动的动力学机理。

本文考虑了一类具有缺陷的不可压缩超弹性材料, 而该类材料可以看作是带有径向摄动的均匀各向同性的不可压 neo-Hookean 材料。用动力学观点研究该类材料组成的球壳的径向对称运动问题。给出了当球壳的内、外表面分别受到突加的死载荷作用时的控制方程组。利用边界条件求得了描述球壳内表面的径向对称运动的二阶非线性常微分方程, 并给出了方程的首次积分; 通过对微分方程的解的动力学行为的分析, 讨论了材料的缺陷参数以及变形前球

* 收稿日期: 2003_12_20; 修订日期: 2005_03_22

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10272069); 上海市重点学科资助项目

作者简介: 袁学刚(1971—), 男, 吉林人, 副教授, 博士(E-mail: yxg1971@163.com);
朱正佑(联系人, Tel: +86_21_56331454; E-mail: zhzheng@yc.shu.edu.cn)。

壳内外半径的比值对方程解的定性性质的影响,同时给出了数值算例和相应的数值例图。特别地,对于一些给定的参数,证明了存在一个正的临界值,当内压与外压之差小于这个临界值时,球壳内表面随时间的演化是非线性的周期振动;当内压与外压之差大于临界值时,球壳的内表面半径随时间的演化将无限增大,换句话说,球壳最终将被破坏。

1 控制方程组及求解

1.1 控制方程组的建立

假设球壳由不可压缩超弹性材料组成,考察球壳在内、外表面分别受到不同的突加死载荷作用时的径向对称运动。令球壳变形前所占的区域为 $D_0 \subset R^3$, 即

$$D_0 = \left\{ (R, \Theta, \Phi) \mid R_1 \leq R < R_2, 0 < \Theta \leq 2\pi, 0 \leq \Phi \leq \pi \right\}, \quad (1)$$

其中 R_1, R_2 分别为球壳的内、外半径。设变形前球壳中的点 (R, Θ, Φ) 在时刻 t 运动到点 (r, θ, ϕ) 。在球对称变形下,变形后的构形为

$$D = \left\{ (r, \theta, \phi) \mid r = r(R, t) > 0, R_1 < R < R_2; r(R_1, t) \geq 0; \theta = \Theta, \phi = \Phi \right\}, \quad (2)$$

其中 $r(R, t)$ 是待定的径向变形函数。根据球对称变形式(2),主伸长为

$$\lambda_1 = \frac{\partial r(R, t)}{\partial R}, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{r(R, t)}{R}. \quad (3a, b, c)$$

根据材料的不可压条件 $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$, 由式(3)可得

$$\frac{\partial r(R, t)}{\partial R} = \frac{R^2}{r^2(R, t)}. \quad (4)$$

不可压缩超弹性材料球壳的 Cauchy 应力分量为

$$\sigma_{rr}(r, t) = \lambda_1 \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} - p(r, t), \quad \sigma_{\theta\theta}(r, t) = \sigma_{\phi\phi}(r, t) = \lambda_2 \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} - p(r, t), \quad (5a, b, c)$$

其中 $p(r, t)$ 是随时间变化的静水压力,它是一个待求函数, $W = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 为不可压缩超弹性材料的应变能函数。

在忽略体积力时,描述球壳的径向运动的平衡微分方程可以约化为

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2}{r(R, t)} [\sigma_r(r, t) - \sigma_{\theta\theta}(r, t)] = \rho \dot{r}, \quad t \geq 0, \quad (6)$$

其中 ρ 是材料的密度。

下面给出问题的初始条件和边界条件。

假设球壳在 $t \leq 0$ 时刻处于未变形状态,因此它满足初始条件

$$r(R, 0) = R, \quad \dot{r}(R, 0) = 0. \quad (7a, b)$$

若球壳的内、外表面分别受到突加的死载荷 $p_1, p_2 > 0$ 的作用,则有边界条件

$$\sigma_r(r(R_1, t), t) = -p_1, \quad \sigma_r(r(R_2, t), t) = -p_2, \quad t \geq 0. \quad (8a, b)$$

方程(4)、(5)、(6)以及初始条件(7)和边界条件(8)组成了球壳在的突加死载荷作用下的径向对称运动的控制方程组。

1.2 控制方程组的解

对方程(4)关于 R 直接积分,得到

$$r = r(R, t) = [R^3 + r_1^3(t) - R_1^3]^{1/3}, \quad t \geq 0, \quad (9)$$

其中 $r_1(t)$ 是球壳内半径的径向变形函数。式(9)表示球壳中的任意一点的径向变形 $r(R, t)$ 均可由 $r_1(t)$ 表出。进一步地,由式(9)得到

$$\ddot{r} = 2r_1 r^{-5} (r^3 - r_1^3) (\dot{r}_1)^2 + \frac{2}{r_1 r^{-2}} \ddot{r}_1. \quad (10)$$

若将式(9)记为 $R = [r^3 - r_1^3(t) + R_1^3]^{1/3}$, 则主伸长(3)可记为

$$\lambda_1 = \left[1 - \frac{r_1^3 - R_1^3}{r^3} \right]^{2/3}, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \left[1 - \frac{r_1^3 - R_1^3}{r^3} \right]^{-1/3}. \quad (11a, b, c)$$

假设球壳是由一类具有缺陷的 neo-Hookean 材料组成, 它的应变能函数为^[2]

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0.5\mu[\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3 + \alpha(\lambda_1^2 - 1)^2], \quad (12)$$

其中 $\mu > 0$ 是无穷小变形的剪切模量, $\lambda_i (i = 1, 2, 3)$ 由式(3)给出, $\alpha \geq 0$ 是材料的无量纲径向缺陷参数. 若令 $\alpha = 0$, 则式(12)退化为均匀各向同性的 neo-Hookean 材料对应的应变能函数. 式(12)所对应的材料可以看作是一类带有径向缺陷的不可压广义 neo-Hookean 材料.

将式(9)、(10)和式(12)代入式(6), 然后将得到的结果关于 r 从 r_1 到 r 进行积分, 从而有

$$\sigma_{rr}(r, t) - \sigma_{rr}(r_1, t) + 2\mu \int_{r_1}^r \left\{ \lambda_1^2 [1 + 2\alpha(\lambda_1^2 - 1)] - \lambda_1 \right\} \frac{dr}{r} = \rho \left[\frac{1}{2} r^{-4} (r_1^4 - 4r^3 r_1 + 3r^4) (\dot{r})^2 + r^{-1} r_1 (r - r_1) \ddot{r}_1 \right]. \quad (13)$$

由式(5)和(13), 可得

$$p(r, t) = \mu \lambda_1^2 [1 + 2\alpha(\lambda_1^2 - 1)] + 2\mu \int_{r_1}^r \left\{ \lambda_1^2 [1 + 2\alpha(\lambda_1^2 - 1)] - \lambda_1 \right\} \frac{dr}{r} - \rho \left[\frac{1}{2} r^{-4} (r_1^4 - 4r^3 r_1 + 3r^4) (\dot{r})^2 + r^{-1} r_1 (r - r_1) \ddot{r}_1 \right] + p(r_1, t), \quad (14)$$

其中 $p(r_1, t)$ 可以通过在(5a)中令 $r = r_1$ 求得.

在式(13)中令 $r = r_2 = r(R_2, t)$, 并将式(11)代入到式(13), 则由边界条件(8)得到

$$p + 2\mu \int_{r_1}^{r_2} \left\{ \left[1 - \frac{r_1^3 - R_1^3}{r^3} \right]^{4/3} \left[1 + 2\alpha \left[\left(1 - \frac{r_1^3 - R_1^3}{r^3} \right)^{4/3} - 1 \right] \right] - \left[1 - \frac{r_1^3 - R_1^3}{r^3} \right]^{-2/3} \right\} \frac{dr}{r} = \rho \left[\frac{1}{2} r_2^{-4} (r_1^4 - 4r_2^3 r_1 + 3r_2^4) (\dot{r})^2 + r_2^{-1} r_1 (r_2 - r_1) \ddot{r}_1 \right], \quad (15)$$

其中 $r_2 = r(R_2, t) = [R_2^3 + r_1^3(t) - R_1^3]^{1/3}$, $p = p_1 - p_2$.

易见, 方程(15)是描述球壳内表面的径向变形函数 $r_1(t)$ 的一个二阶非线性常微分方程. 由前面的分析可知, 球壳的运动可以由微分方程(15)的解来描述. 下面对方程(15)进行动力学行为的分析.

2 方程(15)的动力学行为的分析

为了研究方便, 引入记号

$$x(t) = \frac{r_1(t)}{R_1}, \quad \delta = \frac{R_2^3}{R_1^3} - 1, \quad \xi = \left[1 - \frac{r_1^3 - R_1^3}{r^3} \right]^{-1/3}. \quad (16a, b, c)$$

由式(16)可以得到如下的关系式

$$\frac{r_2^3}{R_2^3} = \frac{\delta + x^3}{1 + \delta}, \quad \frac{r_1^3}{R_1^3} = 1 + \frac{\delta}{x^3}, \quad \frac{dr}{r} = \frac{\xi^{-1} d\xi}{1 - \xi^3}. \quad (17a, b, c)$$

根据式(9)和(16a), 初始条件(7)变为

$$x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (18a, b)$$

将式(16)和(17)代入到式(15), 得到

$$F(x, \delta) \dot{x} + G(x, \delta) x^2 + H(x, \delta, \alpha) - p = 0, \quad (19)$$

其中 $\delta > 0$ 是一个由式(16b)给定的参数, $\alpha \geq 0$ 是材料的径向缺陷参数,

$$F(x, \delta) = \rho R_1^2 x \left[1 - \left(1 + \frac{\delta}{x^3} \right)^{-1/3} \right], \quad (20a)$$

$$G(x, \delta) = \frac{1}{2} \mathcal{R} \mathcal{I}_1^2 \left[\left(1 + \frac{\delta}{x^3} \right)^{-4/3} - 4 \left(1 + \frac{\delta}{x^3} \right)^{-1/3} + 3 \right], \quad (20b)$$

$$H(x, \delta, \alpha) = 2\mu \int_{((x^3 + \delta)/(H + \delta))^{1/3}}^{\xi^{-5}/1 + 2\alpha(\xi^{-4} - 1) - \xi^6} \frac{d\xi}{1 - \xi^3}. \quad (20c)$$

下面研究方程(19)满足任意初始条件 $(x(0), x'(0)) = (x_0, x_0') \in (0, +\infty) \times R$ 的解的定性性质。

在方程两端乘以 x^2 , 然后关于 t 积分, 得到方程(19)的首次积分为

$$E = \frac{1}{2} x^2 F(x, \delta) x'^2 + V(x, p, \delta, \alpha), \quad (21)$$

其中 E 是与初始条件有关的常数, 称之为“能量常数”, 且 $V(x, p, \delta, \alpha)$ 为

$$V(x, p, \delta, \alpha) = \int_1^x x^2 H(x, \delta, \alpha) dx - \frac{1}{3} p (x^3 - 1). \quad (22)$$

此外, 由式(21)知, 若在 x 的某一区间 $[x_0, x]$ 内, $E - V(x, p, \delta, \alpha) > 0$, 则方程(19)的隐式解为

$$\pm \int_{x_0}^x \left(\frac{x^2 F(x, \delta)}{2(E - V(x, p, \delta, \alpha))} \right)^{1/2} dx = t - t_0, \quad (23)$$

其中 $x_0 = x(t_0)$ 为方程(19)的初始条件。

显然, 由式(22)可知, 对任意的 p, δ 及 α , 有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} V(x, p, \delta, \alpha) = +\infty$ 和 $V(1, p, \delta, \alpha) = 0$ 。

此外, 当 $p < 0$ 时, 有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} V(x, p, \delta, \alpha) = +\infty$; 当 $p > 0$ 时, 有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} V(x, p, \delta, \alpha) = -\infty$, 并且 $V(x, p, \delta, \alpha)$ 随着 p 的增加而减小。进一步地, 由式(22), 可以求得 $V_x(x, p, \delta, \alpha) = x^2(H(x, \delta, \alpha) - p)$ 。

由式(20c)知, 对任意给定的 $\alpha \geq 0, \delta > 0$, 当 $x \in (0, 1)$ 时, 有 $H_x(x, \delta, \alpha) > 0$ 恒成立, 即 $H(x, \delta, \alpha)$ 关于 x 单调增加, 并且有 $H(x, \delta, \alpha) < 0$; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, 有 $H(x, \delta, \alpha) > 0$, 且 $H(1, \delta, \alpha) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} H(x, \delta, \alpha) = 0$ 。可以验证, 对于给定的 $\alpha \geq 0, \delta > 0$, 方程 $H_x(x, \delta, \alpha) = 0$ 在 $x \in (1, +\infty)$ 内有唯一的实根, 即 $H(x, \delta, \alpha)$ 在 $x \in (1, +\infty)$ 内可以取得最大值, 记为 H_m , 取最大值的点记为 x_m 。此外, $H(x, \delta, \alpha)$ 在 $x \in (1, x_m]$ 单调增加, 在 $x \in [x_m, +\infty)$ 单调减少。

由上面的分析及式(22)知:

(i) 当 $x \in (0, 1)$ 时, 若 $p < 0$, 则 $V(x, p, \delta, \alpha)$ 有唯一的驻点, 记为 (x, p) , 并且容易验证 $V_{xx}(x, p, \delta, \alpha) > 0$, 因此这个驻点一定是 $V(x, p, \delta, \alpha)$ 的最小值点。此外, 由式(22), 不难验证有 $\lim_{x \rightarrow 0} V(x, p, \delta, \alpha) = +\infty$ 和 $V(1, p, \delta, \alpha) = 0$, 所以必有 $V(x, p, \delta, \alpha) < 0$ 。若 $p > 0$, 则 $V(x, p, \delta, \alpha)$ 没有驻点。

(ii) 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, 由于 $H(x, \delta, \alpha) > 0$, 并且存在一个最大值 H_m 。由式(22)可知, 若 $0 < p < H_m$, $V(x, p, \delta, \alpha)$ 有两个驻点; 若 $p < 0$ 或 $p > H_m$, $V(x, p, \delta, \alpha)$ 没有驻点。

取定 $\delta = 3, \alpha = 2$, 对于给定不同的 p 值, $V(x, p, \delta, \alpha)$ x 曲线的数值例图如图1所示。

对一些给定 p , 我们结合数值算例分别讨论方程(19)的解的定性性质(本文中所指的周期解均为古典意义下的周期解)。在下面的相图中, $v = \mathcal{R} \mathcal{I}_1 x'$ 。

对于不同的初始条件 $x(0) = x_0, x'(0) = x_0'$, 能量常数 E 可以由式(21)求得。特别地, 当初始条件为 $x(0) = 1, x'(0) = 0$ 时, 有 $E = 0$ 。

(a) $p > 0$ (即 $p_1 > p_2$)

由图1可见, 对于不同的 p 值, 方程(19)的解的性质是不同的。如取 $\delta = 3, \alpha = 2$, 当 $0 <$

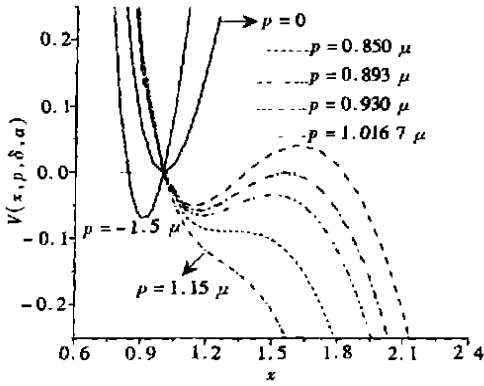


图 1 不同 p 值的 V_x 曲线图

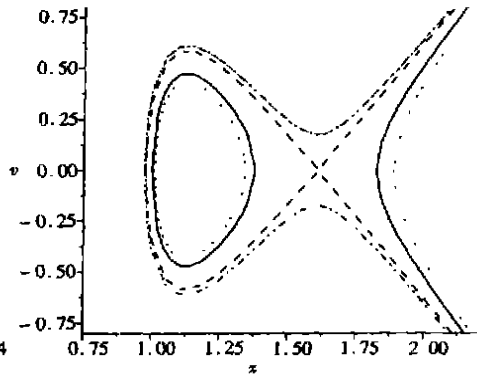


图 2 $0 < p < 0.893 \mu$ 时方程(19)的相图

$p < 0.893 \mu$ 时, 方程的相图如图 2 所示. 若方程的解满足初始条件 $x(0) = 1, x'(0) = 0$, 则有 $E = 0$, 并且解的运动轨线是光滑的闭凸轨线, 记为 Γ . 由此可以断定, 方程的解是周期解; 若初始条件属于 Γ 围成的区域内部, 则有 $E < 0$, 并且方程的解是周期解; 若初始条件属于 Γ 围成的区域的外部, 由图 2 可以看到, 当 $0 < E < E_1$ (其中 E_1 对应于 $V(x, p, \delta, \alpha)$ 的局部极大值) 时, 方程有周期解; 当 $E > E_1$ 时, 方程没有周期解. 当 $0.893 \mu < p < 1.0167 \mu$ 时, 方程的解的相图如图 3 所示, 对于初始条件 $x(0) = 1, x'(0) = 0$, 方程(19) 的相图由图 3 中的实线给出, 容易知道方程没有周期解; 而对于初始条件 $x(0) = x_0 < 1, x'(0) = x'_0$, 当 $E_2 < E < 0$ (其中 E_2 对应于 $V(x, p, \delta, \alpha)$ 的局部极大值) 时, 方程没有周期解; 当 $E_3 < E < E_2$ (其中 E_3 对应于 $V(x, p, \delta, \alpha)$ 的局部极小值) 时, 方程有周期解; 对于初始条件 $x(0) = x_0 > 1, x'(0) = x'_0$, 方程没有周期解. 当 $p > 1.0167 \mu$ 时, 对于任意的初始条件, 方程都没有周期解.

(b) $p < 0$ (即 $p_1 < p_2$)

由图 1 可见, 对于任意的初始条件, 方程(19) 的解的运动轨线均为闭凸轨线, 也就是说, 此时方程有满足任意初始条件的周期解.

(c) $p = 0$ (即 $p_1 = p_2$)

若方程(19) 的解满足初始条件 $x(0) = 1, x'(0) = 0$, 则有 $E = 0$, 此时方程的解为 $x(t) \equiv 1$; 若方程的解满足初始条件 $x(0) = x_0 \neq 1, x'(0) = x'_0$, 则有 $E > 0$, 并且方程有周期解.

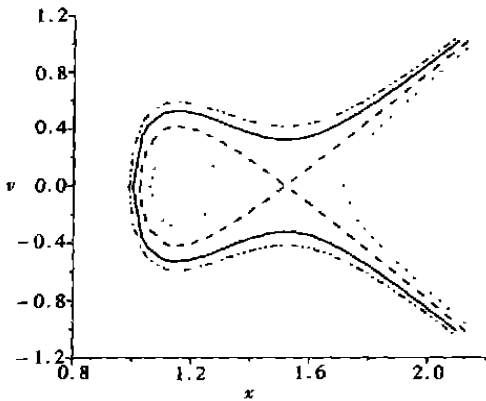


图 3 $0.893 \mu < p < 1.0167 \mu$ 时方程(19) 的相图

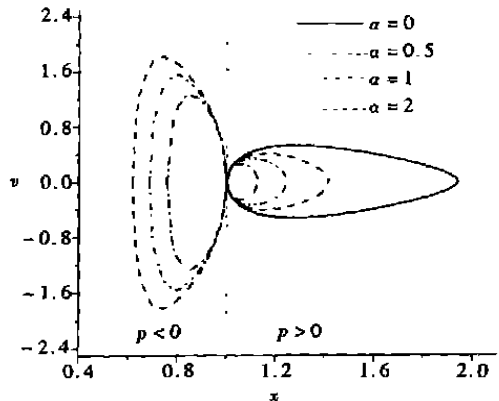


图 4 $\delta = 2$ 时球壳内表面周期振动的相图

值得指出的是, 若方程(19) 的解满足初始条件 $x(0) = 1, x'(0) = 0$, 则它可以描述球壳在

内、外表面分别受到突加载荷作用时,球壳内表面的径向运动。根据前面的分析可知,当 $p < 0$ 时,方程有周期解,即在初始时刻,有 $x(0) = 1, x'(0) = 0$,随着时间的增加, $x(t)$ 逐渐减小,而 $x'(t)$ 为正,并且它的值先增加然后减小,当 $x(t)$ 减小到的最小值时, $x'(t)$ 为零;然后随着时间的增加, $x(t)$ 逐渐增加, $x'(t)$ 为负值,当 $x(t)$ 达到 1 时, $x'(t)$ 为零。此后方程的解会进行周期性的循环,也就是说,在这种情形下,球壳的内表面会产生非线性的周期振动。对于给定的 $\delta > 0, p < 0$, 材料缺陷参数 α 取不同值时,球壳内表面振动的相图如图 4 所示。由图可见,随着 α 的增加,振动的振幅在不断地减小。对于给定的 $\alpha \geq 0, p < 0, \delta$ 取不同值时也有类似的情况发生。

当 $p > 0$ 时,方程(19)满足初始条件 $x(0) = 1, x'(0) = 0$ 的周期解是否存在(即球壳的内表面是否会产生周期振动)依赖于参数 δ, α 和 p 的值。如取 $\delta = 3, p = 0.5 \mu$ 时,对于不同的参数 α ,这时,球壳内表面的变化呈周期振动的状态,振动的相图如图 4 所示。然而当取 $\delta = 3, \alpha = 2, p = 0.93 \mu$ 时,方程的解 $x(t)$ 不是周期函数,并且随着时间的增大, $x(t)$ 无限增大,这表明随着时间的增大,这种材料组成的球壳最终将会被破坏,如图 3 中的实线所示。

以上是当 δ, α 给定, p 取不同值时,对方程(19)的解的性质的讨论。对于当 δ, p 给定, α 取不同值以及 α, p 给定, δ 取不同值时,对方程解的讨论与前面的类似,并且得到的结论也是类似的。

此外,图 4 示出了材料的缺陷参数对球壳内表面振动的影响。

3 结 论

本文中,通过对描述球壳运动的微分方程的动力学行为的分析,讨论了材料缺陷参数 α 、变形前球壳内外半径的比例参数 δ 以及死载荷 p (内压与外压之差)对方程解的定性性质的影响。当 $p < 0$ 时,对任意的参数 δ 和 α ,证明了微分方程有满足任意初始条件周期解;而当 $p > 0$ 时,微分方程的周期解的存在情况依赖于参数 δ, α 及 p 的取值。特别地,若方程的解满足初始条件 $x(0) = 1, x'(0) = 0$,则方程的解描述了球壳在内、外表面的载荷作用下的径向运动。讨论了当 p 不超过某个正的临界值时,材料的缺陷参数对球壳内表面产生周期振动的影响;当 p 超过临界值时,指出了对于某些给定的参数,球壳随时间的增长最终会被破坏。

[参 考 文 献]

- [1] Ball J M. Discontinuous equilibrium solutions and cavitations in nonlinear elasticity[J]. Philos Trans Roy Soc London, Ser A, 1982, 306(3): 557—610.
- [2] Polignone D A, Horgan C O. Cavitation for incompressible anisotropic nonlinearly elastic spheres[J]. Journal of Elasticity, 1993, 33(1): 27—65.
- [3] Horgan C O, Polignone D A. Cavitation in nonlinearly elastic solids: a review[J]. Applied Mechanics Review, 1995, 48(8): 471—485.
- [4] 任九生、程昌钧. 不可压超弹性材料中的空穴分叉[J]. 应用数学和力学, 2002, 23(8): 783—788.
- [5] REN Jiu_sheng, CHENG Chang_jun. Bifurcation of cavitation solutions for incompressible transversely isotropic hyper_elastic materials[J]. Journal Engineering Mathematics, 2002, 44(5): 245—257.
- [6] SHANG Xin_chun, CHENG Chang_jun. Exact solution for cavitated bifurcation for compressible hyper_elastic materials[J]. Internat J Engrg Sci, 2001, 39(12): 1101—1117.
- [7] YUAN Xue_gang, ZHU Zheng_you. Qualitative analyses of spherical cavity nucleation and growth for incompressible generalized Valanis_Landel hyperelastic material[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2004, 17(2): 158—165.

- [8] YUAN Xue_gang, ZHU Zheng_you, CHENG Chang_jun. Void Formation and growth for a class of compressible hyper_elastic sphere[J]. Journal of Shanghai University, 2004, **8**(1): 13—19.
- [9] YUAN Xue_gang, ZHU Zheng_you, CHENG Chang_jun. Cavitated formation and its vibration for a class of generalized incompressible hyper_elastic materials[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2004, **17**(4): 361—369.
- [10] Knowles J K. Large amplitude oscillations of a tube of incompressible elastic material[J]. Quart Appl Math, 1960, **18**(1): 71—77.
- [11] Knowles J K. On a class of oscillations in the finite deformation theory of elasticity[J]. J Appl Mech, 1962, **29**(3): 283—286.
- [12] Guo Z H, Solecki R. Free and forced finite amplitude oscillations of an elastic thick_walled hollow sphere made of incompressible material[J]. Arch Mech Stos, 1963, **15**(8): 427—433.
- [13] Calderer C. The dynamical behavior of nonlinear elastic spherical shells[J]. J Elasticity, 1983, **13**(1): 17—47.

Qualitative Analysis of Dynamical Behavior for an Imperfect Incompressible Neo-Hookean Spherical Shell

YUAN Xue_gang^{1, 2}, ZHU Zheng_you¹, CHENG Chang_jun¹

(1. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University,
Shanghai 200072, P. R. China ;

2. Department of Mathematics and Information Science, Yantai University,
Yantai Shandong 264005, P. R. China)

Abstract: The radial symmetric motion problem was examined for a spherical shell composed of a class of imperfect incompressible hyper_elastic materials, in which the materials may be viewed as the homogeneous incompressible isotropic neo-Hookean material with radial perturbations. A second_order nonlinear ordinary differential equation that describes the radial motion of the inner surface of the shell was obtained. And the first integral of the equation was then carried out. Via analyzing the dynamical properties of the solution of the differential equation, the effects of the prescribed imperfection parameter of the material and the ratio of the inner and the outer radii of the underformed shell on the motion of the inner surface of the shell were discussed, and the corresponding numerical examples were carried out simultaneously. In particular, for some given parameters, it was proved that, there exists a positive critical value, and the motion of the inner surface with respect to time will present a nonlinear periodic oscillation as the difference between the inner and the outer presses does not exceed the critical value. However, as the difference exceeds the critical value, the motion of the inner surface with respect to time will increase infinitely. That is to say, the shell will be destroyed ultimately.

Key words: imperfect incompressible neo-Hookean material; dynamical behavior; critical value; nonlinear periodic oscillation