应用数学和力学, 第 26 卷 第 8 期(2005 年 8 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2005) 08_0945_06

带随机跳跃的线性二次非零和微分对策问题*

吴 臻, 于志勇

(山东大学 数学与系统科学学院, 济南 250100)

(我刊原编委林宗池推荐)

摘要: 对于一类以布朗运动和泊松过程为噪声源的正倒向随机微分方程, 在单调性假设下, 给出了解的存在性和唯一性的结果• 然后将这些结果应用于带随机跳跃的线性二次非零和微分对策问题之中, 由上述正倒向随机微分方程的解得到了开环 Nash 均衡点的显式形式•

关 键 词: 随机微分方程; 泊松过程; 随机微分对策

中图分类号: O211.63;TM571.62 文献标识码: A

引 言

当我们运用随机最大值原理解决最优控制问题或在金融数学中考虑大户投资者在证券市场中的作用时, 经常会遇到完全耦合的正倒向随机微分方程• 对于一个任意的时间区间上的完全耦合的正倒向随机微分方程, 运用偏微分方程的方法, Ma, Protter 和 Yong[1] 得到了存在性和唯一性的结果• 运用概率的方法, Hu 和 Peng[2], Peng 和 Wu[3] 在适当的单调性假设下, 得到存在唯一性结果• Yong[4] 将这种方法系统化, 称之为“连续性方法”•

Tang 和 Li[5] 首先研究了带泊松过程的倒向随机微分方程, Situ[6] 在倒向随机微分方程的系数是非 Lipschitz 连续的条件下, 得到了一个存在唯一性的结果• Wu[7] 在一定的单调性假设下, 得到了泊松过程驱动的正倒向随机微分方程存在唯一性结果, 此时方程中的随机过程是带随机跳跃的不连续过程• 下一节中, 我们在另一种适合于非零和微分对策问题的单调性假设下, 给出另一个存在唯一性的结果•

微分对策问题吸引了很多的学者去研究, 包括 Friedman[8], Bensoussan[9], Eisele[10] 等• 对于不含随机跳跃的随机情形, Hamadène[11] 在一定的假设下, 给出 Nash 均衡点的一个存在性结果• 在第 2 节中, 我们研究带随机跳跃的线性二次非零和随机微分对策问题, 运用第 1 节的结果, 我们给出这类随机微分对策问题 Nash 均衡点的显式形式•

---

* 收稿日期: 2003_06_10; 修订日期: 2005_03_20
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10371067); 教育部优秀青年教师资助计划项目(2057); 教育部博士点基金资助项目(20020422020); 霍英东高校教师基金资助项目(91064)
作者简介: 吴臻(1971—), 男, 山东济南人, 教授, 博士(联系人. Tel: + 86_531_88369577; Fax: + 86_531_88564652; E_mail: wuzhen@sdu.edu.cn);
于志勇(1976—), 男, 山东威海人, 副教授, 硕士•

1 正倒向随机微分方程的预备结果

令 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}, P)$ 是一个概率空间, $\mathcal{F}_0$ 包含 $\mathcal{F}$ 的所有 P_零集, 并且 $\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{\varepsilon>0}\mathcal{F}_{t+\varepsilon} = \mathcal{F}_t,\ t\geqslant 0$. 我们假设信息流 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ 是由下面的两个相互独立的随机过程产生的:

一个 d_维标准布朗运动 $\{B_t\}_{t\geqslant 0}$ 和一个 $\mathrm{R}_+\times Z$ 上的泊松随机测度 N, 其中 $Z\subset R^l$ 是一个非空的开集, 其 Borel 域为 $\mathcal{B}(Z)$, 补偿为 $\hat{N}(\mathrm{d}z, \mathrm{d}t) = \lambda(\mathrm{d}z)\mathrm{d}t$, 且使得 $\tilde{N}(A\times[0,t]) = (N - \hat{N})(A\times[0,t])_{t\geqslant 0}$ 是一个鞅, 并对 $\forall A\in\mathcal{B}(Z)$ 满足 $\lambda(A) < \infty$. λ 假定是 $(Z, \mathcal{B}(Z))$ 上的一个 σ_有限测度, 称之为特征测度.

在这一节中, 我们研究如下的一类正倒向随机微分方程:

$$
\begin{cases}
\mathrm{d}\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{b}(t, \boldsymbol{x}_t, \boldsymbol{p}_t)\mathrm{d}t + \sigma(t, \boldsymbol{x}_t, \boldsymbol{p}_t)\mathrm{d}B_t + \int_Z \boldsymbol{g}(t_-, \boldsymbol{x}_{t_-}, \boldsymbol{p}_{t_-})\tilde{N}(\mathrm{d}z\mathrm{d}t), \\
-\mathrm{d}\boldsymbol{p}_t = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_t, \boldsymbol{p}_t, \boldsymbol{q}_t, \boldsymbol{k}_t)\mathrm{d}t - \boldsymbol{q}_t\mathrm{d}B_t - \int_Z \boldsymbol{k}_{t_-}(z)\tilde{N}(\mathrm{d}z\mathrm{d}t), \\
\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{p}_T = \Phi(\boldsymbol{x}_T).
\end{cases}
\tag{1}
$$

为了记号上的简便, 我们假设 $d = 1$, 其中 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{k})$ 在 $R^n\times R^n\times R^n\times R^n$ 中取值, $\boldsymbol{b}$、σ、$\boldsymbol{f}$、$\boldsymbol{g}$、Φ 是具有相应维数的映射, 且对于固定的 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{k})$, 是 $\mathcal{F}_t$_循序可测的, $T > 0$ 是一个固定的数, 称为时间区间, 我们引入如下的记号:

$$
\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{k})^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{A}(t, \boldsymbol{u}) = (-\boldsymbol{f}, \boldsymbol{b}, \sigma, \boldsymbol{g})^{\mathrm{T}}(t, \boldsymbol{u}),
$$

并使用通常意义下的内积, 欧几里得范数, 以及下面的空间:

$$
\begin{aligned}
M^2 &= \left\{ v_t,\ 0\leqslant t\leqslant T, \text{ 是循序可测过程, 使得: } E\left[\int_0^T |v_t|^2\mathrm{d}t\right] < \infty \right\}, \\
L^2 &= \left\{ \xi,\ \xi \text{ 是一个 } \mathcal{F}_T \text{ 可测的随机变量, 使得: } E|\xi|^2 < \infty \right\}, \\
F_N^2 &= \Big\{ k_t(\cdot),\ 0\leqslant t\leqslant T, \text{ 是一个 } \mathcal{F}_t \text{ 可料过程, 使得: } \\
&\qquad E\left[\int_0^T\int_Z |k_t(z)|^2 n(\mathrm{d}z)\mathrm{d}t\right] < \infty \Big\}.
\end{aligned}
$$

我们假设

$$
\begin{cases}
(\mathrm{i})\ \boldsymbol{A}(t, \boldsymbol{u}),\ \Phi(\boldsymbol{x}) \text{ 关于各自变量一致 Lipschitz 连续;} \\
(\mathrm{ii})\ \text{对于任意的 } \boldsymbol{x},\ \Phi(\boldsymbol{x}) \text{ 属于 } L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P); \\
(\mathrm{iii})\ \text{任给 } (\omega, t)\in\Omega\times[0,T],\ \boldsymbol{l}(\omega, t, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})\in M^2(0,T),\quad \boldsymbol{l} = \boldsymbol{b}, \sigma, \\
\qquad \boldsymbol{g}(\omega, t, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})\in F_N^2(0,T) \text{ 以及 } \boldsymbol{f}(\omega, t, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})\in M^2(0,T).
\end{cases}
\tag{2}
$$

以及下面的单调性条件:

$$
\begin{cases}
\langle \boldsymbol{A}(t, \boldsymbol{u}) - \boldsymbol{A}(t, \bar{\boldsymbol{u}}), \boldsymbol{u} - \bar{\boldsymbol{u}}\rangle \leqslant -\beta_1|\hat{\boldsymbol{x}}|^2 - \beta_2|\hat{\boldsymbol{p}}|^2, \\
\langle \Phi(\boldsymbol{x}) - \Phi(\bar{\boldsymbol{x}}), \boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}\rangle \geqslant \mu_1|\hat{\boldsymbol{x}}|^2,\ \text{a.s.}, \\
\forall\,\hat{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{u} - \bar{\boldsymbol{u}}) = (\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{p}}, \hat{\boldsymbol{q}}, \hat{\boldsymbol{k}}) = (\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{p} - \bar{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{q} - \bar{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{k} - \bar{\boldsymbol{k}}),
\end{cases}
\tag{3}
$$

其中 β_1、β_2 和 μ_1 是给定的非负常数, 满足 $\beta_1 + \beta_2 > 0$, $\mu_1 + \beta_2 > 0$. 那么, 我们有

定理 1 我们假设 (2) 和 (3), 那么存在唯一的四元组

$$
(\boldsymbol{x}(\cdot), \boldsymbol{p}(\cdot), \boldsymbol{q}(\cdot), \boldsymbol{k}(\cdot)) \in M^2(0, T; R^{n+n+n})\times F_N^2(0, T; R^n)
$$

满足正倒向随机微分方程(1).

证明方法类似于[7]中定理 3.1, 我们略去.

2 带随机跳跃的线性二次非零和随机微分对策问题

在这一节中,我们研究带随机跳跃的线性二次非零和随机微分对策问题. 为了简化记号,我们只考虑两个对手时的情况, n 个对手时的情况类似. 控制系统如下:

$$\begin{cases} \mathrm{d}\boldsymbol{x}_t^v = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_t^v + \boldsymbol{B}^1\boldsymbol{v}_t^1 + \boldsymbol{B}^2\boldsymbol{v}_t^2 + \alpha_t)\mathrm{d}t + (\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_t^v + \beta_t)\mathrm{d}\beta_t + \\ \qquad \displaystyle\int_Z (\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}_{t\_}^v + \gamma_{t\_}(z))\widetilde{N}(\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t), \\ \boldsymbol{x}_0^v = \boldsymbol{a}, \end{cases} \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 是 $n\times n$ 有界矩阵, $\boldsymbol{v}_t^1$ 和 $\boldsymbol{v}_t^2$, $t\in[0,T]$, 是两个容许控制过程, 即: 取值于 R^k 的 $\mathcal{F}_{t_}$适应的平方可积过程. $\boldsymbol{B}^1$ 和 $\boldsymbol{B}^2$ 是 $n\times k$ 有界矩阵. α_t 和 β_t 是两个适应的平方可积过程, $\gamma_t(\cdot)$ 是 $F_N^2(0,T;R^n)$ 中的过程. 我们用 $J^1(\boldsymbol{v}(\cdot))$ 和 $J^2(\boldsymbol{v}(\cdot))$, $\boldsymbol{v}(\cdot)=(\boldsymbol{v}^1(\cdot),\boldsymbol{v}^2(\cdot))$ 记对手 1 和对手 2 的代价函数如下:

$$\begin{cases} J^1(\boldsymbol{v}(\cdot)) = \dfrac{1}{2}E\left[\displaystyle\int_0^T(\langle \boldsymbol{R}^1\boldsymbol{x}_t^v, \boldsymbol{x}_t^v\rangle + \langle \boldsymbol{N}^1\boldsymbol{v}_t^1, \boldsymbol{v}_t^1\rangle)\mathrm{d}t + \langle \boldsymbol{Q}^1\boldsymbol{x}_T^v, \boldsymbol{x}_T^v\rangle\right], \\ J^2(\boldsymbol{v}(\cdot)) = \dfrac{1}{2}E\left[\displaystyle\int_0^T(\langle \boldsymbol{R}^2\boldsymbol{x}_t^v, \boldsymbol{x}_t^v\rangle + \langle \boldsymbol{N}^2\boldsymbol{v}_t^2, \boldsymbol{v}_t^2\rangle)\mathrm{d}t + \langle \boldsymbol{Q}^2\boldsymbol{x}_T^v, \boldsymbol{x}_T^v\rangle\right], \end{cases} \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{Q}^1$、$\boldsymbol{Q}^2$、$\boldsymbol{R}^1$ 和 $\boldsymbol{R}^2$ 是 $n\times n$ 非负定有界对称矩阵, $\boldsymbol{N}^1$ 和 $\boldsymbol{N}^2$ 是 $k\times k$ 正定有界对称矩阵以及逆矩阵 $(\boldsymbol{N}^1)^{-1}$、$(\boldsymbol{N}^2)^{-1}$ 也是有界的.

我们的问题是去寻找所谓的 Nash 均衡点 $(\boldsymbol{u}^1(\cdot),\boldsymbol{u}^2(\cdot))\in R^k\times R^k$ 使得

$$\begin{cases} J^1(\boldsymbol{u}^1(\cdot),\boldsymbol{u}^2(\cdot)) \leqslant J^1(\boldsymbol{v}^1(\cdot),\boldsymbol{u}^2(\cdot)), & \forall \boldsymbol{v}^1(\cdot)\in R^k; \\ J^2(\boldsymbol{u}^1(\cdot),\boldsymbol{u}^2(\cdot)) \leqslant J^2(\boldsymbol{u}^1(\cdot),\boldsymbol{v}^2(\cdot)), & \forall \boldsymbol{v}^2(\cdot)\in R^k. \end{cases} \tag{6}$$

这时两个竞争对手的行为是由带有随机跳跃的随机过程所描述, 最优解是不连续的过程. 这种对策问题有很强的实际应用背景. 我们需要如下的假设:

$$\begin{cases} \boldsymbol{B}^i(\boldsymbol{N}^i)^{-1}(\boldsymbol{B}^i)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^i(\boldsymbol{N}^i)^{-1}(\boldsymbol{B}^i)^{\mathrm{T}}, \\ \boldsymbol{B}^i(\boldsymbol{N}^i)^{-1}(\boldsymbol{B}^i)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^i(\boldsymbol{N}^i)^{-1}(\boldsymbol{B}^i)^{\mathrm{T}}, \qquad i=1,2, \text{ a.s.} \\ \boldsymbol{B}^i(\boldsymbol{N}^i)^{-1}(\boldsymbol{B}^i)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^i(\boldsymbol{N}^i)^{-1}(\boldsymbol{B}^i)^{\mathrm{T}}, \end{cases} \tag{7}$$

现在, 运用第 1 节结果, 我们能够给出这个问题的 Nash 均衡点的显式形式.

定理 2 函数 $(\boldsymbol{u}_t^1,\boldsymbol{u}_t^2) = (-(\boldsymbol{N}^1)^{-1}(\boldsymbol{B}^1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_t^1, -(\boldsymbol{N}^2)^{-1}(\boldsymbol{B}^2)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_t^2)$, $t\in[0,T]$, 是上面对策问题的一个 Nash 均衡点, 其中 $(\boldsymbol{x}_t,\boldsymbol{p}_t^1,\boldsymbol{p}_t^2,\boldsymbol{q}_t^1,\boldsymbol{q}_t^2,\boldsymbol{k}_t^1,\boldsymbol{k}_t^2)$ 是下面不同维正倒向随机微分方程的解:

$$\begin{cases} \mathrm{d}\boldsymbol{x}_t = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{B}^1(\boldsymbol{N}^1)^{-1}(\boldsymbol{B}^1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_t^1 - \boldsymbol{B}^2(\boldsymbol{N}^2)^{-1}(\boldsymbol{B}^2)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_t^2 + \alpha_t)\mathrm{d}t + \\ \qquad (\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_t + \beta_t)\mathrm{d}B_t + \displaystyle\int_Z(\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}_{t\_} + \gamma_{t\_}(z))\widetilde{N}(\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t), \\ -\mathrm{d}\boldsymbol{p}_t^1 = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_t^1 + \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_t^1 + \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k}_t^1 + \boldsymbol{R}^1\boldsymbol{x}_t)\mathrm{d}t - \boldsymbol{q}_t^1\mathrm{d}B_t - \displaystyle\int_Z \boldsymbol{k}_t^1(z)\widetilde{N}(\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t), \\ -\mathrm{d}\boldsymbol{p}_t^2 = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_t^2 + \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_t^2 + \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k}_t^2 + \boldsymbol{R}^2\boldsymbol{x}_t)\mathrm{d}t - \boldsymbol{q}_t^2\mathrm{d}B_t - \displaystyle\int_Z \boldsymbol{k}_t^2(z)\widetilde{N}(\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t), \\ \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{p}_T^1 = \boldsymbol{Q}^1\boldsymbol{x}_T,\ \boldsymbol{p}_T^2 = \boldsymbol{Q}^2\boldsymbol{x}_T. \end{cases} \tag{8}$$

证明 我们首先证明方程(8)解的存在性. 考虑如下的正倒向随机微分方程:

$$
\begin{cases}
\mathrm{d}\boldsymbol{X}_t = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_t - \boldsymbol{P}_t + \alpha_t)\mathrm{d}t + (\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_t + \beta_t)\mathrm{d}B_t + \int_Z (\boldsymbol{E}\boldsymbol{X}_{t_-} + \gamma_{t_-}(z))\tilde{N}(\mathrm{d}z\mathrm{d}t), \\
-\mathrm{d}\boldsymbol{P}_t = [\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_t + (\boldsymbol{B}^1(\boldsymbol{N}^1)^{-1}(\boldsymbol{B}^1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^1 + \boldsymbol{B}^2(\boldsymbol{N}^2)^{-1}(\boldsymbol{B}^2)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^2)\boldsymbol{X}_t + \\
\qquad \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_t + \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_t]\mathrm{d}t - \boldsymbol{Q}_t\mathrm{d}B_t - \int_Z \boldsymbol{K}_{t_-}(z)\tilde{N}(\mathrm{d}z\mathrm{d}t), \\
\boldsymbol{X}_0 = \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{P}_T = (\boldsymbol{B}^1(\boldsymbol{N}^1)^{-1}(\boldsymbol{B}^1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^1 + \boldsymbol{B}^2(\boldsymbol{N}^2)^{-1}(\boldsymbol{B}^2)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^2)\boldsymbol{X}_T.
\end{cases}
\tag{9}
$$

由假设(7),我们注意到如果 $(\boldsymbol{x}_t, \boldsymbol{p}^1_t, \boldsymbol{p}^2_t, \boldsymbol{q}^1_t, \boldsymbol{q}^2_t, \boldsymbol{k}^1_t, \boldsymbol{k}^2_t)$ 是方程(8) 的解, $(\boldsymbol{X}_t, \boldsymbol{P}_t, \boldsymbol{Q}_t, \boldsymbol{K}_t)$ 是正倒向随机微分方程(9) 的解,这里

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{x}_t,\ \boldsymbol{P}_t = \boldsymbol{B}^1(\boldsymbol{N}^1)^{-1}(\boldsymbol{B}^1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}^1_t + \boldsymbol{B}^2(\boldsymbol{N}^2)^{-1}(\boldsymbol{B}^2)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}^2_t, \\
&\boldsymbol{Q}_t = \boldsymbol{B}^1(\boldsymbol{N}^1)^{-1}(\boldsymbol{B}^1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}^1_t + \boldsymbol{B}^2(\boldsymbol{N}^2)^{-1}(\boldsymbol{B}^2)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}^2_t, \\
&\boldsymbol{K}_t = \boldsymbol{B}^1(\boldsymbol{N}^1)^{-1}(\boldsymbol{B}^1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k}^1_t + \boldsymbol{B}^2(\boldsymbol{N}^2)^{-1}(\boldsymbol{B}^2)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k}^2_t.
\end{aligned}
$$

另一方面,我们能够首先从方程(9) 得到解 $\boldsymbol{X}_t$, 令方程(8) 中的 $\boldsymbol{x}_t$ 等于 $\boldsymbol{X}_t$, 然后得到解$(\boldsymbol{p}^1_t, \boldsymbol{q}^1_t, \boldsymbol{k}^1_t)$ 和$(\boldsymbol{p}^2_t, \boldsymbol{q}^2_t, \boldsymbol{k}^2_t)$. 很容易验证方程(9) 满足假设(2) 和(3), 根据定理 1, 方程(9) 存在唯一的解$(\boldsymbol{X}_t, \boldsymbol{P}_t, \boldsymbol{Q}_t, \boldsymbol{K}_t)$. 现在由倒向随机微分方程解的存在唯一性结果[5], 我们能够令$(\boldsymbol{p}^1_t, \boldsymbol{q}^1_t, \boldsymbol{k}^1_t)$ 和$(\boldsymbol{p}^2_t, \boldsymbol{q}^2_t, \boldsymbol{k}^2_t)$ 是如下的倒向方程的解:

$$
\begin{cases}
-\mathrm{d}\boldsymbol{p}^1_t = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}^1_t + \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}^1_t + \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k}^1_t + \boldsymbol{R}^1\boldsymbol{X}_t)\mathrm{d}t - \boldsymbol{q}^1_t\mathrm{d}B_t - \int_Z \boldsymbol{k}^1_{t_-}(z)\tilde{N}(\mathrm{d}z\mathrm{d}t), \\
-\mathrm{d}\boldsymbol{p}^2_t = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}^2_t + \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}^2_t + \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k}^2_t + \boldsymbol{R}^2\boldsymbol{X}_t)\mathrm{d}t - \boldsymbol{q}^2_t\mathrm{d}B_t - \int_Z \boldsymbol{k}^2_{t_-}(z)\tilde{N}(\mathrm{d}z\mathrm{d}t), \\
\boldsymbol{p}^1_T = \boldsymbol{Q}^1\boldsymbol{X}_T,\ \boldsymbol{p}^2_T = \boldsymbol{Q}^2\boldsymbol{X}_T.
\end{cases}
$$

我们令

$$
\begin{aligned}
&\bar{\boldsymbol{P}}_t = \boldsymbol{B}^1(\boldsymbol{N}^1)^{-1}(\boldsymbol{B}^1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}^1_t + \boldsymbol{B}^2(\boldsymbol{N}^2)^{-1}(\boldsymbol{B}^2)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}^2_t, \\
&\bar{\boldsymbol{Q}}_t = \boldsymbol{B}^1(\boldsymbol{N}^1)^{-1}(\boldsymbol{B}^1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}^1_t + \boldsymbol{B}^2(\boldsymbol{N}^2)^{-1}(\boldsymbol{B}^2)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}^2_t, \\
&\bar{\boldsymbol{K}}_t = \boldsymbol{B}^1(\boldsymbol{N}^1)^{-1}(\boldsymbol{B}^1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k}^1_t + \boldsymbol{B}^2(\boldsymbol{N}^2)^{-1}(\boldsymbol{B}^2)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k}^2_t.
\end{aligned}
$$

那么我们得到

$$
\begin{cases}
-\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{P}}_t = [\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}_t + (\boldsymbol{B}^1(\boldsymbol{N}^1)^{-1}(\boldsymbol{B}^1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^1 + \boldsymbol{B}^2(\boldsymbol{N}^2)^{-1}(\boldsymbol{B}^2)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^2)\boldsymbol{X}_t + \\
\qquad \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{Q}}_t + \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{K}}_t]\mathrm{d}t - \bar{\boldsymbol{Q}}_t\mathrm{d}B_t - \int_Z \bar{\boldsymbol{K}}_{t_-}(z)\tilde{N}(\mathrm{d}z\mathrm{d}t), \\
\bar{\boldsymbol{P}}_T = [\boldsymbol{B}^1(\boldsymbol{N}^1)^{-1}(\boldsymbol{B}^1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^1 + \boldsymbol{B}^2(\boldsymbol{N}^2)^{-1}(\boldsymbol{B}^2)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^2]\boldsymbol{x}_T.
\end{cases}
$$

对于固定的$\left\{\boldsymbol{X}_t\right\}_{t\geqslant 0}$, 因为倒向随机微分方程 解的存在唯一性,我们有

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{P}_t = \bar{\boldsymbol{P}}_t = \boldsymbol{B}^1(\boldsymbol{N}^1)^{-1}(\boldsymbol{B}^1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}^1_t + \boldsymbol{B}^2(\boldsymbol{N}^2)^{-1}(\boldsymbol{B}^2)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}^2_t, \\
&\boldsymbol{Q}_t = \bar{\boldsymbol{Q}}_t = \boldsymbol{B}^1(\boldsymbol{N}^1)^{-1}(\boldsymbol{B}^1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}^1_t + \boldsymbol{B}^2(\boldsymbol{N}^2)^{-1}(\boldsymbol{B}^2)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}^2_t, \\
&\boldsymbol{K}_t = \bar{\boldsymbol{K}}_t = \boldsymbol{B}^1(\boldsymbol{N}^1)^{-1}(\boldsymbol{B}^1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k}^1_t + \boldsymbol{B}^2(\boldsymbol{N}^2)^{-1}(\boldsymbol{B}^2)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k}^2_t,
\end{aligned}
$$

那么 $(\boldsymbol{X}_t, \boldsymbol{P}_t, \boldsymbol{Q}_t, \boldsymbol{K}_t)$ 是正倒向随机微分方程(9) 的唯一解, 并且$(\boldsymbol{X}_t, \boldsymbol{p}^1_t, \boldsymbol{p}^2_t, \boldsymbol{q}^1_t, \boldsymbol{q}^2_t, \boldsymbol{k}^1_t, \boldsymbol{k}^2_t)$ 是正倒向随机微分方程(8) 的一个解. 现在, 我们试图去证明$(\boldsymbol{u}^1(\cdot), \boldsymbol{u}^2(\cdot))$ 是我们的带有随机跳跃的非零和微分对策问题的一个 Nash 均衡点. 我们只证明

$$
J^1(\boldsymbol{u}^1(\cdot), \boldsymbol{u}^2(\cdot)) \leqslant J^1(\boldsymbol{v}^1(\cdot), \boldsymbol{u}^2(\cdot)), \qquad \forall \boldsymbol{v}^1(\cdot) \in R^k.
$$

(6) 式的另一个不等式可以类似的得到. 我们用 $\boldsymbol{x}^{v^1}_t$ 记如下系统的解:

$$\begin{cases} \mathrm{d}x_t^{v^1} = (Ax_t^{v^1} + B^1 v_t^1 + B^2 u_t^2 + \alpha_t)\mathrm{d}t + (Cx_t^{v^1} + \beta_t)\mathrm{d}B_t + \\ \qquad \int_Z (Ex_{t\_}^{v^1} + \gamma_{t\_}(z))\tilde{N}(\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t), \\ x_0 = a; \end{cases} \tag{10}$$

$$J^1(v^1(\cdot), u^2(\cdot)) - J^1(u^1(\cdot), u^2(\cdot)) = \frac{1}{2}E\Big[\int_0^T (\langle R^1 x_t^{v^1}, x_t^{v^1}\rangle - \langle R^1 x_t, x_t\rangle +$$

$$\langle N^1 v_t^1, v_t^1\rangle - \langle N^1 u_t^1, u_t^1\rangle)\mathrm{d}t + \langle Q^1 x_T^{v^1}, x_T^{v^1}\rangle - \langle Q^1 x_T, x_T\rangle\Big] =$$

$$\frac{1}{2}E\Big[\int_0^T (\langle R^1(x_t^{v^1} - x_t), x_t^{v^1} - x_t\rangle + \langle N^1(v_t^1 - u_t^1), v_t^1 - u_t^1\rangle +$$

$$2\langle R^1 x_t, x_t^{v^1} - x_t\rangle + 2\langle N^1 u_t^1, v_t^1 - u_t^1\rangle)\mathrm{d}t +$$

$$\langle Q^1(x_T^{v^1} - x_T), x_T^{v^1} - x_T\rangle + 2\langle Q^1 x_T, x_T^{v^1} - x_T\rangle\Big].$$

由于 $Q^1 x_T = p_T^1$, 我们对 $(x_T^{v^1} - x_T, p_T^1)$ 应用 Itô 公式得到:

$$E\langle x_T^{v^1} - x_T, p_T^1\rangle = E\int_0^T (-\langle R^1 x_t, x_t^{v^1} - x_t\rangle + \langle B^1(v_t^1 - u_t^1), p_t^1\rangle)\mathrm{d}t.$$

因为 R^1 和 Q^1 是非负定的, N^1 是正定的, 故:

$$J^1(v^1(\cdot), u^2(\cdot)) - J^1(u^1(\cdot), u^2(\cdot)) \geqslant$$

$$E\int_0^T (\langle N^1 u_t^1, v_t^1 - u_t^1\rangle + \langle B^1(v_t^1 - u_t^1), p_t^1\rangle)\mathrm{d}t =$$

$$E\int_0^T (\langle -N^1(N^1)^{-1}(B^1)^{\mathrm{T}} p_t^1, v_t^1 - u_t^1\rangle + \langle (B^1)^{\mathrm{T}} p_t^1, v_t^1 - u_t^1\rangle)\mathrm{d}t = 0.$$

因此 $(u_t^1, u_t^2) = (-(N^1)^{-1}(B^1)^{\mathrm{T}} p_t^1, -(N^2)^{-1}(B^2)^{\mathrm{T}} p_t^2)$ 是非零和对策问题的一个 Nash 均衡点.

[参 考 文 献]

[1] MA Jin, Protter P, YONG Jiong_min. Solving forward_backward stochastic differential equations explicitly—a four step scheme[J]. Probab Theory Related Fields, 1994, **98**(2): 339—359.

[2] HU Ying, PENG Shi_ge. Solution of forward_backward stochastic differential equations[J]. Probab Theory Related Fields, 1995, **103**(2): 273—283.

[3] PENG Shi_ge, WU Zhen. Fully coupled forward_backward stochastic differential equations and applications to optimal control[J]. SIAM J Control Optim, 1999, **37**(3): 825—843.

[4] YONG Jiong_min. Finding adapted solution of forward_backward stochastic differential equations_method of continuation[J]. Probab Theory Related Fields, 1997, **107**(3): 537—572.

[5] TANG Shan_jian, LI Xun_jing. Necessary condition for optimal control of stochastic systems with random jumps[J]. SIAM J Control Optim, 1994, **32**(5): 1447—1475.

[6] SITU Rong. On solution of backward stochastic differential equations with jumps and applications [J]. Stochastic Processes and Their Applications, 1997, **66**(2): 209—236.

[7] WU Zhen. Forward_backward stochastic differential equations with Brownian motion and Poisson process[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 1999, **15**(3): 433—443.

[8] Friedman A. Differential Games[M]. New York: Wiley_Interscience, 1971.

[9] Bensoussan A. Point de Nash dans de cas de fonctionnelles quadratiques et jeux différentiels à N

personnes[J]. SIAM J Control Optim, 1974, **12**(3): 728—742.

[10] Eisele T. Nonexistence and nonuniqueness of open_loop equilibria in linear_quadratic differential games[J]. J Math Anal Appl, 1982, **37**(3): 443—468.

[11] Hamadène S. Nonzero sum linear_quadratic stochastic differential games and backward_forward equations[J]. Stochastic Anal Appl, 1999, **17**(2): 117—130.

[12] Ikeda N, Watanabe S. Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes[M]. Kodansha: North_Holland, 1981.

Linear Quadratic Nonzero Sum Differential Games With Random Jumps

WU Zhen, YU Zhi_yong

(School of Mathematics and System Science, Shandong University, Jinan 250100, P.R.China)

Abstract: The existence and uniqueness results of the solutions for one kind of forward_backward stochastic differential equations with Brownian motion and Poisson process as the noise source were given under the monotone conditions. Then these results were applied to get the explicit form of the open_loop Nash equilibrium point for nonzero sum differential games problem with random jump by the solution of the forward_backward stochastic differential equations.

Key words: stochastic differential equation; Poisson process; stochastic differential game