

文章编号: 1000_0887(2005) 10_1216_13

用于高速可压缩流体分析的带多维耗散 格式的自适应 Delaunay 三角剖分*

P·德乔姆凡, S·封查那帕尼

(机械工程系, 朱拉隆功大学, 曼谷 10330, 泰国)

(周哲玮推荐)

摘要: 利用自适应 Delaunay 三角剖分并结合胞格中心迎风算法, 分析非粘滞高速可压缩流体问题。推导了多维耗散格式, 并采用非结构化三角网格的迎风算法, 改善了激波的计算结果。解精度评价中引入误差估计, 在网格重划分算法中, 解梯度变化大的区域生成小单元格, 解梯度变化小的区域使用大单元格。该格式能进一步推广到高阶时空的解精度分析中。通过稳态和不稳态的高速可压缩流体超音速激波和激波传播特性的分析, 可以评估该算法的效率。

关键词: 自适应网格的迁移; Delaunay 三角剖分; 胞格中心迎风法; 高速可压缩流体
中图分类号: O354.5; O241.82 文献标识码: A

引 言

高速可压缩流体通常包含着众多复杂的流体现象, 如激波、流体膨胀以及激波和激波之间的相互作用等^[1]。这些现象产生的效应对高速运动结构的设计起着关键作用。此类流体的特点是解梯度急剧变化, 为此需要采用鲁棒分析, 应用计算技术以及密集的网格, 才可以获得流体行为的高精度解。有过多种算法的计算模型, 如 Taylor_Galerkin 算法^[2]、Petrov_Galerkin 算法^[3]、最小二乘法^[4]、胞格中心迎风算法^[5]等。

在这些算法中, 胞格中心迎风算法是基于 Roe 通量的平均^[6]。本文选择此算法, 该算法只需较少计算尝试, 就可得到足够的解精度。但是, 该算法在高马赫数流体激波附近, 得到的结果不可靠。这些结果中有一种被称为“红宝石”(carbuncle phenomenon) 现象^[7], 这是由于在多维问题中使用了一维迎风数值通量产生的。为了避免这种结果, 文献[8]提出了 H_+ 补偿熵, 在对结构矩形网格中运用标准的胞格中心迎风算法。本文修改了 H_+ 补偿熵, 使用自适应 Delaunay 三角剖分技术, 使其能用于任意产生的非结构化三角网格中。

Delaunay 三角剖分和自适应网格重划分技术, 改进了数值分析的解精度。首先, 介绍 Delaunay 三角剖分^[9,10], 该方法用于对任意二维几何图形构造三角网格。由于 Weatherill 和 Has-

* 收稿日期: 2004_03_10

基金项目: 泰国研究基金资助项目(TRF); 泰国皇家海军(研究基金) 资助项目

作者简介: P·德乔姆凡, 教授, 博士(联系人, Tel/Fax: + 66_2_218_6621; E_mail: finepdc@eng.chula.ac.th)•

本文原文为英文, 由海治译, 张禄坤校。

san^[11] 提出的 Delaunay 三角剖分没有包括如下内容: 如何在域中创建结点以及如何将结点加入算法。Karamete 等^[12] 将该算法用面向对象的计算机程序加以实现。这样就可以对任意二维区域构建指定密度的结点和整齐的三角网格。

为了提高分析解精度, 在 Delaunay 三角剖分中再使用自适应网格重划分技术。根据前一次网格的解, 构造新网格。通过误差控制, 对那些需要更精确单元的区域进行自适应网格重划分, 发展成为胞格中心迎风算法计算机程序, 用它来验证早先解得的实际问题的正确解。近年来, 出现了各种网格(grid) 自适应算法, 如自适应网格重划分或自适应网格精细化(AMR)^[13~20] 等, 被引入到计算流体动力学, 改进了数值计算精度。AMR 算法构造网格方便, 但是需要有效的层间数据结构, 来实现网格层间的数据交换。如果采用非结构化的三角化网格来对更复杂区域作离散化处理, 会使难度增大。而现在, 使用自适应网格重划分技术, 非结构化网格数据交换的实现成为直截了当的事情。可是, 非结构化网格的重建耗时, 作为自适应网格重划分技术, 比采用 AMR 算法耗时要少。

本文首先讨论高速可压缩流体分析中用到的 Euler 方程, 以及计算机求解的步骤, 然后介绍 Delaunay 三角剖分和自适应网格重划分技术的基本概念, 用来提高高阶解的解精度, 并用数个例子加以测试。最后, 通过对一些稳态和瞬态高速可压缩流体问题的分析, 给出其综合评价

1 高阶胞格中心迎风算法

1.1 控制微分方程

非粘滞高速可压缩流体的 Euler 方程由质量、动量和能量的守恒性构成。对于二维问题, 该方程组可以写成如下的守恒式^[21]:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

其中矢量 \mathbf{U} 是守恒量, 定义为 $[\rho \quad \rho u \quad \rho v \quad \rho \varepsilon]^T$, 其中 ρ 为流体密度, u 和 v 分别为 x 和 y 方向上的速度分量, ε 是总能量。矢量 \mathbf{E} 和 \mathbf{G} 分别为 x 和 y 方向上的非粘滞流体通量, 矢量 \mathbf{J} 包含力和与体力关联的能量项, 如下:

$$\mathbf{E} = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho u \varepsilon + p u \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{Bmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ \rho v \varepsilon + p v \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vartheta_x \\ \vartheta_y \\ \rho(u f_x + v f_y) \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

其中 p 为压强, f_x 和 f_y 为重力在 x 和 y 方向上的分量。总能量由内能和动能组成, 定义为 $\varepsilon = e + (u^2 + v^2)/2$ 。假定内能 e 满足可压缩媒质的增强气体(the stiffened gas) 状态方程^[22]:

$$\rho \varepsilon = (p + \gamma p_\infty) / (\gamma - 1), \quad (3)$$

其中 γ 为常量, p_∞ 为压强类的常量。对水来说, $\gamma = 5.5$ 、 $p_\infty = 492 \text{ MPa}$ 。当 $p_\infty = 0$, γ 为比热比时, 式(3)和气体状态方程等价。

1.2 胞格中心迎风公式

对式(1)在控制体积 Ω 上求积分, 并应用散度定理得到解通量积分:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \mathbf{U} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega} \mathbf{J} d\Omega, \quad (4)$$

其中 \mathbf{F} 为数值通量矢量, \mathbf{n} 为胞格边界的单位法向矢量。根据 Roe 格式^[6, 21], 左胞格 L 和右胞格 R 之间胞格界面的数值通量矢量为:

$$F_n = \frac{1}{2}(F_{nL} + F_{nR}) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 \alpha_k |\lambda_k| r_k, \tag{5}$$

其中 α_k 为 k 阶波的波强, λ_k 为特征值, r_k 为右特征矢量. 式(5)中的特征值为:

$$\lambda_k = [V_n - a \quad V_n \quad V_n \quad V_n + a]^T, \tag{6}$$

其中 V_n 为法向速度, a 为在胞格界面处的声速. 由于原 Roe 格式未考虑熵条件^[23], 为避免出现没有物理意义的解, 根据文献[8], 特征值 $|\lambda|$ 修改为 $|\lambda|^*$:

$$|\lambda|^* = \max(|\lambda|, \eta^H), \tag{7}$$

其中 η^H 被称为 H_- 补偿熵. 对于图 1 所示的三角形胞格界面, H_- 补偿熵为:

$$\eta^H = 0.5 \max(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5), \tag{8}$$

其中 $\eta_i, i = 1, \dots, 5$, 由 $\eta_i = 0.5 \max_i (|\lambda_R - \lambda_L|)$ 求得.

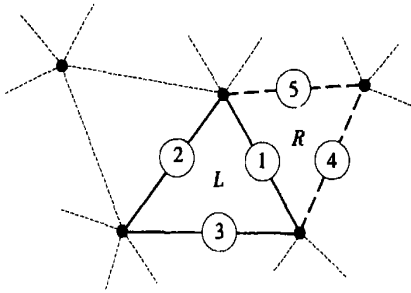


图 1 典型的非结构化三角形网格的胞格界面

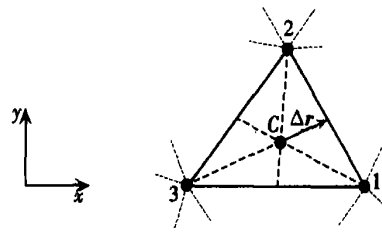


图 2 典型三角形单元线性重构

将式(5)代入式(4), 并应用显式时间前进算法, 单元守恒变量在新的时间步长 $m + 1$ 处的值可通过下式求得,

$$\Delta U^{m+1} = - \frac{\Delta t}{2\Omega} \sum_{n=1}^3 \delta \left[(F_{nL} + F_{nR}) - \sum_{k=1}^4 \alpha_k |\lambda_k|^* r_k \right] + \frac{\Delta t}{\Omega} \int_{\Omega} J d\Omega, \tag{9}$$

其中 Δt 为时间步长, δ 为单元边长. 这样结点处的守恒量可以通过所有与结点相邻单元的平均值求得.

1.3 线性重构与二阶时间离散化

通过在空间和时间上的高阶公式, 来改进前节中提供的一阶公式, 实现求解精度的提高. 对每一个胞格面的胞格中心解^[24] 进行 Taylor 公式展开, 实现空间高阶离散化. 例如, 图 2 中结点 1 和结点 2 之间一个单元边界的中点处的解, 可以重构为:

$$q_{1-2} = q_C + \frac{\Psi_C}{3} \left[\frac{(q_1 + q_2)}{2} - q_3 \right], \tag{10}$$

其中 $q = [\rho \quad u \quad v \quad p]^T$ 分别包含密度、速度分量和压强的原始变量, q_C 为单元中心的解, $q_n (n = 1, 2, 3)$ 为结点处的解. 本文采用正向原理(principle of positivity)^[25], 从中心到各结点使用逆距离加权法:

$$q_n = \frac{\sum_{i=1}^N q_{C,i} |r_i|}{\sum_{i=1}^N |r_i|}, \tag{11}$$

其中 $q_{C,i}$ 为结点 i 相邻的胞格中心的值, $|r_i|$ 为中心到结点 i 的距离, N 为相邻胞格的数量. 式(10)中的 Ψ_C 是为了限制高梯度区域内可能产生的虚假振荡, 本文中选用 Vekatakrishnan 限制函数^[26].

为了提高二阶时间精度, 可以通过二阶精确 Runge_Kutta 时间步长法^[27]:

$$U_i^* = U_i - \frac{\Delta t}{\Omega_i} \sum_{j=1}^3 F^n \cdot n_j, \quad U_i^{n+1} = \frac{1}{2} \left[U_i^0 + U_i^* - \frac{\Delta t}{\Omega_i} \sum_{j=1}^3 F^* \cdot n_j \right]. \quad (12)$$

为了在计算上能实现,局部单元时间步长采用常态分析,最小全局时间步长建议使用文献[28]中的瞬态分析。

2 Delaunay 三角剖分

2.1 网格构建过程

空间给定点集 $\{P_k\}$ ($k = 1, \dots, n$), 区域 $\{V_k\}$ ($k = 1, \dots, n$) 以指定点 P_k 为边界, 表示到点 P_k 的距离比到集合中其它点间的距离更近。因此, V_k 满足关系式

$$V_k = \left\{ P_i : |p - P_i| < |p - P_j|, \forall j \neq i \right\}. \quad (13)$$

如果将共用一个 Voronoi 边界的某些段上的所有点连接起来, 形成称为 Delaunay 三角剖分区域, 这样定义的 Delaunay 三角剖分特性称为空外接圆性质。基于圆内判据的 Bowyer-Watson 算法^[9,10] 汇总在算法 I 如下:

算法 I Delaunay 三角剖分 (P, T)

1. 设 $P = \{p_k, k = 1, \dots, n\}$ 为域内边界结点的集合, 对所有边界外侧结点按逆时针排序, 边界内侧结点按顺时针排序; 令 T 为 Delaunay 三角剖分的空集。
2. 创建一个初始凸三角形, 三角形包含所有的边界结点, 并将它加入集合 T 。
3. 从 P 中读入下一个边界结点 p_i , 并在 T 中搜索包含结点 p_i 的三角形 t_i 。搜索从最后形成的三角形开始, 并使用 Lawson 算法^[11,12], 从一个三角形沿 p_i 方向前进到下一个三角形。这种路径搜索策略能避免对整个区域作搜索。
4. 从 T 中删去与 t_i 相邻的三角形, 这些三角形处于以 Voronoi 图的顶点为圆心的圆内部。形成连接到结点 p_i 的符合圆内规则的新三角形, 将这新的三角形加入到集合 T 中并标定这些新三角形的相邻三角形。
5. 重复步骤 3 和 4 直到 P 中所有的结点都被使用。
6. 搜索区域中的所有三角形, 这些三角形有一个或多个顶点连接到最初的凸三角形外部区域的任意顶点, 或者连接到域内空白处, 并将它们从 T 中删去。

2.2 结点自动建立过程

Delaunay 三角剖分算法未提供在域内建立新结点的过程。因此, 发展出几种利用优化边界三角剖分来创建内部结点的方法^[11,12,15,29,30], 这些方法通过边界点的集合导出新的结点位置。本文采用 Weatherill 和 Hassan^[11] 提出的结点自动构造算法。三角形的形状和大小以及域内结点的密度由两个系数 α 和 β 控制。系数 α 通过改变已有三角形容许的形状来控制结点的密度, 系数 β 通过在指定距离(域内扫过相同三角形的其他点) 内禁止插入新结点来控制三角形的正则性。建立粗三角网格的 α 和 β 的建议值为 0.8 和 0.9, 建立精细三角网格的 α 和 β 的建议值为 0.5 和 0.6。结点自动建立见如下的算法 II:

算法 II 网格精细化 (P, T, α, β)

1. 设 $P = \{p_k, k = 1, \dots, n\}$ 为域边界上的结点集合, 对所有边界外侧结点按逆时针排序, 边界内侧结点按顺时针排序; 令 V 为包含新插入结点的集合, 现为空集; 设 T 为通过算法 I 建立的 Delaunay 三角剖分后的集合。
2. 计算每一个边界结点 p_i 的结点分布函数 dp_i :

$$dp_i = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M |p_j - p_i|. \quad (14)$$

3. 从 T 中读取三角形 t_i 。定义 t_i 的中心为结点 Q , 用式(14) 计算结点 Q 的结点分布函数。计算结点 Q 到三角形 t_i 的 3 个顶点的距离 $d_m (m = 1, 2, 3)$ 。
4. 执行结点 Q 的 α 和 β 系数测试:
如果 $d_m < (\alpha \cdot dp_q) (m = 1, 2, 3)$, 那么放弃结点 Q , 并返回到步骤 3; 否则, 计算插入结点 Q 到其它各结点的距离 $s_j (j = 1, \dots, N)$ 。
如果 $s_j < (\beta \cdot dp_q) (j = 1, \dots, N)$, 那么放弃结点 Q , 并返回到步骤 3; 否则, 接受通过了 Delaunay 三角剖分算法(算法 I) 得到的结点 Q 作为插入点, 并将它加入到 V 中。
5. 重复步骤 3 和 4, 直到完成 T 中所有的三角形的计算。
6. 使用算法 I 对 V 中导出结点进行 Delaunay 三角剖分。

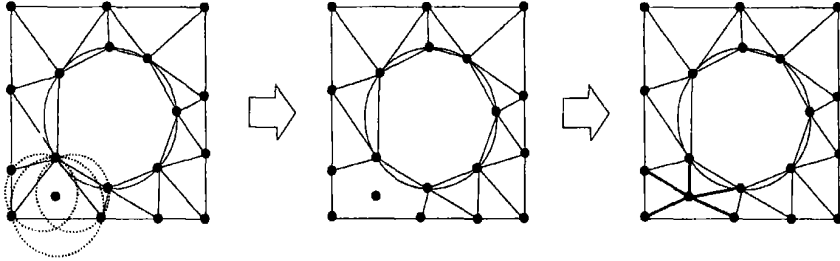


图 3 带自动结点建立格式的网格精细化(算法 II)

可以使用网格光滑技术, 如 Laplace 光滑技术^[30], 来改进上面步骤中构造的三角形的形状和大小。在三角形中心处插入一个新结点的概念如图 3 所示。图 4 中演示了利用算法 I 和算法 II 在域内插入新结点的域精细化过程。符合 α 和 β 测试规则的新结点被插入到三角形的中心, 并对所有其相邻的三角形作圆内规则检测。

3 自适应网格重划分技术

3.1 确定单元大小

高速可压缩流体的流动特性, 例如密度和压强, 在越过激波时, 会发生急剧的改变。因此在激波区必须使用小单元, 才能获得良好解析度的激波解。任一关键变量 ϕ (例如密度) 在主方向 x 和 y 上的混合偏导数为零^[17], 其二阶偏导数方向标志着密度梯度发生巨大改变, 该区域便是取小单元的位置。对所有单元的误差要一致, 来计算单元大小 h_i

$$h_i^2 \lambda = h_{\min}^2 \lambda_{\max} = \text{const}, \quad (15)$$

其中 λ 为所考虑单元中主变量中较大的那个, 即

$$\lambda = \max(|\partial^2 \phi / \partial x^2|, |\partial^2 \phi / \partial y^2|). \quad (16)$$

式(15)中, λ_{\max} 为所有单元中最大的主变量, h_{\min} 为用户自定义的最小单元尺寸。自适应算法重划分区域的精细化还是粗化, 可以用一个无量纲的误差来标识, 如压力开关系数^[16]:

$$E_l = C_v \sum_{c \in T} |2\phi_c - \phi_{c-} - \phi_{c+}| \sqrt{\sum_{c \in T} (|\phi_c - \phi_{c-}| + |\phi_c - \phi_{c+}|)}, \quad (17)$$

其中常数 C_v 在本文中恒等于 1。

3.2 生成自适应网格

以下提出的网格建立是基于 Delaunay 三角剖分概念和算法 I、II 中的网格精细化技术。利用前面网格或者后面网格的信息, 构造新的网格。这样的新网格, 由所在区域解梯度改变大时的小单元和其他区域解梯度改变小时的大单元组成。具体步骤见算法 III。

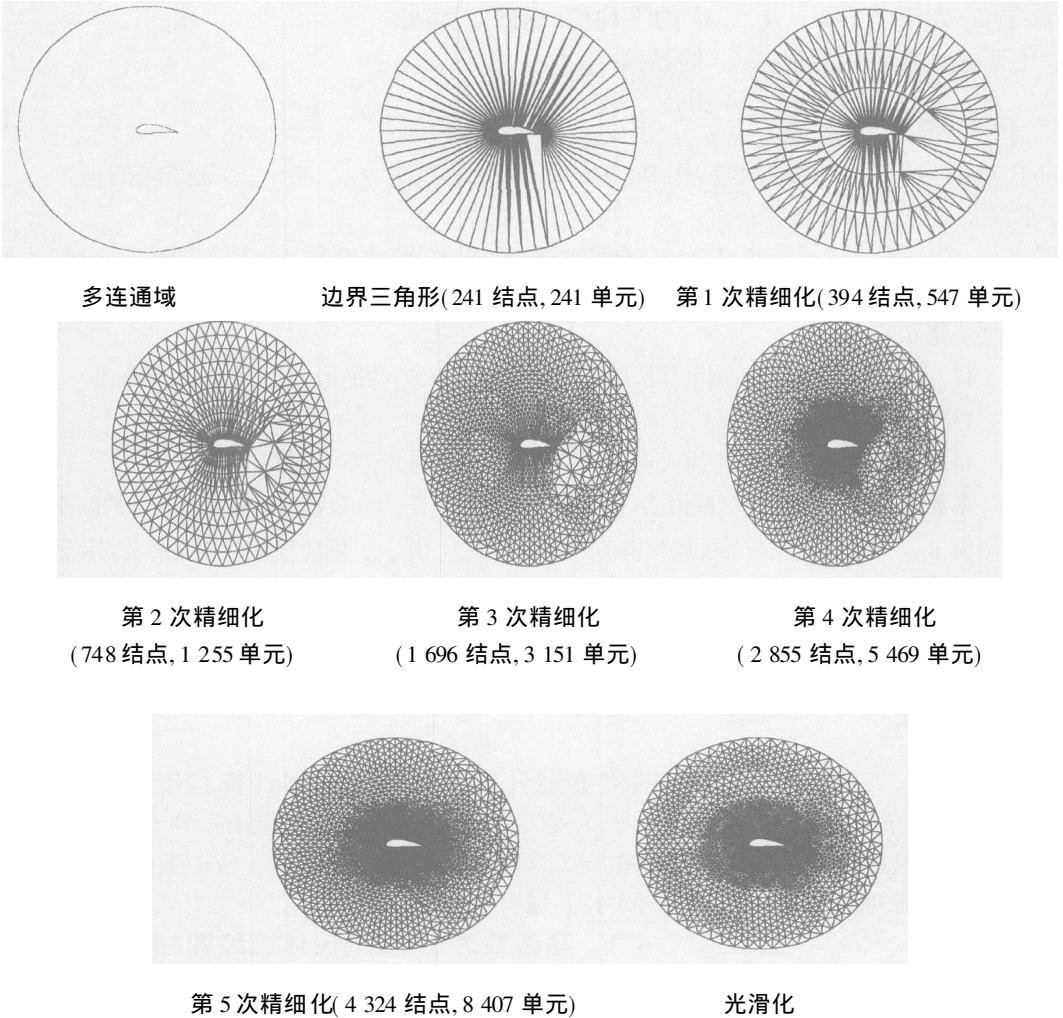


图4 一个翼面计算区域的网格精细化和光滑化过程

算法 III 自适应网格精细化($P, T, \alpha, \beta, h_{\min}, h_{\max}$)

1. 设 $P = \{p_k, k = 1, \dots, n\}$ 为后面网格的结点集合, $T = \{t_l, l = 1, \dots, m\}$ 为后面网格的三角形的集合。
2. 令 N_P 为结点的空集合, N_T 为三角形的空集合。
3. 利用公式(15)和(16)计算后面网格所有结点得到新单元格的合适大小 h_i , 然后根据合适大小的 h_i 重新离散化区域所有边界, 并重新计算所有边界结点的结点分布函数 dp_i , 然后再将所有结点加入集合 N_P 。
4. 通过内插后面网格结点解的值, 获得新网格的结点解的值。根据算法 I, 由 N_P 中的新边界结点构造边界三角形, 然后将所有新三角形加入到 N_T 集合中。
5. 利用算法 II 给出的 α 和 β 系数, 精细化边界三角形, 并把所有新插入结点加入 N_P 中。
6. 从 P 中读取后面网格中下一个内部结点 p_i 。
7. 利用算法 I 中步骤 3 在 N_T 中搜索包含结点 p_i 的三角形 t_i , 计算三角形 t_i 的中心, 并定义为结点 Q , 然后用式(14)计算结点 Q 的结点分布函数。
8. 计算结点 Q 到三角形 t_i 的 3 个顶点的距离 $d_m, m = 1, 2, 3$ 。

9. 如果 h_i 大于 d_m ($m = 1, 2, 3$) 的平均值, 返回步骤 6

10. 用下式计算各边界结点 p_i 的系数 x_i :

$$x_i = \text{ScaleRange} \left[\frac{h_{\max} - dp_i}{h_{\max} - h_{\min}}, 0, 1, x_{\min}, x_{\max} \right], \quad (18)$$

其中 $\text{ScaleRange}(\cdot)$ 为尺度标定函数, 用 0~1 的尺度范围标定 $x_{\min} \sim x_{\max}$ 范围内的值

11. 求结点 Q 的 x_i 系数

如果 $d_m < (x_i \cdot h_{\min})$ ($m = 1, 2, 3$) 中有两个式子成立, 则放弃结点 Q , 并返回步骤 6; 否则, 计算平均距离 $s = (d_1 + d_2 + d_3)/3$. 如果 $s < (x_i \cdot dp_q)$ 或者 $h_i < h_{\min}$, 那么放弃结点 Q , 并返回步骤 6

12. 根据 Delaunay 三角剖分算法 (算法 I) 插入结点 Q , 并把 Q 点加入到 N_P 集合

13. 重复步骤 6 到 12, 直到 P 中所有结点都取到

14. 利用算法 I, 对 N_P 中插入点执行 Delaunay 三角剖分, 并将网格光滑化

系数 x_i 控制高解梯度区域内结点的插入, 并确保三角剖分规则性不发生不相称的畸变

下限值 x_{\min} 为限制激波高梯度区域内的结点插入数, 上限 x_{\max} 则使较多的结点插入到尾部扩张扇形低梯度区域内. 实践表明, 在高速可压缩流体问题中, x_{\min} 和 x_{\max} 建议分别取 0.5 和 0.7

4 算法评估

为说明 Delaunay 三角剖分自适应网格重划分技术在求解流体计算精度上的性能, 本文模拟了 5 种高速可压缩流体, 其中 2 个例子为稳态的、3 个例子为瞬态的, 它们是: 1) 马赫数为 15.3 的流体流经圆柱体; 2) 马赫数为 3 的流体流经 15° 角的楔体; 3) Sod 激波管; 4) 马赫数为 2 的流体流经圆弧表面时的反射, 以及 5) 水下爆炸产生的激波

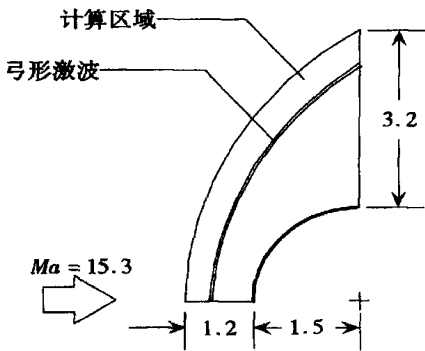


图 5 马赫数为 15.3 的流体流经一个圆柱体

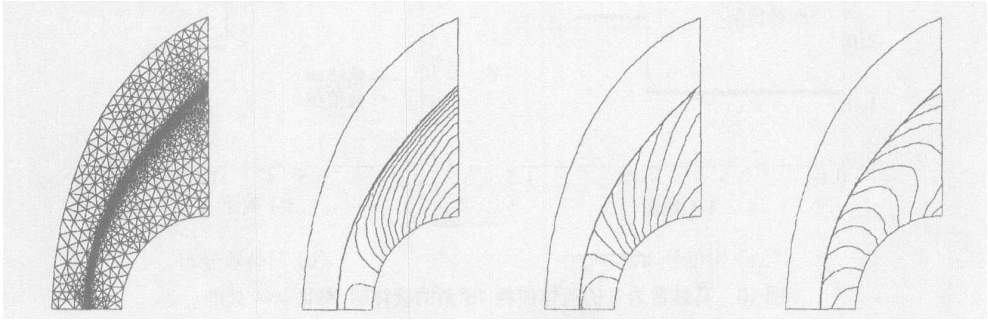
4.1 马赫数为 15.3 的流体流经圆柱体

稳态马赫数 15.3 的流体流经一个圆柱体的问题如图 5 所示^[8]. 柱前位于中心线附近(弓形激波和圆柱之间)存在次音速流动的弓形激波区. 离开该区域后, 弓形激波薄弱部分后面的流体变成所有参数急剧变化的超音速流动. 图 6 表明最终形成的自适应网格, 包括 18 537 个结点、36 986 个单元, 以及密度、压强、马赫数的等值线图. 图 6(b)~图 6(d)表明, 通过网格计算可以得到包含急剧弓形激波的良好结果. 图 7 表明, 通过体积加权误差 E 测定^[31] 自适应网格的收敛过程, 经过 2 500 次迭代后误差减小为 3 阶小量.

4.2 马赫数为 3 的流体流经 15° 角的楔体

如图 8 所示, 马赫数为 3 的流体流经 15° 角的楔体, 楔体尺寸为 1.5×1.0 . 流体进入计算区域的左边界并形成一倾斜的激波. 最终的自适应网格包括 10 543 个结点和 21 013 个单元, 相应的密度等值线图分别如图 9(a)~图 9(b)所示. 沿激波线的小簇单元的误差由式(15)给出, 并且重划分算法形成的自适应网格. 图 10(a)~10(b)表示沿 AA' 截面自适应网格预测的密度及马赫数和精确的解^[1] 的比较. 该图表明, 综合运用本文介绍的自适应网格重划分技

术和高精度格式能使解精度提高。



(a) 自适应网格 (b) 等密度线 (c) 等压强线 (d) 等马赫线

图 6 马赫数为 15.3 的流体流经一个圆柱体

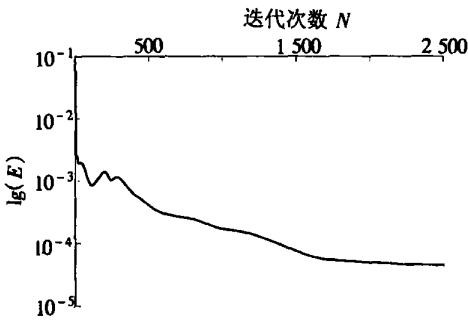


图 7 马赫数为 15.3 的流体流经圆柱体的收敛过程

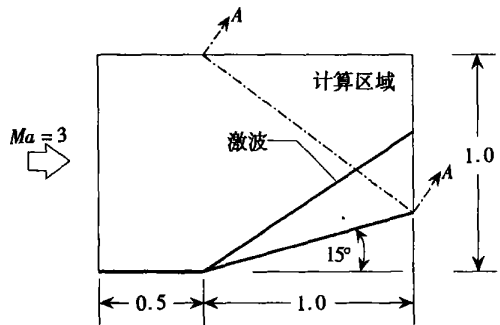
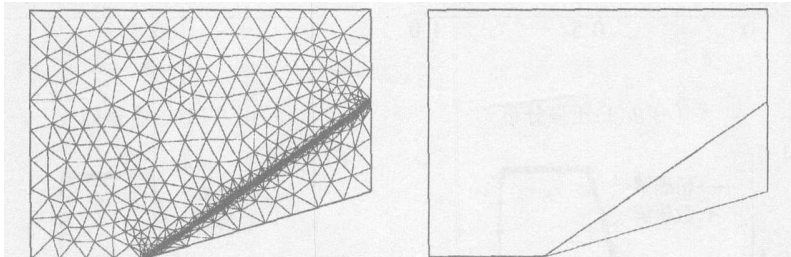


图 8 马赫数为 3 的流体流经 15° 的楔体



(a) 自适应网格 (b) 等密度线

图 9 马赫数为 3 的流体流经 15° 的楔体

4.3 Sod 激波管

一维激波管也叫 Sod 激波管^[32], 可以在二维区域内求解。左边和右边流体的初始条件为 $(\rho, u, p)_L = (1.0, 0.0, 1.0)$ 、 $(\rho, u, p)_R = (0.125, 0.0, 0.1)$ 。将 1.0×0.1 的计算区域在 x 和 y 方向上分割为 400 和 40 个相等的间隔, 该区域用等三角单元离散化。图 11(a)~ 图 11(f) 为在时间 $t = 0.15$ 处沿管长计算的密度、压强和速度 u 与精确解的比较结果。该图表明, 具有混合补偿熵功能的 Roe 法在高阶部分的精度大于它的一阶解。

4.4 马赫数为 2 的激波流经圆弧表面时的反射

马赫数为 2 的激波流经圆弧表面时反射的计算域如图 12 所示。图 13 表示在一系列不同瞬时, 自适应网格和相应的等密度线。激波到达圆弧表面前瞬时, 自适应网格包括大约 16 000

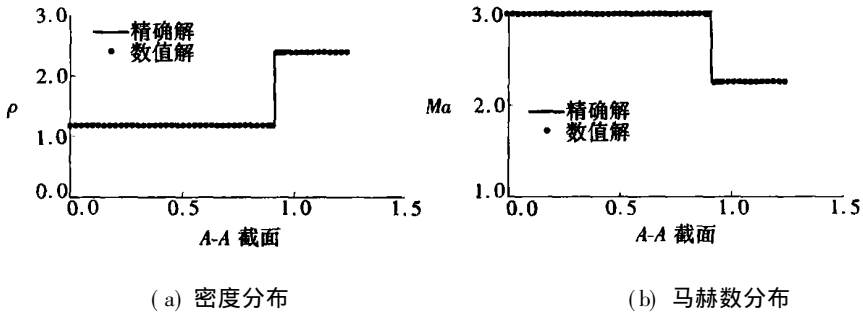
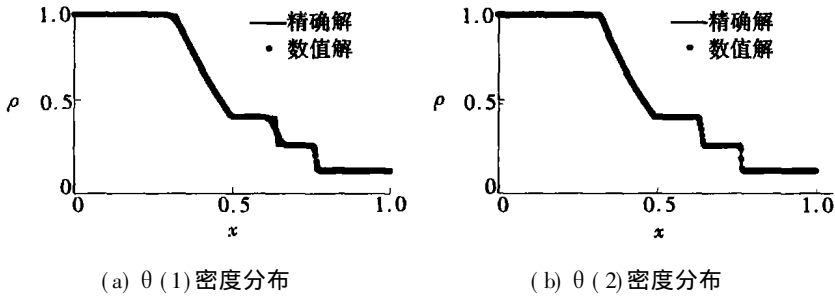
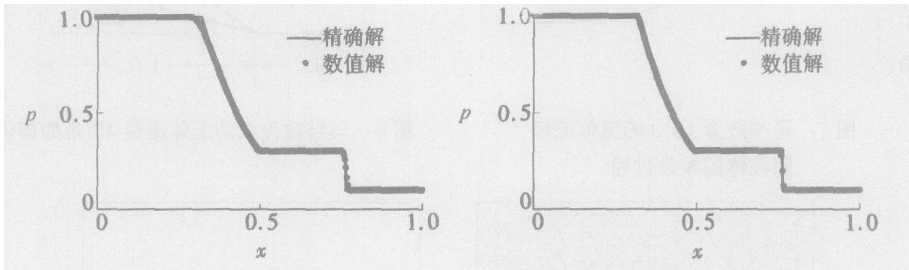


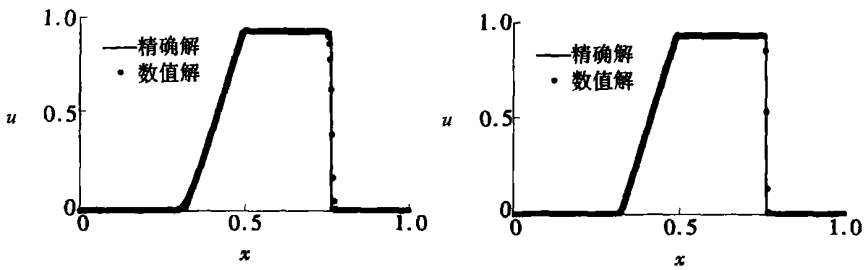
图 10 马赫数为 3 的流体流经 15° 角的楔体时, 截面 A-A 处的精确解和计算解的比较



(a) $\theta(1)$ 密度分布 (b) $\theta(2)$ 密度分布



(c) $\theta(1)$ 压强分布 (d) $\theta(2)$ 压强分布



(e) $\theta(1)$ u 速度分布 (f) $\theta(2)$ u 速度分布

图 11 Sod 激波管在 $t = 0.15$ 时精确解和计算解的比较

个单元, 而到达图 13 的右下方时, 则增加到 18 000 个单元。该图清楚地表明了其流场解, 它组合利用了自适应网格算法和带 H_{-} 补偿熵的高阶流量微分分割格式。

4.5 水下爆炸产生激波的传播

为了进一步了解组合自适应 Delaunay 三角剖分和网格中心迎风算法的计算效率, 研究水下爆炸产生的激波的传播过程。图 14 表示计算区域的范围, 爆炸中心的初始压强为 12 GPa

时激波的传播。图中还显示,水雷在舰长的前方,离水面 10 m 深处。图 15 表示,在不同时间段,从爆炸中心传来的半圆形激波传播时的自适应网格及相应的等压强线。小单元用于精确分析半圆形激波,大单元可以减少未知值的总数和计算时间。大约在爆炸后 5 ms,激波传到舰身外壳。

5 结 论

本文组合自适应 Delaunay 三角剖分和胞格中心迎风算法,对非粘滞高速可压缩流体,进行了稳态和瞬态分析。首先介绍了如何利用胞格中心迎风算法求解 Euler 方程,引入了非结构化三角网格的多维耗散格式及其算法,然后对二维网格的 Delaunay 三角剖分作了介绍。提出能自动创建结点和光滑网格的网格生成算法。自适应网格重划分技术配合 Delaunay 三角剖分算法能进一步提高解析精度,并分析了高阶 Roe 通量微分分割格式。这种自适应网格重划分技术能使梯度变化大的区域生成小单元网格,同时使另一些梯度变化小的区域使用大单元网格。组合算法的结果表明,激波解的精度得以提高。这些算例表明,自适应 Delaunay 三角剖分和胞格中心迎风算法,在分析稳态和瞬态可压缩流体问题中,既能提高解的精度,又能显著减少未知数的总数

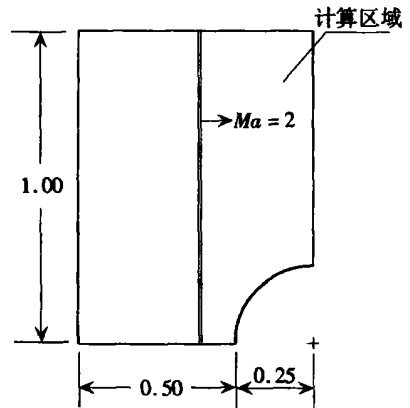


图 12 马赫数为 2 的激波流经圆弧表面时的反射

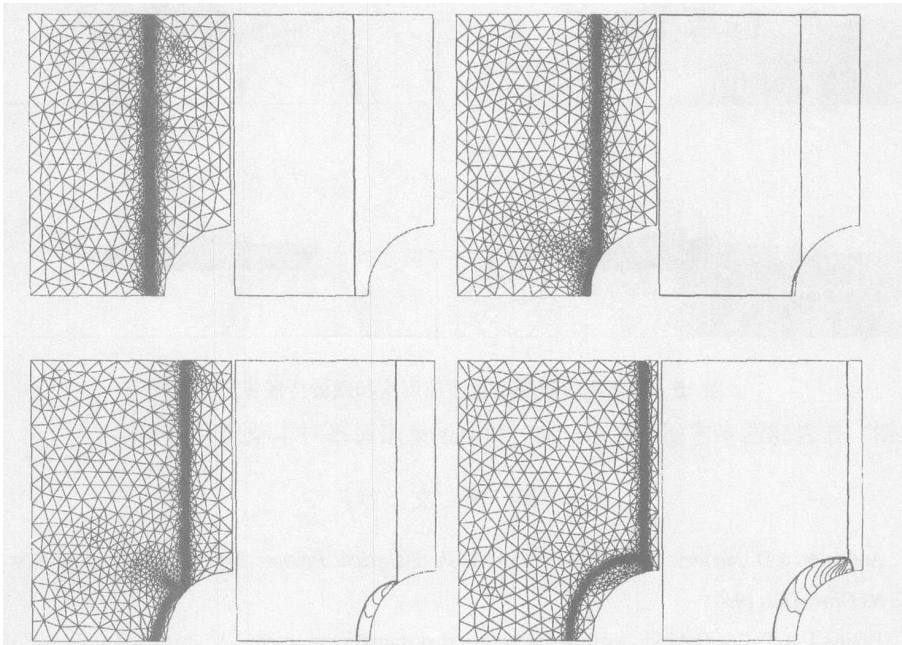


图 13 马赫数为 2 的激波流经圆弧表面时, 4 个不同瞬时反射的自适应网格和等密度线

和计算时间。

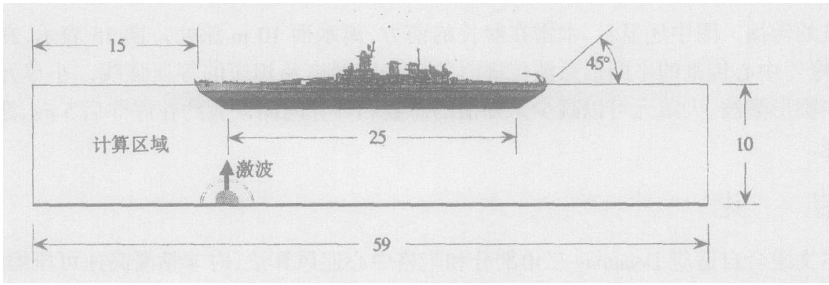


图 14 激波的水下传播

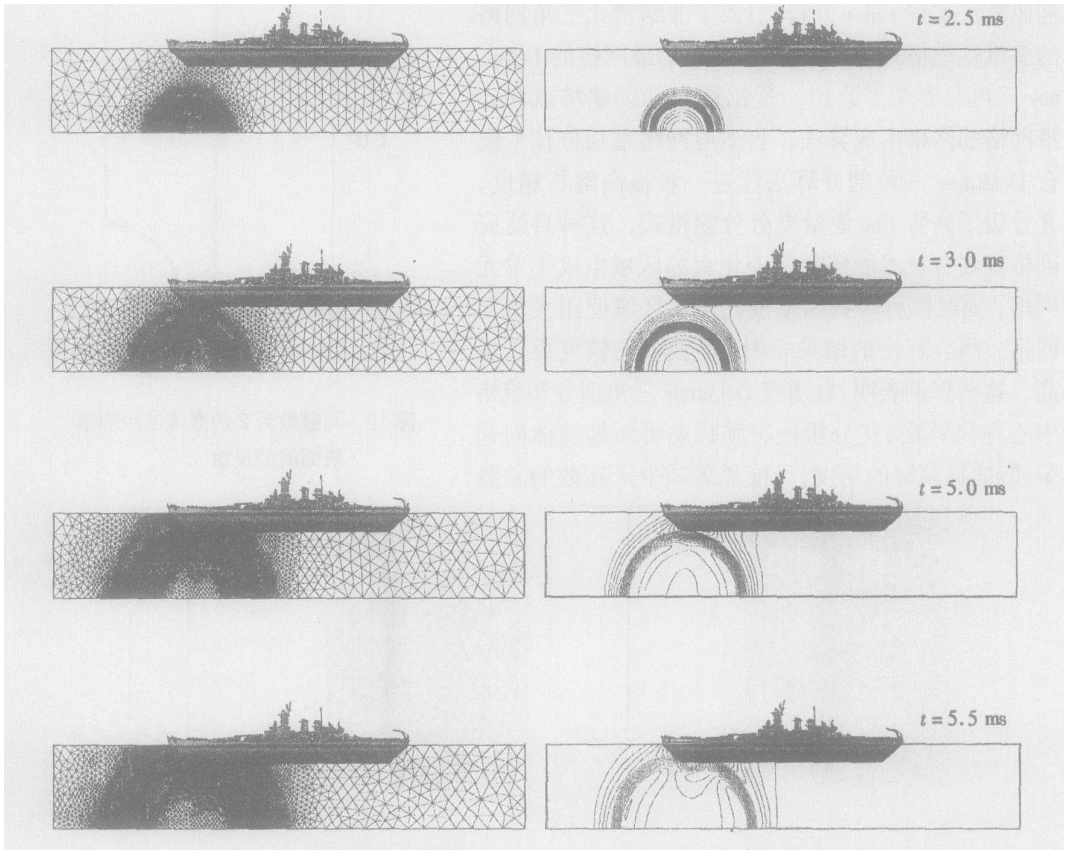


图 15 水下爆炸时瞬态自适应网格和激波传播等压强线

致谢 作者感谢泰国研究基金(TRF)和泰国皇家海军对本项研究的支持。

[参 考 文 献]

- [1] Anderson J D. Modern Compressible Flow With Historical Perspective [M]. 2nd edition. New York: McGraw_Hill, 1990.
- [2] Donea J. A Taylor_Galerkin method for convective transport problems [J]. Internat J Numer Methods in En gn g, 1984, 20(1): 101—119.
- [3] Huges T J R. Recent Progress in the Development and Understanding of SUPG Methods With Special Reference to the Compressible Euler and Navier_Stokes Methods in Fluids [M]. New York: John Wiley, 1987, 1261—1275.

- [4] Jiang B N, Carey G F. A stable last_squares finite element method for non_linear hyperbolic problems [J]. *Internat J Numer Methods in Fluids*, 1988, **8**(9): 933—942.
- [5] Gnoffo P A. Application of program LUARA to three_dimensional AOTV flow fields[R]. *AIAA Paper 86_0565*, 1986.
- [6] Roe P L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes [J]. *J Comput Phys*, 1981, **43**(2): 357—372.
- [7] Quirk J J. A contribution to the great Riemann solver debate[J]. *Internat J Numer Methods in Fluids*, 1994, **18**(6): 555—574.
- [8] Sanders R, Morano E, Druguet M C. Multidimensional dissipation for upwind schemes: stability and applications to gas dynamics[J]. *J Comput Phys*, 1998, **145**(2): 511—537.
- [9] Bowyer A. Computing Dirichlet tessellations [J]. *Comput J*, 1981, **24**(2): 162—166.
- [10] Watson D F. Computing the n_dimensional Delaunay tessellation with application to Voronoi polytopes[J]. *Comput J*, 1981, **24**(2): 167—172.
- [11] Weatherill N P, Hassan O. Efficient three_dimension Delaunay triangulation with automatic point creation and imposed boundary constraints [J]. *Internat J Numer Methods in Engng*, 1994, **37**(12): 2005—2039.
- [12] Karamete B K, Tokdemir T, Ger M. Unstructured grid generation and a simple triangulation algorithm for arbitrary 2_D geometries using object oriented programming [J]. *Internat J Numer Methods in Engng*, 1997, **40**(2): 251—268.
- [13] Peraire J, Vahdati M, Morgan K, et al. Adaptive remeshing for compressible flow computations [J]. *J Comput Phys*, 1987, **72**(2): 449—466.
- [14] Berger M J, Colella P. Local adaptive mesh refinement for shock hydrodynamics [J]. *J Comput Phys*, 1989, **82**(1): 67—84.
- [15] Jin H, Wiberg N E. Two_dimensional mesh generation, adaptive remeshing and refinement [J]. *Internat J Numer Methods in Engng*, 1990, **29**(7): 1501—1526.
- [16] Probert J, Hassan O, Jeraire J, et al. An adaptive finite element method for transient compressible flows [J]. *Internat J Numer Methods in Engng*, 1991, **32**(5): 1145—1159.
- [17] Dechaumphai P, Morgan K. Transient thermal_structural analysis using adaptive unstructured remeshing and mesh movement [A]. In: Thornton E A Ed. *Thermal Structures and Materials for High_Speed Flight* [C]. Washington D C: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1992, 205—228.
- [18] Quirk J J, Hanebutte U R. A parallel adaptive mesh refinement algorithm [R]. *ICASE Report 93_63*, 1993.
- [19] Venkatakrishnan V. A perspective on unstructured grid flow solvers [R]. *AIAA paper 95_0667*, 1995.
- [20] Sun M, Takayama K. Conservative smoothing on an adaptive quadrilateral grid [J]. *J Comput Phys*, 1999, **150**(1): 143—180.
- [21] Hirsch C. *Numerical Computation of Internal and External Flows* [M]. Vol 2. New York: John Wiley & Sons, 1998.
- [22] Shyue K M. An efficient shock_capturing algorithm for compressible multicomponent problems [J]. *J Comput Phys*, 1998, **142**(1): 208—242.
- [23] Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws [J]. *J Comput Phys*, 1983, **49**(3): 357—393.
- [24] Frink N T, Parikh P, Pirzadeh S. A fast upwind solver for the Euler equations on three_dimensional unstructured meshes [R]. *AIAA Paper 91_0102*; In: *29th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit* [C]. Reno, Nevada, 1991.

- [25] Frink N T, Hrzadeh S Z. Tetrahedral finite volume solutions to the Navier-Stokes equations on complex configurations[R]. NASA/TM_1998_208961, 1998.
- [26] Vekatakrishnan V. Convergence to steady state solutions of the Euler equations on unstructured grids with limiters[J]. J Comput Phys, 1995, **118**(1): 120—130.
- [27] Shu C W, Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes [J]. J Comput Phys, 1988, **77**(2): 439—471.
- [28] Linde T, Roe P L. Robust Euler codes[R]. AIAA Paper_97_2098; In: 13th Computational Fluid Dynamics Conference[C]. Snowmass Village, CO, 1997.
- [29] Joe B, Simpson R B. Triangular meshes for regions of complicated shape[J]. Internat J Numer Methods in Engng, 1986, **23**(5): 751—778.
- [30] Frey W H. Selective refinement: a new strategy for automatic node placement in graded triangular meshes[J]. Internat J Numer Methods in Engng, 1987, **24**(11): 2183—2200.
- [31] Sun M, Takayama K. Error localization in solution adaptive grid methods[J]. J Comput Phys, 2003, **190**(1): 346—350.
- [32] Sod G A. A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws[J]. J Comput Phys, 1978, **27**(1): 1—31.

Adaptive Delaunay Triangulation With Multidimensional Dissipation Scheme for High-Speed Compressible Flow Analysis

P. Dechaumphai, S. Phongthanapanich

(Mechanical Engineering Department, Chulalongkorn University,
Bangkok 10330, Thailand)

Abstract: Adaptive Delaunay triangulation is combined with the cell-centered upwinding algorithm to analyze inviscid high-speed compressible flow problems. The multidimensional dissipation scheme was developed and included in the upwinding algorithm for unstructured triangular meshes to improve the computed shock wave resolution. The solution accuracy was further improved by coupling an error estimation procedure to a remeshing algorithm that generates small elements in regions with large change of solution gradients, and at the same time, larger elements in other regions. The proposed scheme is further extended to achieve higher-order spatial and temporal solution accuracy. Efficiency of the combined procedure was evaluated by analyzing supersonic shocks and shock propagation behaviors for both the steady and unsteady high-speed compressible flows.

Key words: adaptive mesh movement; Delaunay triangulation; cell-centered upwinding; high-speed compressible flow