应用数学和力学,第 26 卷 第 8 期(2005 年 8 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2005) 08_0988_09

箱约束变分不等式的一个简单光滑价值函数和阻尼牛顿法

乌力吉, 陈国庆

(内蒙古大学 理工学院 数学系, 呼和浩特 010021)

(张石生推荐)

摘要: 通过引入中间值函数的一类光滑价值函数, 构造了箱约束变分不等式的一种新的光滑价值函数, 该函数形式简单且具有良好的微分性质 基于此给出了求解箱约束变分不等式的一种阻尼牛顿算法, 在较弱的条件下, 证明了算法的全局收敛性和局部超线性收敛率, 以及对线性箱约束变分不等式的有限步收敛性 数值实验结果表明了算法可靠有效的实用性能

关 键 词: 箱约束变分不等式; 全局收敛; 超线性收敛; 有限步收敛

中图分类号: O211 文献标识码: A

引 言

设 $X \quad R^n$, $\boldsymbol{F}: X \quad R^n$, 变分不等式[记为 VI$(X, \boldsymbol{F})$] 是指: 求 $\boldsymbol{x} \quad X$, 使

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) \quad \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{y} \quad X \tag{1}$$

特别地, 当 $X = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] := \left\{\boldsymbol{x} \quad R^n \mid a_i \quad x_i \quad b_i,\ i \quad \mathrm{N}\right\}$ 时, 称 VI$(X, \boldsymbol{F})$ 为箱式约束变分不等式, 记为 VI$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{F})$, 其中 $\mathrm{N} := \left\{1, 2, \quad, n\right\}$, $a_i \quad \mathrm{R} \quad \left\{- \quad\right\}$, $b_i \quad \mathrm{R} \quad \left\{+ \quad\right\}$, 且 $a_i < b_i$, $i \quad \mathrm{N}$ 若对每个 $i \quad \mathrm{N}$, 均有 $a_i = 0$, $b_i = +$, 则 VI$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{F})$ 蜕化为非线性互补问题 NCP$(\boldsymbol{F})$: 求 $\boldsymbol{x} \quad R^n$, 使

$$\boldsymbol{x} \quad \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \quad \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$$

近年来, 因理论上的重要性和实际应用中的广泛性[1~3], VI$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{F})$ 和 NCP$(\boldsymbol{F})$ 数值解法的研究已引起了广泛兴趣[2~14]

求解 VI$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{F})$ 的一类重要的方法是将其等价转换成非线性方程组 $(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ 或无约束优化问题 $\min_{x \quad R^n} (\boldsymbol{x})$ 来求解[6~12], 其中 $: R^n \quad R^n$ 使 $(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ 与 VI$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{F})$ 同解, 而函数 $(\boldsymbol{x})$ 称为 VI$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{F})$ 的价值函数, 它满足 $(\boldsymbol{x}) \quad 0$ 且 $(\boldsymbol{x}) = 0$ 当且仅当 $\boldsymbol{x}$ 是 VI$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{F})$ 的解 近年来人们已经构造了 VI$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{F})$ 的许多价值函数[6~14], 一般, 这些价值函数是由上述非线性方程组 $(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ 的最小二乘问题得到, 为获得价值函数的光滑性, 相应的向量函数 $(\boldsymbol{x})$ 的构造相对比较复杂

收稿日期: 2003_12_08; 修订日期: 2005_03_10

基金项目: 高等学校优秀青年教师教学科研奖励计划资助项目(教人司[2002]123 号)

作者简介: 乌力吉(1962), 男, 内蒙古赤峰人, 副教授, 硕士(联系人. 联系地址: 内蒙古工业大学理学院数学系, 呼和浩特, 010062; Tel: + 86_471_6575425; Fax: + 86_471_6575877; E_mail: Ulji@imut.edu.cn)

本文构造的 VI$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{F})$ 的光滑价值函数 $(\boldsymbol{x})$ 具有如下特点: ( ) 与大多数利用光滑逼近得到的价值函数不同, $(\boldsymbol{x})$ 不包含任何必须趋向于零的参数, 但当 $\boldsymbol{F}$ 为 P_0_函数且 $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ 有界时仍能保证其每个稳定点都是 VI$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{F})$ 的解; ( ) $(\boldsymbol{x})$ 的形式非常简单; ( ) $(\boldsymbol{x})$ 的形式虽然不同于以往价值函数, 但本文牛顿法每迭代步的计算量却仅相当于 VI$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{F})$ 的非线性方程组的牛顿法; ( ) 该价值函数同时适用于非线性互补问题

贯穿本文, 称连续可微映射 $\boldsymbol{F}: R^n \quad R^n$ 为 C^1_函数, 若 $\boldsymbol{F}$ 的 Jacobi 阵局部 Lipschitz 连续, 则称 $\boldsymbol{F}$ 为 LC^1_函数 以 $\boldsymbol{F}\ (\boldsymbol{x})$ 表示 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 的 Jacobi 矩阵, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}\ (\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}$ 表示 $\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{x}$ 的梯度 表示欧氏范数 对任意 i N, 以 $\boldsymbol{e}_i$ 表示 n 阶单位阵 $\boldsymbol{I}$ 的第 i 个列向量 对任意向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \quad , x_n)^{\mathrm{T}} \quad R^n$, 记 $\boldsymbol{x}^+ := (x_1^+, \quad , x_n^+)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x}^- := (x_1^-, \quad , x_n^-)^{\mathrm{T}}$, 其中 $x_i^+ := \max\{0, x_i\}$, $x_i^- := \min\{0, x_i\}$, i N 对任意 $= \{ \ _1, \quad _n\}^{\mathrm{T}} \quad R^n$, 以 $\boldsymbol{D} := \operatorname{diag}(\ _1, \quad , \ _n)$ 表示以 $_1, \quad , \ _n$ 为对角元的对角矩阵 对任意指标集 , N 和 $n \quad n$ 矩阵 $\boldsymbol{M} \quad R^{n \quad n}$, 记 $\boldsymbol{M}$ 为 $\boldsymbol{M}$ 的 i 行 j 列所在元素构成的 | | | | 子阵

定义 1

( ) 称 n 阶方阵 $\boldsymbol{M} \quad R^{n \quad n}$ 为 P_0_矩阵, 若 $\boldsymbol{M}$ 的每一个主子式均非负;

( ) 称 n 阶方阵 $\boldsymbol{M} \quad R^{n \quad n}$ 为 P_矩阵, 若 $\boldsymbol{M}$ 的每一个主子式均严格正;

( ) 称 $\boldsymbol{F}: R^n \quad R^n$ 为 P_0_函数, 若 $\max\limits_{x_i \quad y_i} (x_i - y_i)[F_i(\boldsymbol{x}) - F_i(\boldsymbol{y})] \quad 0, \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \quad R^n, \boldsymbol{x}$

$\boldsymbol{y}$

定义 2 设 $\boldsymbol{x}^*$ 是 VI$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{F})$ 的解 记指标集

$$\begin{cases} := \left\{ i \quad \mathrm{N} \mid (x_i^* - a_i)(x_i^* - b_i) \quad 0, F_i(x^*) = 0 \right\}, \\ := \ _1 \quad \ _2, \begin{cases} _1 = \left\{ i \quad \mathrm{N} \mid x_i^* - b_i = 0, F_i(x^*) = 0 \right\}, \\ _2 = \left\{ i \quad \mathrm{N} \mid x_i^* - a_i = 0, F_i(x^*) = 0 \right\}, \end{cases} \\ := \ _1 \quad \ _2, \begin{cases} _1 = \left\{ i \quad \mathrm{N} \mid x_i^* - b_i = 0, F_i(x^*) \quad 0 \right\}, \\ _2 = \left\{ i \quad \mathrm{N} \mid x_i^* - a_i = 0, F_i(x^*) \quad 0 \right\} \end{cases} \end{cases} \tag{2}$$

称 $\boldsymbol{x}^*$ 为 R_正则的, 若 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*)$ 非奇且其 Schur 补

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*) \quad - \quad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*) \quad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*)^{-1} \quad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*)$$

为 P_矩阵

1 箱约束变分不等式的一个光滑价值函数及其性质

引入中间值函数

$$\operatorname{mid}(u, v, w) := \begin{cases} u, & \text{若 } w < u, \\ w, & \text{若 } u \quad w \quad v, \quad - \quad u < v \quad + \quad , w \quad \mathrm{R}, \\ v, & \text{若 } v < w, \end{cases} \tag{3}$$

易见 $\boldsymbol{x}^*$ 为 VI$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{F})$ 之解当且仅当 $\boldsymbol{x}^*$ 为如下非光滑方程组之解:

$$\operatorname{mid}(x_i - b_i, x_i - a_i, F_i(\boldsymbol{x})) = 0, \qquad i \quad \mathrm{N} \tag{4}$$

定义函数 $: R^3 \quad \mathrm{R}$ 如下:

$$(u, v, w) := \frac{1}{2}\left[(u^+)^2 + (v^-)^2 + \frac{(u^- \ w^-)^2}{u^2 + w^2} + \frac{(v^+ \ w^+)^2}{v^2 + w^2} \right],$$

$$- \quad u < v \quad + \quad , w \quad \mathrm{R},\tag{5}$$

并规定: 当 $u^2+w^2=0$ 时 $(u^- w^-)^2/(u^2+w^2)=0$, 当 $v^2+w^2=0$ 时 $(v^+ w^+)^2/(v^2+w^2)=0$; 当 $u=-$ 时 $u^+ \quad 0$ 且 $(u^-)^2/(u^2+w^2) \quad 1$, 当 $v=+$ 时 $v^- \quad 0$ 且 $(v^+)^2/(v^2+w^2) \quad 1$ 不难验证 (u,v,w) 在 R^3 上连续可微且其梯度为

$$(u,v,w)=\begin{pmatrix} {}_u(u,v,w) \\ {}_v(u,v,w) \\ {}_w(u,v,w) \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} u^+ + u^- (w^-)^4/(u^2+w^2)^2 \\ v^- + v^+ (w^+)^4/(v^2+w^2)^2 \\ (u^-)^4 w^- /(u^2+w^2)^2 + (v^+)^4 w^+ /(v^2+w^2)^2 \end{pmatrix},\tag{6}$$

如果 $u=-$, 则 (u,v,w) 化简为 (v,w) 的二元函数, 这时梯度(6) 的形式为

$$[\quad (u,v,w)]^{\mathrm{T}}=(\ {}_v(u,v,w),\ {}_w(u,v,w)),$$

同理讨论 $v=+$ 的情形 特别地, 当 $u=-$ 和 $v=+$ 同时成立时,

$$(u,v,w)=\ {}_w(u,v,w)$$

引理 3

( ) $(u,v,w) \quad 0$ 且 $(u,v,w)=0 \quad \mathrm{mid}(u,v,w)=0,\ - \quad u<v \quad + \quad , w \quad \mathrm{R}$;

( ) $(1/4)\mathrm{mid}(u,v,w)^2 \quad (u,v,w) \quad \mathrm{mid}(u,v,w)^2,\ - \quad u<v \quad + \quad , w \quad \mathrm{R}$;

( ) (u,v,w) 在 R^3 上连续可微, (u,v,w) 局部 Lipschitz 连续, 且 $(u,v,w)=\mathbf{0} \quad \mathrm{mid}(u,v,w)=0$ 特别地, 当 $u=-$ 或 $v=+$ 时, 这一结论仍然成立

证明 由 (u,v,w) 的定义(5) 和式(6) 易得

现考虑箱约束变分不等式 VI$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{F})$, 限于篇幅本文仅考虑 $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ 为有界集的情形, 无界情形可类似讨论 记 $u_i=x_i-b_i, v_i=x_i-a_i, w_i=F_i(\boldsymbol{x}), i \quad \mathrm{N}$ 引入 VI$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{F})$ 的价值函数 $:R^n \quad \mathrm{R}$,

$$(\boldsymbol{x}):=\sum_{i=1}^{n}\ {}_i(\boldsymbol{x}),\quad {}_i(\boldsymbol{x}):=\ (u_i,v_i,w_i),\qquad i \quad \mathrm{N}\tag{7}$$

并定义向量函数 $\boldsymbol{L},\ ,\boldsymbol{H}:R^n \quad R^n$,

$$L_i(\boldsymbol{x}):=\ {}_u(u_i,v_i,w_i)+\ {}_v(u_i,v_i,w_i)+\ {}_w(u_i,v_i,w_i),\tag{8}$$

$$ {}_i(\boldsymbol{x}):=\ {}^1_i(\boldsymbol{x})+\ {}^2_i(\boldsymbol{x}),\tag{9}$$

$$ {}^1_i(\boldsymbol{x}):=\begin{cases} {}_u(u_i,v_i,w_i)/L_i(\boldsymbol{x}), & L_i(\boldsymbol{x}) \quad 0, \\ v_i/(b_i-a_i), & L_i(\boldsymbol{x})=0,\ u_iv_i=0, \\ \min\left\{1,\ (\boldsymbol{x})\right\} v_i/(b_i-a_i), & L_i(\boldsymbol{x})=0,\ u_iv_i \quad 0, \end{cases}\tag{10}$$

$$ {}^2_i(\boldsymbol{x}):=\begin{cases} {}_v(u_i,v_i,w_i)/L_i(\boldsymbol{x}), & L_i(\boldsymbol{x}) \quad 0, \\ -\ u_i/(b_i-a_i), & L_i(\boldsymbol{x})=0,\ u_iv_i=0, \\ -\min\left\{1,\ (\boldsymbol{x})\right\} u_i/(b_i-a_i), & L_i(\boldsymbol{x})=0,\ u_iv_i \quad 0, \end{cases}\tag{11}$$

$$H_i(\boldsymbol{x}):=\ {}^1_i(\boldsymbol{x})u_i+\ {}^2_i(\boldsymbol{x})v_i+[1-\ {}_i(\boldsymbol{x})]w_i\tag{12}$$

引理 4

( ) ${}_i(\boldsymbol{x}) \quad L_i^2(\boldsymbol{x}) \quad 4\ {}_i(\boldsymbol{x}), i \quad \mathrm{N}$, 从而 $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x})=\mathbf{0} \quad \boldsymbol{x}$ 为 VI$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{F})$ 之解;

( ) ${}_i(\boldsymbol{x})(1-\ {}_i(\boldsymbol{x})) \quad 0, i \quad \mathrm{N}$; 若 $\boldsymbol{x}$ 非 VI$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{F})$ 之解, 则有 ${}_i(\boldsymbol{x}) \quad (0,1], i \quad \mathrm{N}$;

( ) $H_i(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}L_i(\boldsymbol{x}) = 2\ _i(\boldsymbol{x}),\ i\quad \mathrm{N}$;

( ) $_i(\boldsymbol{x})\quad H_i^2(\boldsymbol{x})\quad 4\ _i(\boldsymbol{x}),\ i\quad \mathrm{N}$

证明

( ) 由不等式 $1/2\quad (s^3+t^3)^2/(s^2+t^2)^3\quad 1(s>0,\ t>0)$ 经简单计算可得;

( ) 若 $L_i(\boldsymbol{x})\quad 0$, 则由 $_i(\boldsymbol{x})$ 之定义知 $L_i^2(\boldsymbol{x})\ _i(\boldsymbol{x})(1-\ _i(\boldsymbol{x}))\quad 0$, 再注意到

$$L_i(\boldsymbol{x})\ _i(\boldsymbol{x}) = u_i^+ + \frac{u_i^-(w_i^-)^4}{(u_i^2+w_i^2)^2} + v_i^- + \frac{v_i^+(w_i^+)^4}{(v_i^2+w_i^2)^2} = 0\quad L_i(\boldsymbol{x}) = 0,\qquad i\quad \mathrm{N},$$

即刻得结论;

( ) 由 $L_i(\boldsymbol{x}), H_i(\boldsymbol{x}),\ _i(\boldsymbol{x})$ 之定义直接得到;

( ) 由 $^1_i(\boldsymbol{x}),\ ^2_i(\boldsymbol{x}), H_i(\boldsymbol{x})$ 之定义利用结论( ), ( ) 可得

命题 5 若 $\boldsymbol{F}: R^n\quad R^n$ 为 $C^1(LC^1)$ _函数, 则 $(\boldsymbol{x}): R^n\quad \mathrm{R}$ 也为 $C^1(LC^1)$ _函数; 且 $(\boldsymbol{x})$ 的梯度可表示为

$$(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{D}_{(x)} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}_{(x)})\boldsymbol{F}\ (\boldsymbol{x})]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}),\tag{13}$$

其中 $\boldsymbol{D}_{(x)} = \mathrm{diag}(\ _1(\boldsymbol{x}),\quad ,\ _n(\boldsymbol{x}))$; 进而, 如果矩阵 $\boldsymbol{D}_{(x)} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}_{(x)})\boldsymbol{F}\ (\boldsymbol{x})$ 非奇异, 则 $\boldsymbol{x}$ 为 $\mathrm{VI}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{F})$ 之解 $\quad (\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$

证明 $(\boldsymbol{x})$ 为 $C^1(LC^1)$ _函数的证明由引理 3 及复合函数求导法则得到 且有

$$(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n}[(\ _u(u_i, v_i, w_i) + \ _v(u_i, v_i, w_i))\boldsymbol{e}_i + \ _w(u_i, v_i, w_i)\quad F_i(\boldsymbol{x})],\tag{14}$$

若 $L_i(\boldsymbol{x})\quad 0$, 由(14) 知 $\quad _i(\boldsymbol{x}) = [\ _i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_i + (1-\ _i(\boldsymbol{x}))\quad F_i(\boldsymbol{x})]L_i(\boldsymbol{x})$; 若 $L_i(\boldsymbol{x}) = 0$, 则有 $_u(u_i, v_i, w_i) + \ _v(u_i, v_i, w_i) = 0 = \ _w(u_i, v_i, w_i)$, 故 $\quad _i(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ 由此易知式(13) 成立, 且当 $\boldsymbol{D}_{(x)} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}_{(x)})\boldsymbol{F}\ (\boldsymbol{x})$ 非奇异时, $\quad (\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$, 再由引理 4( ) 便得结论

推论 6 若 $\boldsymbol{F}$ 为可微 P_0_函数且 $(\boldsymbol{x})\quad 0$, 则矩阵 $\boldsymbol{D}_{(x)} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}_{(x)})\boldsymbol{F}\ (\boldsymbol{x})$ 非奇异, 从而 $\quad (\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{x}$ 为 $\mathrm{VI}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{F})$ 之解

命题 7 若 $\boldsymbol{F}$ 为可微 P_0_函数且 $(\boldsymbol{x})\quad 0$, 则 $\boldsymbol{d} := -[\boldsymbol{D}_{(x)} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}_{(x)})\boldsymbol{F}\ (\boldsymbol{x})]^{-1}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$ 有定义且满足

$$\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\quad (\boldsymbol{x}) = -2\ (\boldsymbol{x}) < 0,\tag{15}$$

即 $\boldsymbol{d}$ 是 $(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}$ 处的一个下降方向

证明 由推论 6、命题 5( ) 和引理 4 可得

2 算法及其收敛性

算法 8 (箱约束变分不等式的阻尼牛顿法)

步 0(初始步) 任取初始点 $\boldsymbol{x}^0\quad R^n$, 参数 $\ >0,\ p>2$, 线搜索参数 $\mathrm{R\ I}\ (0, 1/2),\ Q\ I\ (0, 1)$, 结束精度 $\mathrm{E}>0$, 置 $k=0$#

步 1(终止准则) 若 $\mathrm{H}(\boldsymbol{x}^k)\ [\ E$, 则停止, 否则转步 2;

步 2(求下降方向 $\boldsymbol{d}^k$) 按式(9) 计算 $\mathrm{S}_i(\boldsymbol{x}^k),\ i\ I\ \mathrm{N}$, 关于 $\boldsymbol{d}^k$ 求解线性方程组

$$[\boldsymbol{DS}_{(\boldsymbol{x}^k)} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{DS}_{(\boldsymbol{x}^k)})\boldsymbol{Fc}(\boldsymbol{x}^k)]\boldsymbol{d}^k + \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}^k) = \boldsymbol{0},\tag{16}$$

其中 $\boldsymbol{DS}_{(\boldsymbol{x}^k)} = \mathrm{diag}(S_1(\boldsymbol{x}^k),\ ,\ , S_n(\boldsymbol{x}^k))$, 若式(16) 无解或 $\boldsymbol{d}^k$ 不满足不等式

$$\ddot{}\mathrm{H}(\boldsymbol{x}^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}^k\ [\ -\ D+\boldsymbol{d}^k+^p,\tag{17}$$

则取 $\boldsymbol{d}^k = -\nabla\Psi(\boldsymbol{x}^k)$;

步 3(线搜索) 确定线搜索步长 $t_k = \rho^{l_k}$, 其中 l_k 是使如下不等式成立的最小非负整数,

$$\Psi(\boldsymbol{x}^k + \rho^l\boldsymbol{d}^k) \leq \Psi(\boldsymbol{x}^k) + \sigma\rho^l\nabla\Psi(\boldsymbol{x}^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}^k; \tag{18}$$

步 4(产生新的迭代点并循环) 令 $\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k + t_k\boldsymbol{d}^k$, 置 $k = k+1$, 转步 1。

定理 9 设 $\boldsymbol{F}$ 为连续可微 P_0_函数, $\{\boldsymbol{x}^k\}$ 为 $\varepsilon = 0$ 时算法产生的无穷点列, 则 $\lim_{k\to\infty}\Psi(\boldsymbol{x}^k) = 0$, $\{\boldsymbol{x}^k\}$ 有界且其任一聚点 $\boldsymbol{x}^*$ 均为 VI$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{F})$ 之解。

证明 因 $\{\Psi(\boldsymbol{x}^k)\}$ 单调递减且有下界 $\Psi(\boldsymbol{x}^k)\geq 0$, 故必有 $\lim_{k\to\infty}\Psi(\boldsymbol{x}^k) = \Psi^* \geq 0$。而由 $\Psi(\boldsymbol{x})$ 的定义知水平集 $S_0 := \{\boldsymbol{x}\in R^n \mid \Psi(\boldsymbol{x}) \leq \Psi(\boldsymbol{x}^0)\}$ 有界, 故 $\{\boldsymbol{x}^k\}\subset S_0$ 有界从而必有聚点 $\boldsymbol{x}^*$ 且 $\Psi^* = \Psi(\boldsymbol{x}^*)$。下面只须证 $\Psi^* = 0$ 即可。采用反证法证明, 鉴于篇幅要求及所用的方法是标准过程, 具体内容省略。 □

定理 10 设 $\boldsymbol{F}$ 是 C^1_函数, $\{\boldsymbol{x}^k\}$ 是由算法产生的点列。若 $\{\boldsymbol{x}^k\}$ 有一个聚点 $\boldsymbol{x}^*$ 为 VI$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{F})$ 的 R_正则解, 则点列 $\{\boldsymbol{x}^k\}$ 局部超线性收敛到 $\boldsymbol{x}^*$; 若 $\boldsymbol{F}$ 为 LC^1_函数, 则 $\{\boldsymbol{x}^k\}$ 局部二次收敛到 $\boldsymbol{x}^*$。

证明 因 $\boldsymbol{x}^*$ 是 VI$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{F})$ 的 R_正则解, 由 $\Lambda(\boldsymbol{x})$ 的定义, 有

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^*}\lambda_i(\boldsymbol{x})\begin{cases} = 0, & i\in A,\\ \in [0,1], & i\in B,\\ = 1, & i\in C,\end{cases}$$

故在 $\boldsymbol{x}^*$ 的充分小邻域 $U(\boldsymbol{x}^*)$ 内, 矩阵 $\boldsymbol{D}\Lambda(\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}\Lambda(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x})$ 是非奇异的且存在常数 $C > 0$, 使得 $\|[\boldsymbol{D}\Lambda(\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}\Lambda(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x})]^{-1}\| \leq C$。这时由方程组(16)解出的 $\boldsymbol{d}$ 满足 $\|\boldsymbol{d}\| \leq 2C\sqrt{\Psi(\boldsymbol{x})}$, 故由式(15)有 $\nabla\Psi(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d} \leq -\|\boldsymbol{d}\|^2/(2C^2)$, 注意到 $\delta > 0$, $p > 2$, 易见不等式(17)这时恒成立。于是, 在 $\boldsymbol{x}^*$ 的充分小邻域内, 下降方向均由式(16)确定, 且有

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d} - \boldsymbol{x}^*\| &= \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^* - [\boldsymbol{D}\Lambda(\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}\Lambda(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x})]^{-1}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})\| = \\ & C\|\boldsymbol{D}\Lambda(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}^* + \boldsymbol{D}\Lambda(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}^* + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}\Lambda(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{w}^*\| + o\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*\|,\end{aligned} \tag{19}$$

注意到 $\boldsymbol{x}^*$ 是 VI$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{F})$ 的解, 由 $\Lambda_i^1(\boldsymbol{x})$、$\Lambda_i^2(\boldsymbol{x})$ 的定义知, 对任意充分靠近 $\boldsymbol{x}^*$ 的 $\boldsymbol{x}$, 有 $\Lambda_i^1(\boldsymbol{x})u_i^* + \Lambda_i^2(\boldsymbol{x})v_i^* + (1 - \Lambda_i(\boldsymbol{x}))w_i^* = o(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*\|^2)$, 故 $\|\boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{d}^k - \boldsymbol{x}^*\| = o(\|\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{x}^*\|)$; 若 $\boldsymbol{F}$ 是 LC^1_函数, 则在不等式(19)中余项为 $O(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*\|^2)$, 此时 $\|\boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{d}^k - \boldsymbol{x}^*\| = O(\|\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{x}^*\|^2)$。

另一方面, 令 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) := \mathrm{mid}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}))$。因 $\boldsymbol{x}^*$ R_正则且 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})$ 局部 Lipschitz 连续, 由文献[10]的命题 8 知, $\|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d})\| = o(\|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\|)$。再由引理 3( )得

$$\Psi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}) = O(\|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d})\|^2) = o(\|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\|^2) = o(\Psi(\boldsymbol{x})), \qquad \boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^*。$$

注意到 $\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\nabla\Psi(\boldsymbol{x}) = 2\Psi(\boldsymbol{x})$, 故在 $\boldsymbol{x}^*$ 的充分小邻域内, 算法步 3 中线搜索步长总能取到 $t_k = 1$。从而定理得证。 □

如果把 $\Lambda^1(\boldsymbol{x})$ 和 $\Lambda^2(\boldsymbol{x})$ 的定义稍作修改, 即对任意 $\boldsymbol{x}$, 当 $L_i(\boldsymbol{x}) = 0$, $u_iv_i \neq 0$ 时定义 $\Lambda_i^1(\boldsymbol{x}) = \Lambda_i^2(\boldsymbol{x}) = 0$, 其他情形仍定义如式(10)、(11), 则有

定理 11 设 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{M}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{q}$ 且矩阵 $\boldsymbol{M}$ 为 P_矩阵。则算法有限步收敛到 VI$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{F})$ 之解。

证明 设 $\boldsymbol{x}^*$ 是 VI$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{F})$ 的解。因 $\boldsymbol{M}$ 为 P_矩阵, 故 $\boldsymbol{x}^*$ 为正则解且存在常数 $C > 0$, 使 $\|\boldsymbol{D}\Lambda(\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}\Lambda(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x})\|^{-1} \leq C$, $\forall\boldsymbol{x}\in R^n$。由定理 10 的证明知, $\boldsymbol{d}^k$ 总由式(16)确

定,且对充分大的 k 有 $\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{d}^k$。因此由式(16)有

$$\boldsymbol{D}_{S(x^k)}\boldsymbol{u}^{k+1} + \boldsymbol{D}_{S(x^k)}\boldsymbol{v}^{k+1} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}_{S(x^k)})\boldsymbol{w}^{k+1} = \boldsymbol{0}。\tag{20}$$

故对充分大的 k 和每个 $i \in N$, $u_i^{k+1}, v_i^{k+1}, w_i^{k+1}$ 不可能同号, 从而由 $S^1(\boldsymbol{x})$ 和 $S^2(\boldsymbol{x})$ 的定义, 必有 $S_i^1(\boldsymbol{x}^{k+1})S_i^2(\boldsymbol{x}^{k+1}) = 0$。而由式(20)又有 $[S_i^1(\boldsymbol{x}^{k+1})u_i^{k+1} + S_i^2(\boldsymbol{x}^{k+1})v_i^{k+1}]w_i^{k+1} \leq 0$, 故对充分大的 k 有

$$S_i^1(\boldsymbol{x}^k)\begin{cases} = 1, & i \in C_1, \\ \in [0, 1], & i \in B_1, \\ = 0, & \text{否则}, \end{cases} \qquad S_i^2(\boldsymbol{x}^k)\begin{cases} = 1, & i \in C_2, \\ \in [0, 1], & i \in B_2, \\ = 0, & \text{否则}, \end{cases}$$

这意味着算法有限步内得到精确解。 □

3　数值实验

本节讨论数值实验结果。程序由 Fortran 语言编写并在普通 PC 机上运行。算法中有关参数取为 $Q = 0.5$, $R = 10^{-4}$, $D = 10^{-12}$, $p = 2.1$, $E = 10^{-12}$。F_{eval} 表示算法中函数值 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 的计算次数。对给定的实数 $u < v$, 记 $[u, v]^n = \{\boldsymbol{x} \in R^n \mid u \leq x_i \leq v, i \in N\}$。

算例 1

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_1^3 - 8 \\ x_2 - x_3 + x_2^3 + 3 \\ x_2 + x_3 + 2x_3^3 - 3 \\ x_4 + 2x_4^3 \end{pmatrix}$$

为严格单调函数从而为 P_0_函数。考虑两种情形:(　) $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = [0, 5]^4$, 解为 $\boldsymbol{x}^* = (2, 0, 1, 0)^T$, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*) = (0, 2, 0, 0)^T$, 该解为退化解且非 R_正则;(　) $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = [-1, 1]^4$, 解为 $\boldsymbol{x}^* = (1, -1, 1, 0)^T$, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*) = (-7, 0, -1, 0)^T$, 该解为退化解但 R_正则。

表 1　算例 1 的数值结果

$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$	$\boldsymbol{x}^0$	$\boldsymbol{x}^k$	$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^k)$	k	F_{eval}	$H(\boldsymbol{x}^k)$
$[0, 5]^4$	$\begin{pmatrix} 2.5 \\ 2.5 \\ 2.5 \\ 2.5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2.000\,000 \\ 0.000\,000 \\ 1.000\,000 \\ 0.000\,000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.000\,000 \\ 2.000\,000 \\ 0.000\,000 \\ 0.000\,000 \end{pmatrix}$	8	63	2.2E-20
$[-1, 1]^4$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.000\,000 \\ -1.000\,000 \\ 1.000\,000 \\ 0.000\,000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -7.000\,000 \\ 0.000\,000 \\ -1.000\,000 \\ 0.000\,000 \end{pmatrix}$	4	39	1.7E-20

算例 2

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

为单调函数从而为 P_0_函数。考虑两种情形:

( ) $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = [-1, 1]^4$, 解为 $\boldsymbol{x}^* = (1, 8/9, 5/9, 4/9)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*) = (-2/3, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$;

( ) $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = [-5, 5]^4$, 解为 $\boldsymbol{x}^* = (4/3, 7/9, 4/9, 2/9)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*) = (0, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$#

表 2 算例 2 的数值结果

$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$	$\boldsymbol{x}^0$	$\boldsymbol{x}^k$	$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^k)$	k	F_{eval}	$\mathrm{H}(\boldsymbol{x}^k)$
$[-1, 1]^4$	$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1.000\,000\\0.888\,889\\0.555\,556\\0.444\,444\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-0.666\,666\\0.000\,000\\-1.000\,000\\-0.000\,000\end{pmatrix}$	5	10	2.6E-15
$[-5, 5]^4$	$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1.333\,333\\0.777\,777\\0.444\,444\\0.222\,222\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.000\,000\\0.000\,000\\0.000\,000\\0.000\,001\end{pmatrix}$	3	5	6.3E-13

算例 3

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3 + 3x_4 - 6 \\ 2x_2^2 + x_1 + x_2^2 + 10x_3 + 2x_4 - 2 \\ 3x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_3 + 9x_4 - 9 \\ x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3 + 3x_4 - 3 \end{pmatrix}$$

为非 P_0_函数# 考虑两种情形:

( ) $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = [-1/2, 1/2]^4$, 解为 $\boldsymbol{x}^* = (1/2, -1/2, 1/2, 1/3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*) = (-15/4, 59/12, -4, 0)^{\mathrm{T}}$;

( ) $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = [0, 3]^4$, 有两个解分别为 $\boldsymbol{x}^* = (1, 0, 3, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*) = (0, 31, 0, 4)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{x}^* = (\sqrt{6}/2, 0, 0, 1/2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*) = (0, 2+\sqrt{6}/2, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x}^*$ 为退化解, $\boldsymbol{x}^*$ 为非退化解#

表 3 算例 3 的数值结果

$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$	$\boldsymbol{x}^0$	$\boldsymbol{x}^k$	$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^k)$	k	F_{eval}	$\mathrm{H}(\boldsymbol{x}^k)$
$[-0.5, 0.5]^4$	$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.500\,000\\-0.500\,000\\0.500\,000\\0.333\,333\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-3.750\,001\\4.916\,666\\-4.000\,001\\-0.000\,000\end{pmatrix}$	5	9	5.0E-13
$[0, 3]^4$	$\begin{pmatrix}0.5\\0.5\\0.5\\0.5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1.224\,745\\0.000\,000\\0.000\,000\\0.499\,999\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.000\,000\\3.224\,744\\0.000\,000\\0.000\,000\end{pmatrix}$	7	36	5.3E-13
$[0, 3]^4$	$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1.000\,000\\0.000\,000\\3.000\,000\\0.000\,000\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.000\,000\\31.000\,000\\0.000\,000\\4.000\,000\end{pmatrix}$	9	44	4.3E-24

算例 4 n 维随机生成线性箱约束变分不等式VI$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{F})$# $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{Mx} + \boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$, 其中 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 和 n 阶反对称矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的元素为 $[-5, 5]$ 内的均匀分布伪随机数, $\boldsymbol{q}$ I R^n

的元素为$[-500, 500]$内的均匀分布伪随机数，$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = [-2, 2]^n$，初始点$\boldsymbol{x}^0 = (0.5, \cdots, 0.5)^{\mathrm{T}}$。计算了$n=50$至800的10类，每类10个例子。为使$\boldsymbol{x}$与$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$在数量级上相对均衡，采用了规范化技术，即求解等价的箱约束变分不等式VI$([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \boldsymbol{F})$，其中$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{DMx} + \boldsymbol{Dq}$，$\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}\left\{\| \boldsymbol{m}_1 \|^{-1}, \cdots, \| \boldsymbol{m}_n \|^{-1}\right\}$，$\boldsymbol{m}_i$为矩阵$\boldsymbol{M}$的第$i$行。

表4　　算例4的数值结果

变量个数 n		50	100	150	200	300	400	500	600	700	800
迭代次数 k	最大	12	13	16	13	15	17	19	17	19	24
	平均	9.1	10.2	10.9	10.9	11.2	13.0	14.7	14.0	15.4	16.1
	最小	7	8	7	9	9	9	11	12	12	13

算例1~4的计算结果见表1~4。从中看出，本文算法经过很少迭代便求得问题之解，且随着问题规模的增长，迭代次数增长缓慢，表明了算法可靠有效的实际性能。

致谢　作者衷心感谢审稿人的细心审阅及宝贵意见。

[参　考　文　献]

[1] Ferris M C, Pang J S. Engineering and economic applications of complementarity problems[J]. SIAM Review, 1997, **39**(4): 669—713.

[2] Facchinei F, Pang J S. Finite_Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems[M]. New York, Berlin, Heidelberg: Springer_Verlag, 2003.

[3] Leung A Y T, CHEN Guo_qing, CHEN Wan_ji. Smoothing Newton method for two_ and three_dimensional frictional contact problems[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1998, **41**(6): 1001—1027.

[4] 修乃华, 高自友. 互补问题算法的新进展[J]. 数学进展, 1999, **28**(3): 193—210.

[5] 乌力吉, 陈国庆. 非线性互补问题的一种新的光滑价值函数及牛顿类算法[J]. 计算数学, 2004, **26**(3): 315—328.

[6] 陈国庆, 曹兵. 箱式约束变分不等式的一种新NCP_函数及其广义牛顿法[J]. 计算数学, 2002, **24**(1): 91—104.

[7] Gabriel S A, More J J. Smoothing of mixed complementarity problems[A]. In: Ferris M C, Pang J S Eds. Complementarity and Variational Problems: State of the Art[C]. Philadelphia: SIAM, 1996, 105—116.

[8] SUN De_feng, Womersley R S. A new unconstrained differentiable merit function for box constrained variational inequality problems and a damped Guass_Newton method[J]. SIAM J Optim, 1999, **9**(2): 388—413.

[9] QI Li_qun, SUN De_feng, ZHOU Guang_lu. A new look at smoothing Newton methods for nonlinear complementarity problems and box constrained variational inequalities[J]. Math Programming, 1999, **87**(1): 1—35.

[10] Ferris M C, Kanzow C, Munson T S. Feasible descent algorithms for mixed complementarity problems[J]. Math Programming, 1999, **86**(3): 475—497.

[11] Kanzow C. Strictly feasible equation_based methods for mixed complementarity problems[J]. Numer Math, 2001, **89**(1): 135—160.

[12] QI Hou_duo. A regularized smoothing Newton method for box constrained variational inequality problems with P_0_functions[J]. SIAM J Optim, 1999, **10**(2): 315—350.

[13] CHEN Chun_hui, Mangasarian O L. A class of smoothing functions for nonlinear and mixed comple-

Computational Optimization and Applications, 1996, **5**(1): 97) 138.

[14] Fischer A, JIANG Hou_yuan. Merit functions for complementarity and related problems: a survey[J]. Computational Optimization and Applications, 2000, **17**(1/2): 159) 182.

New Simple Smooth Merit Function for Box Constrained Variational Inequalities and Damped Newton Type Method

Ulji, CHEN Guo_qing
(Department of Mathematics, College of Science and Technology, Inner Mongolia University, Hohhot 010021, P.R.China)

Abstract: By introducing a smooth merit function for the median function, a new smooth merit function for box constrained variational inequalities (BVIs) was constructed. The function is simple and has some good differential properties. A damped Newton type method was presented based on it. Global and local superlinear/quadratic convergence results were obtained under mild conditions, and the finite termination property was also shown for the linear BVIs. Numerical results suggest that the method is efficient and promising.

Key words: box constrained variational inequality; global convergence; local superlinear or quadratic convergence; finite termination property