

文章编号: 1000-0887(2005) 08-0929-08

惩罚函数法在三维等参杂交元的应用

陈道政¹, 焦兆平²

(1. 合肥工业大学 土木建筑工程学院, 合肥 230009;

2. 番禺职业技术学院, 广州 511483)

(顾元宪 推荐)

摘要: 提出在等参杂交元中用惩罚函数法引入平衡约束条件, 具体讨论了惩罚函数法在三维等参杂交元中的运用, 并提出采用分项罚数的方法, 建立最佳的罚平衡杂交元模型. 罚平衡法可以在不增加自由度的前提下, 有效地扼制寄生应力. 数值实验表明, 新建立的单元, 可以有效地抑制单元畸变对计算精度的影响, 从而大幅度提高畸变网格下的计算精度, 方法带有普遍性.

关键词: 杂交元; 平衡条件; 惩罚函数法

中图分类号: TU13; O302 **文献标识码:** A

引 言

自卞学璜教授 1964 年首次提出杂交元方法^[1]以来, 杂交元的研究和应用有了很大的发展, 近十几年, 卞学璜教授等人在利用非协调位移构造杂交元应力模式的研究中作出了重要的开创性工作^[2, 3]. 文献[4]进一步提出杂交元的优化设计概念, 建立了利用非协调位移构造杂交元应力模式的标准化方法. 以上各方法都是根据 Reissner 原理, 通过引入非协调位移使应力分量满足积分意义下的平衡约束(或优化条件), 从而获得相应的最佳应力模式.

本文提出用惩罚函数法引入应力平衡的约束条件, 原则上不需要引入非协调位移, 大大简化了分析过程, 并提出了对应力平衡约束采用分项罚数, 并建议了选择罚数的基本原则. 由此建立的单元模型不破坏原有应力模式的对称性和不变性, 对任意网格均可通过分片检验. 计算实例表明: 本方法可以有效地抑制单元畸变对数值精度的影响. 文献[5]已对平面四边形等参杂交元进行详细讨论, 取得较为理想的结果, 本文将对三维等参杂交中采用惩罚函数法进行研究.

1 罚函数法及单元的收敛性

Hellinger_Reissner 原理的泛函表达式为:

$$(e) = \int_v \left[-\frac{1}{2} {}^T S + {}^T (L u_q) - u^T (L^T) \right] dv, \quad (1)$$

式中 σ 为单元应力向量; S 为弹性矩阵; L 为应变算子; u_q 为单元协调位移; u 为单元非协调

收稿日期: 2004_04_16; 修订日期: 2005_03_29

作者简介: 陈道政(1964), 男, 安徽肥东人, 副教授, 博士(联系人. Tel: + 86_551_3248344; Fax: + 86_551_2848037; E_mail: cdztai@163.com)

位移 若在杂交元中, 选择应力模式满足平衡条件, 则(1)式右边第3项消失, (1)式变为:

$${}^{(e)} = \int_{V_e} \left[-\frac{1}{2} \mathbf{T}^T \mathbf{S} + \mathbf{T}^T (\mathbf{L} \mathbf{u}_q) \right] dv, \tag{2}$$

上式不含非协调位移, 由此可以方便地建立杂交元模型 但大量计算实例表明, 当单元有畸变时, 严格满足平衡条件的应力模式计算精度并不好 因而近年来的研究通常不采用严格满足平衡条件的应力模式, 这样泛函(1)式中保留了非协调位移项 文献[3]、[4]分别从(1)式出发导出了新的杂交元模型 数值计算表明, 考虑非协调位移后可以有效地改善单元的性能

泛函(1)可以看作是以非协调位移 \mathbf{u} 作为拉氏乘子来解除应力平衡约束, 这是变分原理中的常用做法 由于引入了非协调位移参数, 分析过程变得较为复杂, 本文放弃这一分析途径, 运用惩罚函数法引入平衡约束, 相应的泛函式可写成:

$${}^{(e)} = \int_{V_e} \left[-\frac{1}{2} \mathbf{T}^T \mathbf{S} + \mathbf{T}^T (\mathbf{L} \mathbf{u}_q) - (\mathbf{L}^T \mathbf{T})^T (\mathbf{L}^T \mathbf{T}) \right] dv, \tag{3}$$

式中 α 是罚数 显然, 当 α 值足够大时, 应力平衡条件将得到较好的满足 由于惩罚函数法不引进任何新的未知参数, 分析过程将大为简化

应该指出, 惩罚函数法通常是用于极值问题, 根据(3)式建立的多变量杂交元对应的驻值问题, 本文的工作表明, 只要罚数选择恰当, 这种方法用于杂交元也会取得成功 注意到当单元处于常应力状态时, (1)式、(3)式右边的第3项自动消失 因为(1)式、(3)式中第3项仅与高阶应力和高阶位移有关, 当高阶应力不满足平衡约束时, 在(1)式、(3)式中加上或减去右边第3项都不影响数值解的收敛性, 因而按(3)式建立的杂交元模型必然通过分片检验

2 应力模式和罚数

以下对三维八结点单元(图1)进行讨论

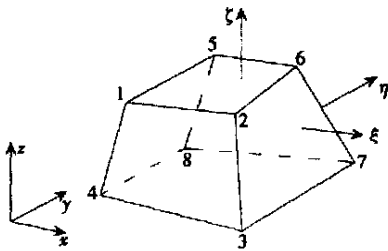


图1 三维八节点单元

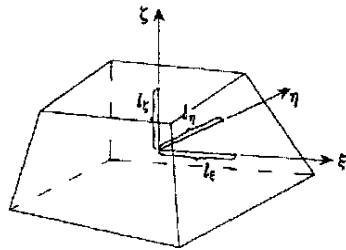


图2 单位长度示意图

三维八结点等参元协调位移场为:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}, \tag{4}$$

式中

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi_i)(1 + \eta_i)(1 + \zeta_i); \tag{5}$$

坐标的等参变换式为:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}, \tag{6}$$

或表示成:

$$\begin{cases} x = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \\ y = b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 + b_7 \\ z = c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 + c_7 \end{cases}, \tag{7}$$

应力分量可分为常应力和高阶应力两部分:

$$= \begin{bmatrix} x & y & z & yz & xz & xy \end{bmatrix}^T = \sigma_0 + \sigma_h = \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 & \mathbf{P}_h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ h \end{Bmatrix}, \tag{8}$$

其中常应力:

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \mathbf{P}_0 \sigma_0, \tag{9}$$

高阶应力可以有多种选择方案 对三维八结点, $n_q = 3 \times 8 = 24$, $n_G = 6$, 最佳应力场自由度数目为: $n = 24 - 6 = 18$ 文献[6]运用优化方法得到了具有显式表达的18自由度优化应力模式

$$= \sigma_0 + \mathbf{P}_1 \sigma_1 + \mathbf{P}_2 \sigma_2 + \mathbf{P}_3 \sigma_3 + \mathbf{P}_4 \sigma_4 = \mathbf{P}, \tag{10}$$

式中

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \begin{Bmatrix} 1 \\ \\ 6 \end{Bmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{Bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{Bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{Bmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{Bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{Bmatrix} 13 \\ 14 \\ 15 \end{Bmatrix}, \quad \sigma_4 = \begin{Bmatrix} 16 \\ 17 \\ 18 \end{Bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} x & y & z & yz & xz & xy \end{bmatrix}^T, \end{aligned}$$

$$[\mathbf{P}_1 \quad \mathbf{P}_2 \quad \mathbf{P}_3 \quad \mathbf{P}_4] =$$

$$\begin{bmatrix} j_{21}^2 & j_{31}^2 & 2j_{21}j_{31} & j_{22}^2 & 0 & 0 & j_{33}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ j_{11}^2 & 0 & 0 & j_{12}^2 & j_{32}^2 & 2j_{12}j_{32} & 0 & j_{23}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j_{11}^2 & 0 & 0 & j_{22}^2 & 0 & j_{13}^2 & j_{23}^2 & 2j_{13}j_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j_{11}^2 & 0 & -j_{22}j_{32} & -j_{12}j_{22} & 0 & -j_{22}j_{33} & -j_{13}j_{33} & 0 & 0 \\ 0 & -j_{12}j_{31} & -j_{11}j_{21} & 0 & 0 & j_{22}^2 & -j_{13}j_{33} & 0 & -j_{23}j_{33} & 0 & 0 \\ -j_{12}j_{21} & 0 & -j_{11}j_{31} & -j_{12}j_{22} & 0 & -j_{22}j_{32} & 0 & 0 & j_{23}^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

以及确定 j_{hl} 的表达式^[5], 其中:

$$\mathbf{J}_0^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{J}_0|} \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} \end{bmatrix} \tag{11}$$

记

$$\mathbf{J}^{-1} = \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix},$$

所以

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{pmatrix} - \\ - \\ - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11} - + d_{12} - + d_{13} - \\ d_{21} - + d_{22} - + d_{23} - \\ d_{31} - + d_{32} - + d_{33} - \end{pmatrix}; \tag{12}$$

$$\mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} \bar{x} & 0 & 0 & 0 & \bar{z} & \bar{y} \\ 0 & \bar{y} & 0 & \bar{z} & 0 & \bar{x} \\ 0 & 0 & \bar{z} & \bar{y} & \bar{x} & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{L}^T + \mathbf{L}^T + \mathbf{L}^T = \mathbf{D}_1 - + \mathbf{D}_2 - + \mathbf{D}_3 - ,$$

其中

$$\mathbf{D}_i = \begin{bmatrix} d_{1i} & 0 & 0 & 0 & d_{3i} & d_{2i} \\ 0 & d_{2i} & 0 & d_{3i} & 0 & d_{1i} \\ 0 & 0 & d_{3i} & d_{2i} & d_{1i} & 0 \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, 3) \tag{13}$$

在杂交元中, 当平衡条件不能严格满足时, 不同方向的不平衡力将随着单元的形状、畸变程度对解答产生不同的影响。如果由单一的罚数来控制平衡约束, 这意味着对不同方向的不平衡力施加了同一程度的约束, 这样做不能有效地控制应力分量中不同成份对单元形状改变所产生的不同程度的影响。因此本文放弃单一罚数的做法, 而采用以下的分项罚数方法。采用罚函数后的单元泛函:

$$\begin{aligned} (e) = & \int_{V_e} \left[-\frac{1}{2} \mathbf{T}^T \mathbf{S} + \mathbf{T}^T (\mathbf{L} \mathbf{u}_q) - \frac{1}{2} (\mathbf{L}^T)^T (\mathbf{L}^T) - \right. \\ & \left. \frac{1}{2} (\mathbf{L}^T)^T (\mathbf{L}^T) - \frac{1}{2} (\mathbf{L}^T)^T (\mathbf{L}^T) \right] dv, \end{aligned} \tag{14}$$

注意到:

$$\mathbf{L}^T = \mathbf{D}_1 \mathbf{P}_{1-1+} + \mathbf{D}_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad 4 = \mathbf{A}_{1-1+} + \mathbf{D}\mathbf{P}_{1-4}, \tag{15}$$

$$\mathbf{L}^T = \mathbf{D}_2 \mathbf{P}_{2-2+} + \mathbf{D}_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad 4 = \mathbf{A}_{2-2+} + \mathbf{D}\mathbf{P}_{2-4}, \tag{16}$$

$$\mathbf{L}^T = \mathbf{D}_3 \mathbf{P}_{3-3+} + \mathbf{D}_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad 4 = \mathbf{A}_{3-3+} + \mathbf{D}\mathbf{P}_{3-4} \tag{17}$$

把(15)式、(16)式、(17)式代入(14)式得:

$$(e) = \frac{1}{2} \mathbf{T}^T \mathbf{H}_0 + \mathbf{T}^T \mathbf{G} - \frac{1}{2} \mathbf{T}^T \mathbf{H}_1 - \frac{1}{2} \mathbf{T}^T \mathbf{H}_1 - \frac{1}{2} \mathbf{T}^T \mathbf{H}_1 =$$

$$\text{其中 } \begin{cases} -\frac{1}{2} \mathbf{H}^T \mathbf{H} + \mathbf{G}^T \mathbf{G}, \\ = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 4]^T \end{cases} \quad (18)$$

由 $(e)/ = 0$ 得:

$$\begin{aligned} &= \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}, \quad \mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{G}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}, \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}_0 + 2_1 \mathbf{H}_1 + 2_2 \mathbf{H}_1 + 2_3 \mathbf{H}_1, \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0 &= \int_V \mathbf{P}^T \mathbf{S} \mathbf{P} dv = \int_V \{ [\mathbf{P}_0 | \mathbf{P}_n]^T \mathbf{S} [\mathbf{P}_0 | \mathbf{P}_n] \} dv = \begin{bmatrix} \mathbf{S} V_e & \mathbf{H}_2 \\ \mathbf{H}_2^T & \mathbf{H}_1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{H}_1 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 6} & \mathbf{0}_{6 \times 12} \\ \mathbf{0}_{12 \times 6} & \overline{\mathbf{H}}_{1(12 \times 12)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \overline{\mathbf{H}}_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \overline{\mathbf{H}}_1 \end{bmatrix}, \\ \overline{\mathbf{H}}_1 &= \int_V \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1 & 0 & 0 & \mathbf{A}_1^T \mathbf{D} \mathbf{P}_1 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ & & & \mathbf{D} \mathbf{P}_1^T \mathbf{D} \mathbf{P}_1 \end{bmatrix} dv, \quad \overline{\mathbf{H}}_1 = \int_{V_e} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_2 & 0 & \mathbf{A}_2^T \mathbf{D} \mathbf{P}_2 \\ & & 0 & 0 \\ & & & \mathbf{D} \mathbf{P}_2^T \mathbf{D} \mathbf{P}_2 \end{bmatrix} dv, \\ \overline{\mathbf{H}}_1 &= \int_{V_e} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & \mathbf{A}_3^T \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_3^T \mathbf{D} \mathbf{P}_3 \\ & & & \mathbf{D} \mathbf{P}_3^T \mathbf{D} \mathbf{P}_3 \end{bmatrix} dv, \end{aligned}$$

所以

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{D} \mathbf{P}_1 &= \mathbf{D}_1 - \mathbf{P}_4 = \mathbf{D}_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{21} & 0 \\ 0 & 0 & d_{31} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{D} \mathbf{P}_2 &= \mathbf{D}_2 - \mathbf{P}_4 = \begin{bmatrix} d_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{32} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{D} \mathbf{P}_3 &= \mathbf{D}_3 - \mathbf{P}_4 = \begin{bmatrix} d_{13} & 0 & 0 \\ 0 & d_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \end{aligned} \right. \quad (19)$$

罚平衡项为:

$$\int [{}_1(\mathbf{L}^T)^T(\mathbf{L}^T) + {}_2(\mathbf{L}^T)^T(\mathbf{L}^T) + {}_3(\mathbf{L}^T)^T(\mathbf{L}^T)] dv \quad (20)$$

当 ${}_1, {}_2, {}_3$ 取不同值时, 上式反映了不同方向的不平衡力受到不同程度约束。选择罚函数 i 时应注意以下几点: 1) $i (i = 1, 2, 3)$ 不能同时取得极大。因为所给定的应力场中, 一般单元形状下高阶应力不满足平衡条件, 当 i 同时趋于无穷大, 在理论上将迫使全部高阶应力趋于零, 这将导致单元蜕化为常应力元; 另一方面, 当单元畸变时, 各 i 的数值应能迅速拉开, 否则不能有效地体现不同方向的不同程度的约束。2) (10) 式高阶应力模式具有对称性和不变性, 引入罚平衡项后不应破坏这些特性。3) 在结构分析中若事先知道应力梯度的大致方向, 则通

常在网格划分时,沿梯度方向网格划分较密 引入罚平衡约束后,应该使应力场沿单元短边方向的线性变化规律不遭破坏 4) 罚平衡项与(14)式右边第1项因次要统一 基于上述原则,本文罚数取为:

$$A = K \frac{V}{EL} \left(\frac{l_i^2}{l^2} \right)^2, \tag{21}$$

其中

$$l_1^2 = l_N^2 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2; l_2^2 = l_G^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2;$$

$$l_3^2 = l_F^2 = a_3^2 + b_3^2 + c_3^2; l = (l_N + l_G + l_F) / 3$$

式(21)所给的罚数具有对称性,并且 l_N, l_G, l_F, V 均是等参坐标下单元的几何特征值,不随单元的平移、旋转而改变# 因而可以预见到单元将保留对称性、不变性的特点,这已被计算实例所证实# 单元体积的近似值为: $V = 8 l_N l_G l_F$ 其中 l_N, l_G, l_F 为单元 3 个方向的特征长度(图 2),由于特征长度是单元固有几何特性值,不随单元的平移、旋转而改变,因而由此确定的罚数不会破坏单元的不变性与对称性#

3 数值算例

在下面算例中, $18B_{-}$ 为 Irons 给出 18B 杂交应力元; $18B_{-}$ 为文献[6] 给出 18B 优化杂交应力元(即式(10) 应力模式); Q_8 为 8 结点三维等参协调元; $18B_{-p}$ 为本文罚平衡杂交应力元#

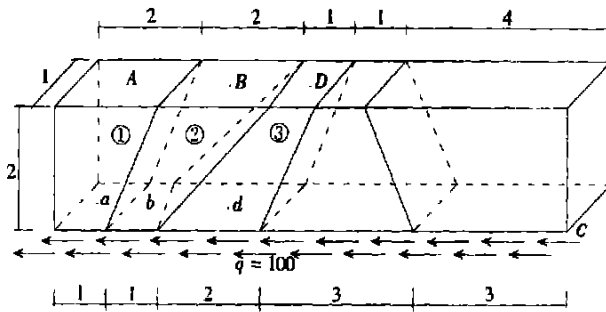


图 3 悬臂梁单元划分及受力情况

例 1 图 3 为悬臂梁底面受分布剪力作用下的单元划分,计算结果见表 1# 其中 A、B、D 和 a、b、d 分别为 1、2、3 单元的上、下四边形中心(左端为悬臂梁固定端,右端为自由端, $E = 1500, L = 0.25$),下表 1 中, u_C 为 C 点 x 轴方向的位移, v_C 为 C 点 y 轴方向的位移, R_A 为 A 点 x 轴方向的应力,余同#

表 1 悬臂梁底受均布荷载作用下的计算结果

单元	u_C	v_C	R_{xA}	R_{xB}	R_{xD}	R_{xa}	R_{xb}	R_{xd}
Q_8 元	- 4.01	14.57	297.05	14.19	160.64	- 1554.00	- 974.15	- 506.10
$18B_{-}$	- 5.57	- 27.04	839.65	502.58	438.18	- 1811.72	- 1426.97	- 1058.19
$18B_{-}$	- 6.55	- 32.98	1668.88	1441.24	328.49	- 1393.18	- 1251.25	- 1900.54
$18B_{-p}$	6.70	- 33.58	953.95	804.04	709.54	- 1901.98	- 1703.53	- 1386.08
精确解	- 6.667	- 33.17	900.00	700.00	550.00	- 1900.00	- 1700.00	- 1440.00

例 2 如图 4 所示的悬臂梁,单元结点划分在梁体内,试验本文单元的性能及应力分布情况# 单元划分及受荷情况如图 4 所示# 试验结果表明:当该梁在工况 1(纯拉)作用下,可得 u_7

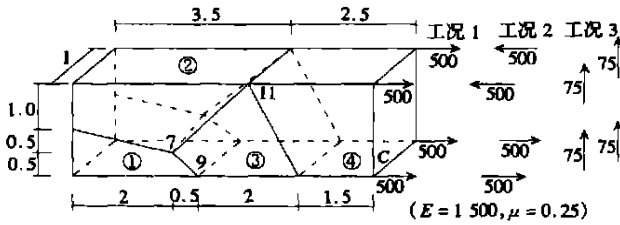


图4 划分成4个单元后的悬臂梁

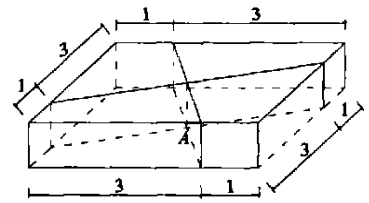


图5 方板模型的网格划分

$= 1.3333 = u_7^*$, $u_9 = 1.6667 = u_9^*$, $u_{11} = 2.3333 = u_{11}^*$, $R_{7x} = R_{9x} = R_{11x} = R_w^* = 100010$ 均为精确解, 则该单元通过分片检验# 该梁在工况 2, 工况 3 作用的情况见表 2#

表 2 悬臂梁在各工况作用下的位移和应力

单元	工况 2			工况 3		
	v_A	R_{x1}	R_{x2}	v_A	R_{x1}	R_{x2}
Q ₈ 元	16.86	798.81	-509.12	10.88	542.50	-148.52
18B ₋	23.17	1449.04	-929.19	14.26	1023.22	-557.81
18B ₋	26.53	1679.53	-909.01	16.31	1188.47	-559.74
18B _{-p}	28.62	1867.26	-1251.07	18.15	1373.29	-763.80
精确解	36.00	1875.00	-1125.00	21.38	1371.10	-780.47

注 R_{x1}, R_{x2} 分别为 1, 2 单元形心处的应力 ($N = 0, G = 0, F = 0$); v_A 为 A 点 z 轴方向的位移

例 3 图 5 为已知矩形板, 受到横向分布荷载作用, 分别考察其在均布荷载 $q = 1$ 作用下各单元, 求出其中心挠度和中心拉应力# 已知板的边长为 $4@4$, 板厚为 0.4, $E = 10.92@10^6$, $L = 0.3$, 计算结果见表 3, 网格划分见图 5#

表 3 固支矩形板在均布荷载作用下的中心挠度 w_C 及中点拉应力 R_{xC}

单元	Q ₈	18B ₋	18B ₋	18B _{-p}	精确解
w_C	$0.242@10^{-5}$	$0.557@10^{-5}$	$0.549@10^{-5}$	$0.577@10^{-5}$	$0.599@10^{-5}$
R_{xC}	8.273	6.598	13.043	14.325	13.860

从例 1、例 2、例 3 可以看出本文的所构造的单元求出的结果明显优于其它几种单元, 计算结果接近精确解#

4 结 论

惩罚函数法用于杂交元, 提供了一个改善单元性能的简便可靠而有效的途径# 本文所建立的罚平衡三维杂交应力元 18B_{-p} 在原来的八结点三维杂交优化单元基础上, 通过附加不平衡力的分项惩罚项, 有效地抑制了畸变网格时的畸生应力的产生, 较大幅度地改善了计算精度; 同时本文方法不破坏原来单元的基本特性, 不引入任何新的单元自由度, 因而生成单元刚度的时间与原单元相差无几# 本文作了大量的数值实验, 结果表明: 该单元是一种较为理想的优质单元, 方法带有普遍性#

[参 考 文 献]

[1] Pain T H H. Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distribution[J]. AIAA J, 1964, 2(2): 1333) 1336.

- [2] Pain T H H, Chen D P. Alternative ways for formulation of hybrid stress elements[J]. Internat J Numer Meth Engrg, 1982, **18**(11): 1679) 1684.
- [3] Pain T H H, Sumihara K. Rational approach for assumed stress finite elements[J]. Internat J Numer Meth Engrg, 1984, **20**(9): 1685) 1695.
- [4] 吴长春,狄生林,黄茂光.杂交元的优化设计[J].科学通报,1986, **15**(31): 1142) 1144.
- [5] 焦兆平.罚函数法在等参杂交元中的应用[J].合肥工业大学学报,1991, **14**(1): 86) 95.
- [6] 焦兆平,吴长春.三维等参杂交元的优化设计[J].工程力学,1988, **5**(2): 10) 20.
- [7] 吴长春,卞学璜.非协调数值分析与杂交元方法[M].北京:科技出版社,1997.
- [8] WU Chang_chun, Bufler H. Multivariable finite elements: consistency and optimization[J]. Science in China, Ser A, 1991, **34**(2): 284) 299.

A p p l i c a t i o n o f P e n a l t y F u n c t i o n M e t h o d i n I s o p a r a m e t r i c
H y b r i d F i n i t e E l e m e n t A n a l y s i s

CHEN Dao_zheng¹, JIAO Zhao_ping²

(1. College of Civil and Architectural Engineering, Hefei University of Technology,
Hefei 230009, P. R. China;

2. Panyu Vocational Technology College, Guangzhou 511483, P. R. China)

Abstract: By aid of the penalty function method, the equilibrium restriction conditions were introduced to the isoparametric hybrid finite element analysis, and the concrete application course of the penalty function method in three_dimension isoparametric hybrid finite element was discussed. The separated penalty parameters method and the optimal hybrid element model with penalty balance were also presented. The penalty balance method can effectively refrain the parasitical stress on the premise of no additional degrees of freedom. The numeric experiment shows that the presented element not only is effective in improving greatly the numeric calculation precision of distorted grids but also has universality.

Key words: hybrid element; equilibrium restriction condition; penalty function method