

文章编号: 1000_0887(2005) 08_0957_08

压电复合材料圆形夹杂中螺型位错和 界面裂纹的干涉分析*

郑健龙¹, 方棋洪², 刘又文²

(1. 长沙理工大学 公路工程学院, 长沙 410076;

2. 湖南大学 工程力学系, 长沙 410082)

(我刊原编委樊大钧推荐)

摘要: 研究了无穷远纵向剪切和面内电场共同作用下, 压电复合材料圆形夹杂中螺型位错与界面裂纹的电弹耦合干涉作用。运用 Riemann-Schwarz 对称原理, 并结合复变函数奇性主部分析方法, 获得了该问题的一般解答。作为典型算例, 求出了界面含一条裂纹时基体和夹杂区域复势函数和电弹性场的封闭形式解。应用广义 Peach-Koehler 公式, 导出了位错力的解析表达式。分析了裂纹几何参数和材料的电弹性常数对位错力的影响规律。结果表明, 界面裂纹对位错力和位错平衡位置有很强的扰动效应, 当界面裂纹长度达到临界值时, 可以改变位错力的方向。该结果可以作为格林函数研究圆形夹杂内裂纹和界面裂纹的干涉效应。其公式的退化结果与已有文献完全一致。

关键词: 螺型位错; 界面裂纹; 复变函数方法; 位错力

中图分类号: O343.7 **文献标识码:** A

引 言

压电材料在现代高科技设备和复杂机敏结构中日益广泛应用。在这些材料中不可避免地存在各种缺陷, 例如, 夹杂、孔洞、位错、裂纹等, 不同程度地影响压电材料的电弹耦合性能, 所以研究缺陷对力电耦合场的影响具有十分重要的意义。位错和夹杂的干涉作用是研究压电材料电弹耦合性能的一个重要内容。近年来, 许多学者进行了该方面的研究^[1~6]。然而, 上述研究都是针对无缺陷的理想界面, 事实上复合材料在制造和使用过程中, 界面最容易产生缺陷, 界面裂纹和界面刚性线夹杂是两种极端情形。因此研究材料中具有界面缺陷的夹杂与位错的相互作用具有重要的应用价值, 不仅有助于全面理解压电材料的电弹耦合性能, 而且能为建立复合材料的断裂破坏准则提供科学依据。文献[7]研究了压电复合材料中螺型位错和圆形界面刚性线夹杂的干涉作用。

本文研究无穷远纵向剪切和面内电场共同作用下, 压电复合材料圆形夹杂中任意位置螺

* 收稿日期: 2003_10_14; 修订日期: 2005_03_22

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10472030)

作者简介: 郑健龙(1954—), 男, 湖南邵阳人, 教授, 博士;

刘又文(1948—), 男, 湖南益阳人, 教授, 博士生导师(联系人, Tel: + 86_731_8821889; Fax: + 86_731_8822330; E_mail: Liuyouw8294@sina.com)。

型位错与界面裂纹的电弹耦合干涉作用。运用复变函数方法,求出了该问题的一般解答,并由此得到了含一条界面裂纹的封闭形式解。导出了位错力的解析表达式。分析结果表明,界面裂纹对位错力及其平衡位置具有强烈扰动效应,当界面裂纹达到临界值时,可以改变位错力的方向。本文公式的退化结果与已有文献完全一致。

1 问题的解答

对于极化方向沿 z 轴的横观各向同性压电介质,设 xOy 平面为各向同性面,在无穷远处作用反平面力场和平面电场,只产生沿 z 轴方向的位移 w 、应变分量 γ_{xz} 和 γ_{yz} 、应力分量 τ_{xz} 和 τ_{yz} 、电势 φ 、电场分量 E_x 和 E_y 、电位移分量 D_x 和 D_y , 并且所有变量均为 x 和 y 的函数。广义位移、广义应变和广义应力可以用一个二维全纯函数向量 $f(z) = [f_w(z) \ f_\varphi(z)]^T$ 表示^[7]

$$U = \operatorname{Re}[f(z)], \tag{1}$$

$$Y_x - i Y_y = F(z), \tag{2}$$

$$\Sigma_x - i \Sigma_y = CF(z), \tag{3}$$

式中

$$U = \begin{Bmatrix} w \\ \varphi \end{Bmatrix}, \quad F(z) = f'(z); \quad \Sigma_x = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ D_x \end{Bmatrix}, \quad \Sigma_y = \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ D_y \end{Bmatrix},$$

$$Y_x = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ -E_x \end{Bmatrix}, \quad Y_y = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ -E_y \end{Bmatrix}, \quad C = \begin{Bmatrix} c_{44} & e_{15} \\ e_{15} & -d_{11} \end{Bmatrix}.$$

在极坐标系 $Or\theta$ 中,式(3)可以表示为

$$\Sigma_r - i \Sigma_\theta = e^{i\theta} CF(z), \tag{4}$$

式中

$$\Sigma_r = \begin{Bmatrix} \tau_{rz} \\ D_r \end{Bmatrix}, \quad \Sigma_\theta = \begin{Bmatrix} \tau_{\theta z} \\ D_\theta \end{Bmatrix}.$$

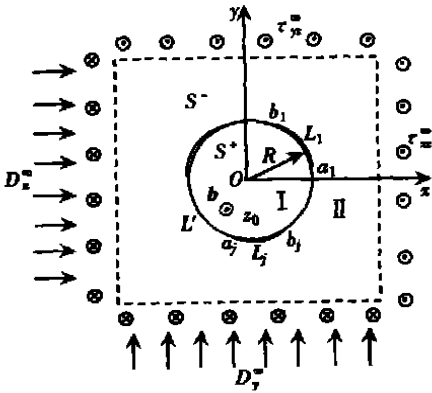


图1 夹杂中螺型位错和圆形界面裂纹干涉模型

如图1所示,压电材料电弹模量为 C_1 的介质 I 占有半径为 R 的圆内区域 S^+ ; 电弹模量为 C_2 的介质 II 占有圆外无限大区域 S^- 。在 S^+ (夹杂) 中任意点 z_0 有一压电螺型位错^[7] $b = [b_z \ b_\varphi]^T$, 其中 b_z 和 b_φ 分别为通过滑移平面位移和电势的跳跃值。在无穷远处作用反平面力场 (τ_{xz}^∞ 和 τ_{yz}^∞) 和平面电场 (D_x^∞ 和 D_y^∞)。一系列绝缘的圆弧形裂纹 $L_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 位于界面上 $L (L = L_1 + L_2 + \dots + L_n)$ 部分, 裂纹的端点用 a_j 和 $b_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 表示, 并假设裂纹面上无外载和电荷作用; 界面的剩余部分用 L' 表示。界面连接条件可以表示为

$$\begin{cases} \Sigma_{r1}^+(t) = 0, \\ \Sigma_{r2}^-(t) = 0 \end{cases} \quad (t \in L), \tag{5}$$

$$\Sigma_{r1}^+(t) = \Sigma_{r2}^-(t) \quad (t \in L'), \tag{6}$$

$$U_1^+(t) = U_2^-(t) \quad (t \in L'), \tag{7}$$

式中下标“1”和“2”分别表示区域 S^+ 和 S^- 中的量, 上标“+”和“-”表示函数从 S^+ 和 S^- 趋向界面时所取的值。

夹杂中的复势函数向量 $F_1(z)$ 可以表示为如下形式^[8]

$$F_1(z) = \begin{Bmatrix} F_{w1}(z) \\ F_{\varphi_1}(z) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\pi i} \mathbf{b} \frac{1}{z - z_0} + F_{10}(z) \quad (z \in S^+), \quad (8)$$

式中 $F_{10}(z)$ 在 S^+ 内全纯。

根据 Riemann-Schwarz 对称原理^[9], 并注意到在 $|z| = R$ 上, $tt = R^2$, 将 $F_1(z)$ 通过裂纹面 L 开拓至圆外区域 S^-

$$F_1(z) \frac{1}{2\pi i} \mathbf{b} \left[\frac{1}{z - z_0} - \frac{1}{z - z^*} + \frac{1}{z} \right] + F_{10}(z), \quad (9)$$

式中 $z^* = R^2/z_0$, $F_{10}(z)$ 在沿 L' 割开的全平面全纯。

$F_2(z)$ 在区域 S^- 内全纯, 在无穷远处取如下形式

$$F_2(z) = \Gamma + \frac{1}{2\pi i} \mathbf{b} \frac{1}{z} + O\left[\frac{1}{z^2}\right], \quad (10)$$

式中 $\Gamma = [C_2]^{-1} \begin{bmatrix} \tau_{xz}^\infty - i\tau_{yz}^\infty \\ D_x^\infty - iD_y^\infty \end{bmatrix}$.

同样, 将 $F_2(z)$ 从 S^- 延拓到 S^+ 内得到

$$F_2(z) = \Gamma - \frac{R^2}{z^2} \Gamma + \frac{1}{2\pi i} \mathbf{b} \frac{1}{z} + \frac{1}{2\pi i} \mathbf{b} \frac{1}{z} + F_{20}(z), \quad (11)$$

式中 $F_{20}(z)$ 在沿 L' 割开的全平面全纯。

由式(5)和(6)得到

$$\Sigma_{r1}^+(t) = \Sigma_{r2}^-(t) \quad (t \in L + L') \quad (12)$$

把方程(4)代入式(12)得到

$$[C_1 F_1(t) + C_2 F_2(t)]^+ = [C_1 F_1(t) + C_2 F_2(t)]^- \quad (t \in L + L'), \quad (13)$$

式中 $C_1 = \begin{bmatrix} c_{44}^{(1)} & e_{15}^{(1)} \\ e_{15}^{(1)} & -d_{11}^{(1)} \end{bmatrix}$ 和 $C_2 = \begin{bmatrix} c_{44}^{(2)} & e_{15}^{(2)} \\ e_{15}^{(2)} & -d_{11}^{(2)} \end{bmatrix}$.

根据广义 Liouville 定理, 由方程(13)得到

$$C_1 F_1(z) + C_2 F_2(z) = \mathbf{g}(z), \quad (14)$$

式中 $\mathbf{g}(z) = \frac{1}{2\pi i} C_1 \mathbf{b} \left[\frac{1}{z - z_0} - \frac{1}{z - z^*} \right] + \frac{1}{2\pi i} C_2 \mathbf{b} \frac{1}{z} + C_2 \left[\Gamma - \frac{R^2}{z^2} \Gamma \right]$.

同时, 广义位移连续条件(7)可以表示为

$$F_1^+(t) + F_1^-(t) = F_2^+(t) + F_2^-(t) \quad (t \in L') \quad (15)$$

将式(14)代入式(15)中, 并考虑式(11)得到

$$F_{20}^+(t) + F_{20}^-(t) = \mathbf{h}(t) \quad (t \in L'), \quad (16)$$

式中

$$\mathbf{h}(t) = \frac{1}{\pi i} (C_1 + C_2)^{-1} C_1 \mathbf{b} \left[\frac{1}{t - z_0} - \frac{1}{t - z^*} - \frac{1}{t} \right] - 2(C_1 + C_2)^{-1} C_1 \left[\Gamma - \frac{R^2}{t^2} \Gamma \right].$$

根据 Muskhelishvili^[10]的工作, 式(16)的一般解为

$$F_{20}(z) = \frac{X_0(z)}{2\pi i} \int_L \frac{\mathbf{h}(t)}{X_0^+(t)(t - z)} dt + X_0(z) \mathbf{P}_n(z), \quad (17)$$

式中

$$\mathbf{P}_n(z) = \left[\sum_{j=1}^n C_j^{(w)} z^{n-j} \quad \sum_{j=1}^n C_j^{(\varphi)} z^{n-j} \right]^T,$$

$$X_0(z) = \prod_{j=1}^n (z - a_j)^{-1/2} (z - b_j)^{-1/2},$$

$X_0(z)$ 是沿 L' 割开的 z 平面上的一单值分支, 满足 $\lim_{|z| \rightarrow \infty} z^n X_0(z) = 1$ •

计算出方程(17)的积分后可得到 $F_2(z)$

$$F_2(z) = X_0(z) \left\{ P_n(z) - \frac{1}{2} [h_0(z) + h_\infty(z) + h_{z_0}(z) + h_{z^*}(z)] \right\} + \frac{1}{2} h(z) + \Gamma - \frac{R^2}{z^2} \Gamma + \frac{1}{2\pi i} b \frac{1}{z}, \quad (18)$$

式中 $h_0(z)$ 、 $h_\infty(z)$ 、 $h_{z_0}(z)$ 和 $h_{z^*}(z)$ 分别表示函数 $h(z)/X_0(z)$ 在点 $z = 0, \infty, z_0, z^*$ 处的奇性主部•

将式(18)代入式(14), 就可以得到复势函数 $F_1(z)$ • 在 $F_2(z)$ 的表达式(18)中还剩 $2n$ 个待定常数需要确定, 将 $F_2(z)$ 在无穷远邻域展开后, 与式(11)比较 z^{-1} 项的系数, 可得两个方程• 余下的系数由裂纹尖端位移和电势的单值条件求出, 由各裂纹端点两边的广义位移相等, 得到一组方程

$$\int_{L_j} [(C_1 + C_2) F_1(t) + g(t)] dt = 0 \quad (j = 2, 3, \dots, n)• \quad (19)$$

上述方程决定了剩余的 $2(n-1)$ 个系数•

2 典型情况

考虑界面上只有一条裂纹的情形• 不失一般性, 可设在圆形界面上有一条关于 x 轴对称的圆弧形裂纹, 并设裂纹端点为 $a_1 = e^{-i\theta}R$ 和 $b_1 = e^{i\theta}R$ • 此时 $n = 1$, 可以直接得到复势函数向量 $F_1(z)$ 和 $F_2(z)$ 的表达式

$$F_2(z) = (C_1 + C_2)^{-1} C_2 \left[\Gamma - \frac{R^2}{z^2} \Gamma \right] + (C_1 + C_2)^{-1} C_1 \left[\Gamma z - \Gamma R \cos \theta + \frac{R^2}{z} \cos \theta \Gamma - \frac{R^3}{z^2} \Gamma \right] \frac{1}{\sqrt{(z - a_1)(z - b_1)}} + \frac{1}{2\pi i} (C_1 + C_2)^{-1} C_1 b \left[\frac{1}{z - z_0} - \frac{1}{z - z^*} \right] + \frac{1}{2\pi i} (C_1 + C_2)^{-1} C_2 b \frac{1}{z} - \frac{1}{2\pi i} (C_1 + C_2)^{-1} C_1 b \left[\frac{\sqrt{(z_0 - a_1)(z_0 - b_1)}}{z - z_0} - \frac{\sqrt{(z^* - a_1)(z^* - b_1)}}{z - z^*} - \frac{R}{z} - 1 \right] \frac{1}{\sqrt{(z - a_1)(z - b_1)}}, \quad (20)$$

$$F_1(z) = (C_1 + C_2)^{-1} C_2 \left[\Gamma - \frac{R^2}{z^2} \Gamma \right] - (C_1 + C_2)^{-1} C_2 \left[\Gamma z - \Gamma R \cos \theta + \frac{R^2}{z} \cos \theta \Gamma - \frac{R^3}{z^2} \Gamma \right] \frac{1}{\sqrt{(z - a_1)(z - b_1)}} + \frac{1}{2\pi i} (C_1 + C_2)^{-1} C_1 b \left[\frac{1}{z - z_0} - \frac{1}{z - z^*} \right] + \frac{1}{2\pi i} (C_1 + C_2)^{-1} C_2 b \frac{1}{z} + \frac{1}{2\pi i} (C_1 + C_2)^{-1} C_2 b \left[\frac{\sqrt{(z_0 - a_1)(z_0 - b_1)}}{z - z_0} - \frac{\sqrt{(z^* - a_1)(z^* - b_1)}}{z - z^*} - \frac{R}{z} - 1 \right] \frac{1}{\sqrt{(z - a_1)(z - b_1)}}. \quad (21)$$

当 $\theta = 0$ 和 $\Gamma = 0$, 并且不考虑压电效应, 由式(20)和式(21)得到螺型位错在圆形弹性夹杂中的解答

$$F_{w1}(z) = \frac{c_{44}^{(1)} b_z}{2\pi i} \frac{1}{z - z_0} + \frac{c_{44}^{(1)} (c_{44}^{(2)} - c_{44}^{(1)}) b_z}{2\pi i (c_{44}^{(1)} + c_{44}^{(2)})} \frac{1}{z - z^*}, \quad (22)$$

$$F_{w2}(z) = \frac{c_{44}^{(2)}(c_{44}^{(2)} - c_{44}^{(1)})b_z}{2\pi i(c_{44}^{(1)} + c_{44}^{(2)})} \frac{1}{z} + \frac{c_{44}^{(1)}c_{44}^{(2)}b_z}{\pi i(c_{44}^{(1)} + c_{44}^{(2)})} \frac{1}{z - z_0'} \quad (23)$$

与 Smith^[11] 的解答完全一致。

3 位错力

3.1 电弹性场

把复势函数(20)和(21)代入式(3)中,得到夹杂和基体区域广义应力场分别为

$$\begin{aligned} \Sigma_{x1} - i\Sigma_{y1} = & C_1(C_1 + C_2)^{-1}C_2 \left[\Gamma - \frac{R^2}{z^2}\Gamma \right] - C_1(C_1 + C_2)^{-1}C_2 \left[\Gamma z - \Gamma R \cos\theta + \right. \\ & \left. \frac{R^2}{z} \cos\theta\Gamma - \frac{R^3}{z^2}\Gamma \right] \frac{1}{\sqrt{(z-a_1)(z-b_1)}} + \frac{1}{2\pi i} C_1(C_1 + C_2)^{-1}C_1 \mathbf{b} \left[\frac{1}{z-z_0} - \frac{1}{z-z^*} \right] + \\ & \frac{1}{2\pi i} C_1(C_1 + C_2)^{-1}C_2 \mathbf{b} \frac{1}{z} + \frac{1}{2\pi i} C_1(C_1 + C_2)^{-1}C_2 \mathbf{b} \left[\frac{\sqrt{(z_0-a_1)(z_0-b_1)}}{z-z_0} - \right. \\ & \left. \frac{\sqrt{(z^*-a_1)(z^*-b_1)}}{z-z^*} - \frac{R}{z} - 1 \right] \frac{1}{\sqrt{(z-a_1)(z-b_1)}}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{x2} - i\Sigma_{y2} = & C_2(C_1 + C_2)^{-1}C_2 \left[\Gamma - \frac{R^2}{z^2}\Gamma \right] + C_2(C_1 + C_2)^{-1}C_1 \left[\Gamma z - \Gamma R \cos\theta + \right. \\ & \left. \frac{R^2}{z} \cos\theta\Gamma - \frac{R^3}{z^2}\Gamma \right] \frac{1}{\sqrt{(z-a_1)(z-b_1)}} + \frac{1}{2\pi i} C_2(C_1 + C_2)^{-1}C_1 \mathbf{b} \left[\frac{1}{z-z_0} - \frac{1}{z-z^*} \right] + \\ & \frac{1}{2\pi i} C_2(C_1 + C_2)^{-1}C_2 \mathbf{b} \frac{1}{z} - \frac{1}{2\pi i} C_2(C_1 + C_2)^{-1}C_1 \mathbf{b} \left[\frac{\sqrt{(z_0-a_1)(z_0-b_1)}}{z-z_0} - \right. \\ & \left. \frac{\sqrt{(z^*-a_1)(z^*-b_1)}}{z-z^*} - \frac{R}{z} - 1 \right] \frac{1}{\sqrt{(z-a_1)(z-b_1)}}. \end{aligned} \quad (25)$$

3.2 位错力

对于位错、夹杂和裂纹的干涉问题,作用在位错上的 Peach_Koehler 力(像力)是一个重要的物理量。该力是由于存在夹杂和界面裂纹而产生的。它对于理解材料的电弹耦合行为十分重要,特别是位错的移动和捕获机理,还可以用于研究材料的强韧化机理和复合材料的裂纹扩展。由广义 Peach_Koehler 公式^[8]可以得到

$$f_x - if_y = i\mathbf{b}^T(\Sigma_x^0 - i\Sigma_y^0), \quad (26)$$

式中 Σ_x^0 和 Σ_y^0 表示位错点的扰动应力和电位移场^[12]。

$$\begin{aligned} \Sigma_{x1}^0 - i\Sigma_{y1}^0 = & C_1(C_1 + C_2)^{-1}C_2 \left[\Gamma - \frac{R^2}{z_0^2}\Gamma \right] - C_1(C_1 + C_2)^{-1}C_2 \left[\Gamma z_0 - \Gamma R \cos\theta + \right. \\ & \left. \frac{R^2}{z_0} \cos\theta\Gamma - \frac{R^3}{z_0^2}\Gamma \right] \frac{1}{\sqrt{(z_0-a_1)(z_0-b_1)}} - \frac{1}{2\pi i} C_1(C_1 + C_2)^{-1}C_1 \mathbf{b} \frac{1}{z_0 - z^*} + \\ & \frac{1}{2\pi i} C_1(C_1 + C_2)^{-1}C_2 \mathbf{b} \frac{1}{z_0} + \frac{1}{2\pi i} C_1(C_1 + C_2)^{-1}C_2 \mathbf{b} \times \\ & \left[- \frac{\sqrt{(z^*-a_1)(z^*-b_1)}}{z_0 - z^*} - \frac{R}{z_0} - 1 \right] \frac{1}{\sqrt{(z_0-a_1)(z_0-b_1)}} - \\ & \frac{1}{4\pi i} C_1(C_1 + C_2)^{-1}C_2 \mathbf{b} \left[\frac{1}{z_0 - a_1} + \frac{1}{z_0 - b_1} \right], \end{aligned} \quad (27)$$

把式(27)代入式(26),得到位错力的解析表达式

$$\begin{aligned}
 f_x - if_y = & \mathbf{b}^T \mathbf{C}_1 (\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2)^{-1} \mathbf{C}_2 \left[\Gamma - \frac{R^2}{z_0} \Gamma \right] - \mathbf{b}^T \mathbf{C}_1 (\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2)^{-1} \mathbf{C}_2 \left[\Gamma z_0 - \Gamma R \cos \theta + \right. \\
 & \left. \frac{R^2}{z_0} \cos \theta \Gamma - \frac{R^3}{z_0} \Gamma \right] \frac{1}{\sqrt{(z_0 - a_1)(z_0 - b_1)}} - \frac{1}{2\pi} \mathbf{b}^T \mathbf{C}_1 (\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2)^{-1} \mathbf{C}_1 \mathbf{b} \frac{1}{z_0 - z^*} + \\
 & \frac{1}{2\pi i} \mathbf{b}^T \mathbf{C}_1 (\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2)^{-1} \mathbf{C}_2 \mathbf{b} \frac{1}{z_0} + \frac{1}{2\pi} \mathbf{b}^T \mathbf{C}_1 (\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2)^{-1} \mathbf{C}_2 \mathbf{b} \times \\
 & \left[- \frac{\sqrt{(z^* - a)(z^* - b)}}{z_0 - z^*} - \frac{R}{z_0} - 1 \right] \frac{1}{\sqrt{(z_0 - a_1)(z_0 - b_1)}} - \\
 & \frac{1}{4\pi i} \mathbf{b}^T \mathbf{C}_1 (\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2)^{-1} \mathbf{C}_2 \mathbf{b} \left[\frac{1}{z_0 - a_1} + \frac{1}{z_0 - b_1} \right]. \quad (28)
 \end{aligned}$$

如果位错在 x 轴上, 且不考虑无穷远处的力电场 ($z_0 = x_0, \Gamma = \mathbf{0}$), 由式(28)得到

$$\begin{aligned}
 f_x = & \frac{1}{2\pi} \mathbf{b}^T \mathbf{C}_1 (\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2)^{-1} \mathbf{C}_1 \mathbf{b} \frac{x_0}{R^2 - x_0^2} + \frac{1}{2\pi i} \mathbf{b}^T \mathbf{C}_1 (\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2)^{-1} \mathbf{C}_2 \mathbf{b} \frac{1}{x_0} - \\
 & \frac{1}{2\pi} \mathbf{b}^T \mathbf{C}_1 (\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2)^{-1} \mathbf{C}_2 \mathbf{b} \left[\frac{\sqrt{(R^2 - x_0 a_1)(R^2 - x_0 b_1)}}{x_0^2 - R^2} + \frac{R}{x_0} + 1 \right] \times \\
 & \frac{1}{\sqrt{(x_0 - a_1)(x_0 - b_1)}} - \frac{1}{4\pi i} \mathbf{b}^T \mathbf{C}_1 (\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2)^{-1} \mathbf{C}_2 \mathbf{b} \left[\frac{1}{x_0 - a_1} + \frac{1}{x_0 - b_1} \right], \quad (29)
 \end{aligned}$$

$$f_y = \mathbf{0} \quad (30)$$

式(29)、(30)表示此时位错只能在 x 轴上移动。

4 分析和讨论

本节给出一例讨论材料电弹失配和裂纹尺寸对位错力的影响规律。为了便于与以往结果对照, 假设 z_0 在 x 轴上, 且不考虑无穷远处的力电场 ($z_0 = x_0, \Gamma = \mathbf{0}$)。取压电螺型位错^[12] $\mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_z \\ b_\varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0 \times 10^{-9} \text{ m} \\ 1.0 \text{ V} \end{Bmatrix}$, 无量纲位错力 $f_{x0} = 2\pi R f_x / (c_{44}^{(1)} b_z^2)$, 假设夹杂为 PZT_5H 压电陶瓷, 夹杂材料常数^[12]: $c_{44}^{(1)} = 3.53 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, $e_{15}^{(1)} = 17 \text{ C/m}^2$ 和 $d_{11}^{(1)} = 1.51 \times 10^{-8} \text{ C/V} \cdot \text{m}$ 。

引入 $\alpha = c_{44}^{(2)} / c_{44}^{(1)}$, $\beta = e_{15}^{(2)} / e_{15}^{(1)}$ 和 $\lambda = x_0 / R$, 并假设 $d_{11}^{(1)} / d_{11}^{(2)} = 1$ 。当刚度比 $\alpha = 1$, $\lambda = 0.9$, 压电系数比 β 取不同值时, f_{x0} 随裂纹弧度 θ 的变化如图 2 所示, 当 $\theta = 0$ 和 $\beta = 1$ 时, f_{x0} 等于零, 这表明均匀压电材料中的位错力为零; 当 $\beta < 1$ 时, 位错力总是正的, 基体总是吸引位错; 当 $\beta > 1$ 时, 位错力先负而后变为正, 随着裂纹弧度的不断增加, f_{x0} 会改变方向, 并存在一个临界裂纹弧度使位错力等于零。当 $\beta = 1.5$ 和 $\lambda = 0.9$, 刚度比 α 取不同值时, f_{x0} 随裂纹弧度 θ 的变化规律如图 3 所示, 值得注意的是 $\theta = 0$ 和 $\alpha = 0.8$ 时, f_{x0} 小于零, 说明压电材料中软基体也可能排斥夹杂中的位错, 而对于非压电材料来说软基体只吸引夹杂中的位错。

当裂纹弧度 $\theta = 20^\circ$, 刚度比 $\alpha = 1$, 取不同的压电系数比 β , f_{x0} 随位错所在位置 λ 的变化如图 4 所示。当 $\beta < 1$ 时, f_{x0} 总是为正, 基体吸引位错。当 $\beta > 1$ 时, 位错力由排斥逐渐转化为吸引。当位错沿 x 轴从圆心不断靠近裂纹时 ($\lambda \rightarrow 1$), 不论 β 取何值, 作用在位错上的吸引力都会变得很大。当裂纹弧度 $\theta = 20^\circ$, 压电系数比 $\beta = 1$, 取不同的刚度比 α , f_{x0} 随位错所在位置 λ 的变化如图 5 所示; 软基体 ($\alpha < 1$) 和界面裂纹一直吸引夹杂中的位错; 硬基体 ($\alpha > 1$) 和界面裂纹则表现为先排斥后吸引位错, 且存在一个平衡位置。不论是硬基体 ($\alpha > 1$) 还是软基体 ($\alpha < 1$), 当夹杂中的位错靠近界面裂纹 ($\lambda \rightarrow 1$) 时, 对位错的吸引力都会变得很大。

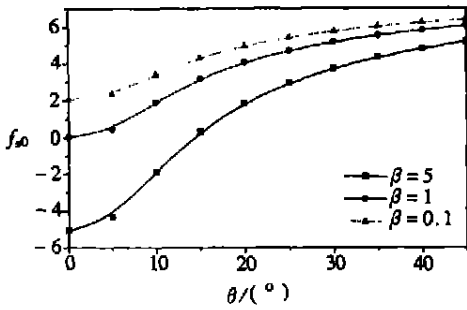


图2 β 取不同值, $\alpha = 1, \lambda = 0.9$ 时, f_{x0} 随 θ 的变化

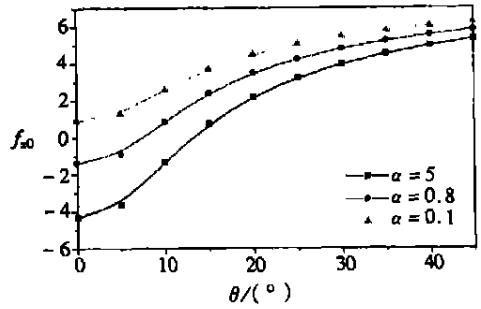


图3 α 取不同值, $\beta = 1.5, \lambda = 0.9$ 时, f_{x0} 随 θ 的变化

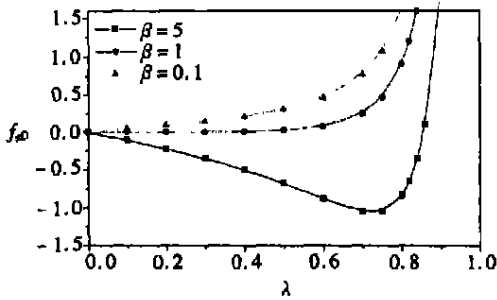


图4 β 取不同值, $\alpha = 1, \theta = 20^\circ$ 时, f_{x0} 随 λ 的变化

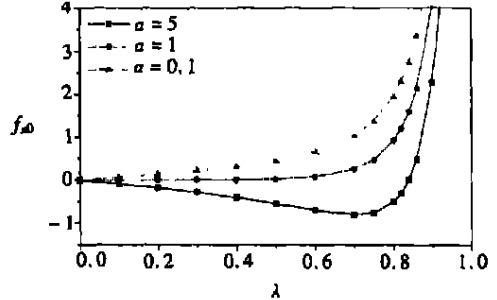


图5 α 取不同值, $\beta = 1, \theta = 20^\circ$ 时, f_{x0} 随 λ 的变化

5 总 结

利用 Muskhelishvili 的复变函数方法,研究了压电复合材料圆形夹杂中螺型和界面裂纹的干涉效应,并给出了位错力的解析表达式。研究了裂纹几何参数和材料的电弹性常数对位错力的影响规律,结果表明界面裂纹对位错力和位错平衡位置有很强的扰动效应。本文结果可以作为格林函数研究圆形夹杂内裂纹和界面裂纹的干涉效应。

[参 考 文 献]

- [1] Kattis M A, Providas E, Kalamkarov A L. Two-phonon potentials in the analysis of smart composites having piezoelectric components[J]. Composites, Part B, 1998, 29(1): 9—14.
- [2] Deng W, Meguid S A. Analysis of a screw dislocation inside an elliptical inhomogeneity in piezoelectric solids[J]. International Journal Solids and Structures, 1999, 36(10): 1449—1469.
- [3] Meguid S A, Deng W. Electro-elastic interaction between a screw dislocation and elliptical inhomogeneity in piezoelectric materials[J]. International Journal Solids and Structures, 1998, 35(13): 1467—1482.
- [4] 刘金喜,姜稚清,冯文杰. 压电螺型位错和椭圆夹杂的电弹相互作用[J]. 应用数学和力学, 2000, 21(11): 1185—1190.
- [5] HUANG Zhen_yu, KUANG Zhen_bang. Dislocation inside a piezoelectric media with an elliptical inhomogeneity[J]. International Journal Solids and Structures, 2001, 38(46/47): 8459—8480.
- [6] LIU You_wen, FANG Qi_hong, JIANG Chi_ping. A piezoelectric screw dislocation interacting with an interphase layer between a circular inclusion and the matrix[J]. International Journal of Solids and Structures, 2004, 41(11/12): 3255—3274.

- [7] LIU You_wen, FANG Qi_hong. Electroelastic interaction between a piezoelectric screw dislocation and circular interfacial rigid lines [J]. International Journal of Solids and Structures, 2003, **40**(20): 5353—5370.
- [8] Pak Y E. Force on piezoelectric screw dislocation [J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 1990, **57**(3): 863—869.
- [9] 樊大钧. 数学弹性力学 [M]. 北京: 新时代出版社, 1983, 377—379.
- [10] Muskhelishvili N.L. Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity [M]. Leyden: Noordhoff, 1975, 331—340.
- [11] Smith E. The interaction between dislocation and inhomogeneities [J]. International Journal of Engineering Science, 1968, **6**(1): 129—143.
- [12] Lee K Y, Lee W G, Pak Y E. Interaction between a semi-infinite crack and a screw dislocation in a piezoelectric material [J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 2000, **67**(1): 165—170.

Analysis of a Screw Dislocation Inside a Circular Inclusion With Interfacial Cracks in Piezoelectric Composites

ZHENG Jian_long¹, FANG Qi_hong², LIU You_wen²

(1. School of Highway Engineering, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410076, P. R. China;

2. Department of Engineering Mechanics, Hunan University, Changsha 410082, P. R. China)

Abstract: The electroelastic interaction of a screw dislocation inside a circular inclusion with interfacial cracks in piezoelectric composite materials under anti-plane shear and in-plane electric loads at infinity is investigated. The general solution to this problem was obtained by means of Riemann-Schwarz's symmetry principle integrated with analysis of singularities of corresponding complex potentials. As a typical example, closed form expressions of the complex potentials and electroelastic field components in the matrix and inhomogeneity regions were derived explicitly when the interface contains a single crack. The image force acting on the screw dislocation was calculated by using the generalized Peach-Koehler formula. The influence of interfacial crack geometry and piezoelectric material property combinations upon the image force was discussed in detail. The results show that interfacial crack has significant perturbation effect on the image force and the equilibrium position of the screw dislocation. The presence of the interfacial crack can change the direction of the image force when the length of the crack goes up to a critical value. The obtained explicit solutions can be used as Green's functions to study the problem on the interaction between interfacial cracks and arbitrary shape crack inside the inclusion. The present solutions can lead to previously known results as the special case.

Key words: screw dislocation; interfacial crack; complex variable method; image force