应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2005 10_1236_11

K hler 流形上的 Lagrange 力学

张荣业

(中国科学院 数学研究所, 北京 100080

(周哲玮推荐

摘要: 讨论了 K hler 流形上的 Lagrange 力学, 并给出 Lagrange 算子、Lagrange 方程、作用泛函、Hamilton 原理和 Hamilton 方程等复的数学形式

关 键 词: K hler 流形; 绝对微分; Lagrange 算子; Hamilton 原理
中图分类号: O316 文献标识码: A

引 言

Lagrange 力学是分析力学的重要的组成部分 它由 Lagrange 于 1788 年利用 Euclid 解析几何和微积分在他的名著 Analytical Mechanics 中建立 现在, 随着现代微分几何的发展又由现代学者把它建立在 Riemann 流形及其切丛和余切丛上 它变得更系统更漂亮 它被应用于力学、理论物理和广义相对论 这是实的情形(见文献[1]~ [6] , 复的情形如何?

这里, 我们在 K hler 流形上建立复的 Lagrange 力学系统并给出复的运动方程

1 几何结构及基本运算

设 M^n 是具有度量 h 及联络 D 的 n 维 K hler 流形 在坐标系$(U; z^j)$ 下, 度量

$$h = h_{jk}\,\mathrm{d}z^j \quad \mathrm{d}z^k \tag{1}$$

K hler 形式为

$$= \frac{\mathrm{i}}{2}h_{jk}\,\mathrm{d}z^j \quad \mathrm{d}z^k, \tag{2}$$

其中, $z^j = x^j + \mathrm{i}y^j$, $z^j = x^j - \mathrm{i}y^j$, 且 $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$, $(U; x^j, y^j)$ 是它的底流形 2n 维实解析流形的坐标 它是具有度量 g

$$g = \mathrm{Re}\,h_{jk}(\mathrm{d}x^j \quad \mathrm{d}x^k + \mathrm{d}y^j \quad \mathrm{d}y^k) \tag{3}$$

的 2n 维 Riemann 流形 通常, TM 和 T^*M 是 M^n 的切丛和余切丛 $\mathscr{X}(M)$ 是 TM 的所有截面 M^n 的向量场的集合 $\mathscr{F}^1(M) = \mathscr{X}^*(M)$ 是 T^*M 的所有截面 M^n 的 1_形式场的集合

$$TM = TM^{1,0} \quad TM^{0,1},\ T^*M = T^*M^{1,0} \quad T^*M^{0,1}$$

TM 在坐标邻域 U 的标架场是$\left\{\ _j,\ _j\right\}_{j=1}^n$ 其中, $_j = \ / \ z^j$, $_j = \ / \ z^j$ T^*M 在 U 的标架场是$\left\{\mathrm{d}z^j, \mathrm{d}z^j\right\}_{j=1}^n$

收稿日期: 2004_11_10; 修订日期: 2005_06_12
作者简介: 张荣业(1938 , 男, 广东开平人, 研究员(Tel: + 86_10_62588645; E_mail: zry@ math. ac. cn

那么,

$$V \quad \mathscr{X}(M),\ V = v^j{}_j + v^j{}_j, \qquad 当\ U \quad M^n,$$

$$\mathscr{F}^1(M), \quad = b_j \mathrm{d}z^j + b_j \mathrm{d}z^j, \qquad 当\ U \quad M^n$$

底流形 M^{2n} 的切丛和余切丛的标架场分别是 $\left\{ {}_{x^j},\ {}_{y^j} \right\}_{j=1}^n$ 和 $\left\{ \mathrm{d}x^j, \mathrm{d}y^j \right\}_{j=1}^n$, 而且有以下关系:

$$\begin{cases} \dfrac{}{z^j} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{}{x^j} - \mathrm{i}\dfrac{}{y^j} \right), \quad \dfrac{}{x^j} = \dfrac{}{z^j} + \dfrac{}{z^j}, \\ \dfrac{}{z^j} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{}{x^j} + \mathrm{i}\dfrac{}{y^j} \right), \quad \dfrac{}{y^j} = \mathrm{i}\left(\dfrac{}{z^j} - \dfrac{}{z^j} \right), \\ \mathrm{d}z^j = dx^j + \mathrm{i}\mathrm{d}y^j, \ \mathrm{d}x^j = \dfrac{1}{2}(\mathrm{d}z^j + \mathrm{d}z^j), \\ \mathrm{d}z^j = dx^j - \mathrm{i}\mathrm{d}y^j, \ \mathrm{d}y^j = \dfrac{1}{2}(\mathrm{d}z^j - \mathrm{d}z^j) \end{cases} \tag{4}$$

$C^k(I, M)$ 是从 $I \quad \mathrm{R}$ 到 M^n 的所有 k 阶连续可微函数的集合　它的元素也表示在 M^n 中定义在 I 上的曲线

定义 1.1　$L: TM \quad C, (z, z, \ , \ ) \mid \quad L(z, z, \ , \ ) = L_1(x, y, \ , \ ) + \mathrm{i}L_2(x, y, \ , \ )$ 称为 Lagrange 函数, 其全体记作 $C^m(TM, C)$; m 表示 m 阶连续可微, 其中 $z = x + \mathrm{i}y, z = x - \mathrm{i}y$, $= \ + \mathrm{i}\ , \ = \ - \mathrm{i}$　通常, $= z$, 因此, $= x$, $= y$, 且 $z = \mathrm{d}z/\mathrm{d}t, x = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t, y = \mathrm{d}y/\mathrm{d}t$, 特别, 在如下力学的应用中, $\mathrm{d}z^j/\mathrm{d}t = v^j$, $\mathrm{d}z^j/\mathrm{d}t = v^j \quad v^j$, 如此等等

定义 1.2

$$\mathrm{D}_{x^j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ {}_{x^j} - \ {}_{x^j}, \quad \mathrm{D}_{y^j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ {}_{y^j} - \ {}_{y^j}$$

称为实的 Lagrange 算子; 而

$$\mathrm{D}_{z^j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ {}_{z^j} - \ {}_{z^j}, \quad \mathrm{D}_{z^j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ {}_{z^j} - \ {}_{z^j}$$

称为复的 Lagrange 算子, 而且

$$\begin{cases} \mathrm{D}_{z^j} = \dfrac{1}{2}(\mathrm{D}_{x^j} - \mathrm{i}\mathrm{D}_{y^j}), \quad \mathrm{D}_{x^j} = \mathrm{D}_{z^j} + \mathrm{D}_{z^j}, \\ \mathrm{D}_{z^j} = \dfrac{1}{2}(\mathrm{D}_{x^j} + \mathrm{i}\mathrm{D}_{y^j}), \quad \mathrm{D}_{y^j} = \mathrm{i}(\mathrm{D}_{z^j} - \mathrm{D}_{z^j}) \end{cases} \tag{5}$$

式(5 对应于式(4

2　K hler 流形上的 Lagrange 力学

用上述计算, $U \quad M^n$ 上的 Lagrange 方程表达为

$$\mathrm{D}_{z^j}L = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{L}{z^j} - \frac{L}{z^j} = 0, \quad \mathrm{D}_{z^j}L = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{L}{z^j} - \frac{L}{z^j} = 0, \tag{6}$$

它是 Newton 方程

$$\frac{\mathrm{D}V}{\mathrm{d}t} = F^{\#} \qquad \frac{\mathrm{D}V}{\mathrm{d}t} = F \tag{7}$$

的推广(见文献[7]　, 其中 V 是质点在 M^n 上运动的速度, 且在坐标邻域 U 上 $V = v^j{}_j + v^j{}_j$; $\mathrm{D}V$ 是 V 的绝对微分, 它由 M^n 上的联络 D 决定; $\mathrm{D}V/\mathrm{d}t$ 是 V 关于 t 的绝对导数, 它称为运动质点的加速度; $F = F_j dz^j + F_j \mathrm{d}z^j$ 是 $U \quad M^n$ 上的力场;　和 $\# = {}^{-1}$ 是由度量张量 h_{jk} 决定的丛同

构:

$$: TM \quad T^* M, \quad \frac{}{z^j} \mid \quad \left(\frac{}{z^j}\right) = \frac{1}{2} h_{jk} \mathrm{d}z^k, \quad \frac{}{z^j} \mid \quad \left(\frac{}{z^j}\right) = \frac{1}{2} h_{kj} \mathrm{d}z^k,$$

$$\#: T^* M \quad TM, \quad \mathrm{d}z^k \mid \quad \mathrm{d}z^{k\#} = 2h^{jk} \frac{}{z^j}, \mathrm{d}z^k \mid \quad \mathrm{d}z^{k\#} = 2h^{kj} \frac{}{z^j}$$

A 设 $L = h(V, V)/2 = h_{jk} z^j z^k / 2$ 其中 $V = z^j{}_j + z^j{}_j$, 则

$$\frac{L}{z^s} = \frac{1}{2} \frac{h_{jk}}{z^s} z^j z^k, \quad \frac{L}{z^s} = \frac{1}{2} h_{sk} z^k,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{L}{z^s} = \frac{1}{2}\left(\frac{h_{sk}}{z^l} z^l + \frac{h_{sk}}{z^l} z^l\right) z^k + \frac{1}{2} h_{sk} z^k,$$

$D_{z^s} L = 0$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{h_{sk}}{z^l} z^l + \frac{h_{sk}}{z^l} z^l\right) z^k + \frac{1}{2} h_{sk} z^k = \frac{1}{2} \frac{h_{jk}}{z^s} z^j z^k,$$

$$h_{sk} z^k + \left(\frac{h_{sk}}{z^l} - \frac{h_{lk}}{z^s}\right) z^l z^k + \frac{h_{sk}}{z^l} z^l z^k = 0$$

由于 K hler 形式 的外微分为零:

$$\mathrm{d} = 0 \quad \frac{h_{sk}}{z^l} - \frac{h_{lk}}{z^s} = \frac{h_{jl}}{z^s} - \frac{h_{js}}{z^l} = 0,$$

因此, 上述方程的第 2 项消失, 而且, 我们有

$$h_{sk} z^k + \frac{h_{sk}}{z^l} z^l z^k = 0 \tag{8}$$

我们把式(8 写成

$$z^k + {}^k_{lr} z^l z^k = 0, \tag{9}$$

其中, ${}^k_{lr} = h^{ks} \frac{h_{sr}}{z^l}$ 类此,

$$\frac{L}{z^s} = \frac{1}{2} \frac{h_{jk}}{z^s} z^j z^k, \quad \frac{L}{z^s} = \frac{1}{2} h_{js} z^j,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{L}{z^s} = \frac{1}{2}\left(\frac{h_{js}}{z^l} z^l + \frac{h_{js}}{z^l} z^l\right) z^j + \frac{1}{2} h_{js} z^j,$$

$D_{z^s} L = 0$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{h_{js}}{z^l} z^l + \frac{h_{js}}{z^l} z^l\right) z^j + \frac{1}{2} h_{js} z^j = \frac{1}{2} \frac{h_{jk}}{z^s} z^j z^k,$$

$$h_{js} \ddot{z}^j + \left(\frac{5 h_{js}}{5 z^l} - \frac{5 h_{jl}}{5 z^s}\right) z^j \#_l + \frac{5 h_{js}}{5 z^l} z^l z^j = 0\#$$

如上, 第 2 项消失, 因此, 我们有

$$h_{jk} \ddot{z}^j + \frac{5 h_{jk}}{5 z^l} z^l z^j = 0\# \tag{10}$$

我们把它写成

$$\ddot{z}^k + \#^k_{lr} z^l z^r = 0, \tag{11}$$

其中, $\#^k_{lr} = \overline{\#^k_{lr}} = h^{sk} 5 h_{rs} / 5 z^l \#$ 式(9 和式(11 是当某一质点在K hler 流形上运动而力场 $F = 0$ 时的 Newton 方程的坐标表示(而质点在 Riemann 流形上运动当 $F = 0$ 时的运动方程是 $\ddot{x}^k + \#^k_{lr} x^l x^r = 0$)# 这个质点是沿测地线运动# 它是这个质点运动方程的解# 此质点不飞离

M^n 沿直线运动, 不停止# 若 $M^n = C^n$ 是n 维Hermit 空间或局部平坦的K hler 流形, 则 $\#^k_{lr} = \#^k_{lr} = 0$, 质点是沿直线运动#

B 设 $T = h(V, V)/2 = h_{jk} z^j \overset{\#}{z}{}^k /2$ 为动能, $U = U(z^j, z^j)$ 是势能# 设

$$L = \frac{1}{2} h(V, V) - U = \frac{1}{2} h_{jk} z^j \overset{\#}{z}{}^k - U(z^j, z^j),$$

其中, $V = z^j 5_j + \overset{\#}{z}{}^j 5_j$ 则

$$\frac{5L}{5z^s} = \frac{1}{2} \frac{5h_{jk}}{5z^s} z^j \overset{\#}{z}{}^k - \frac{5U}{5z^s}, \quad \frac{5L}{5z^s} = \frac{1}{2} h_{sk} \overset{\#}{z}{}^k,$$

$D_{z^s} L = 0$]

$$\frac{1}{2}\left(\frac{5h_{sk}}{5z^l} z^l + \frac{5h_{sk}}{5z^l} \overset{\#}{z}{}^l \right) \overset{\#}{z}{}^k + \frac{1}{2} h_{sk} \overset{\&}{z}{}^k = \frac{1}{2} \frac{5h_{jk}}{5z^s} z^j \overset{\#}{z}{}^k - \frac{5U}{5z^s},$$

即(如上

$$h_{sk} \overset{\&}{z}{}^k + \frac{5h_{sk}}{5z^l} z^l \overset{\#}{z}{}^k = - 2 \frac{5U}{5z^s}, \tag{12}$$

$$\overset{\&}{z}{}^k + \#^k_{lr} z^l \overset{\#}{z}{}^k = - 2h^{ks} \frac{5U}{5z^s} \# \tag{13}$$

类此,

$$\frac{5L}{5z^s} = \frac{1}{2} \frac{5h_{jk}}{5z^s} z^j \overset{\#}{z}{}^k - \frac{5U}{5z^s}, \quad \frac{5L}{5\overset{\#}{z}{}^s} = \frac{1}{2} h_{js} z^j,$$

$D_{z^s} L = 0$]

$$h_{ks} \overset{\&}{z}{}^k + \frac{5h_{js}}{5z^l} z^j z^l = - 2 \frac{5U}{5z^s}, \tag{14}$$

$$\overset{\&}{z}{}^k + \#^k_{lr} z^l z^r = - 2h^{sk} \frac{5U}{5z^s} \# \tag{15}$$

式(13 ~ (15 是在K hler 流形上当 $F = \mathrm{d}U$ 时的Newton 方程 $\mathrm{D}V/\mathrm{d}t = - \mathrm{d}U$# 因此, Lagrange 方程是 Newton 方程的推广#

现在我们考虑在坐标系 $(U; z^j)$ 下Lagrange 函数 $L = L_1(x, y, x, y) + L_2(x, y, x, y)$ 的变分#

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}L = {} & DL_1 + \mathrm{i}DL_2 = \\
& \frac{5L_1}{5x}Dx + \frac{5L_1}{5y}Dy + \frac{5L_1}{5x}Dx + \frac{5L_1}{5y}Dy + \mathrm{i}\left(\frac{5L_2}{5x}Dx + \frac{5L_2}{5y}Dy + \frac{5L_2}{5x}Dx + \frac{5L_2}{5y}Dy \right) = \\
& \left(\frac{5L_1}{5x} + \mathrm{i} \frac{5L_2}{5x} \right) Dx + \left(\frac{5L_1}{5y} + \mathrm{i} \frac{5L_2}{5y} \right) Dy + \left(\frac{5L_1}{5x} + \mathrm{i} \frac{5L_2}{5x} \right) Dx + \left(\frac{5L_1}{5y} + \mathrm{i} \frac{5L_2}{5y} \right) Dy = \\
& \frac{5L}{5x}Dx + \frac{5L}{5y}Dy + \frac{5L}{5x}Dx + \frac{5L}{5y}Dy = \\
& \left(\frac{5L}{5x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{5L}{5x} \right) Dx + \left(\frac{5L}{5y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{5L}{5y} \right) Dy + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{5L}{5x}Dx + \frac{5L}{5y}Dy \right) = \\
& - \mathrm{D}_x L \frac{D(z + z)}{2} - \mathrm{D}_y L \frac{D(z - z)}{2} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{5L}{5x} \frac{D(z + z)}{2} + \frac{5L}{5y} \frac{D(z - z)}{2} \right) = \\
& - \frac{1}{2}(\mathrm{D}_x - \mathrm{i}\mathrm{D}_y) L Dz - \frac{1}{2}(\mathrm{D}_x + \mathrm{i}\mathrm{D}_y) L Dz + \\
& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(\frac{5L}{5x} - \mathrm{i} \frac{5L}{5y} \right) \frac{Dz}{2} + \left(\frac{5L}{5x} + \mathrm{i} \frac{5L}{5y} \right) \frac{Dz}{2} \right] =
\end{aligned}$$

$$- \mathrm{D}_{\bar z} L \mathrm{D}\bar z - \mathrm{D}_{z} L \mathrm{D} z + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{5L}{5\dot z}\mathrm{D}z + \frac{5L}{5\overset{\#}{z}}\mathrm{D}\bar z\right), \qquad P\ L\ I\ C^m(TU, C)\# \qquad (16$$

定义 2. 1 由

$$5 = Q_I L(z, \bar z, \dot z, \overset{\#}{z})\,\mathrm{d}t$$

定义的泛函 5: $C^k(I, M)$ y C 称为作用泛函, 5 是作用量, 其中 L: TM y C, $I = [t_1, t_2] < \mathrm{R}$ 且 $L\ I\ C^m(M, C)\#$

定理 2. 2(我们称它为 Hamilton 原理 作用量在由 Lagrange 方程决定的轨线达到极值(平稳值 ,或者说轨线 C I $C^k(I, M)$ 是 Lagrange 系统的运动, 若它是作用泛函 5 的临界点#

命题 2. 3 曲线 C I $C^k(I, M)$ 是泛函的临界点若且仅若它是 Lagrange 方程的解#

事实上,

$$\mathrm{D}5 = Q_{t_1}^{t_2} \mathrm{D} L(z, \bar z, \dot z, \overset{\#}{z})\,\mathrm{d}t =$$

$$- Q_{t_1}^{t_2}(\mathrm{D}_{z^j} L \mathrm{D}z^j + \mathrm{D}_{\bar z^j} L \mathrm{D}\bar z^j)\,\mathrm{d}t + \left(\frac{5L}{5\dot z^j}\mathrm{D}z^j + \frac{5L}{5\overset{\#}{z}{}^j}\mathrm{D}\bar z^j\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2}$$

具有共同的固定端点的曲线(泛函 的变分在端点上消失# 因此, $\mathrm{D}5 = 0$ Z $\mathrm{D}_{z^j} L = 0$, $\mathrm{D}_{\bar z^j} L = 0$, 其中, $z = (z^1, z^2, , , z^n)$, $\bar z = (\bar z^1, \bar z^2, , , \bar z^n)\#$ 前者和后者在重复指标上求和是理解的# 泛函 5 的值域是

$$D(5) = \left\{ C\ I\ C^k(I, M) \mid C(t_1) = (z_1, \bar z_1),\ C(t_2) = (z_2, \bar z_2)\ \text{是固定的} \right\} < C^k(I, M)\#$$

若 $L = T - U = (1/2) h_{jk} \dot z^j \overset{\#}{z}{}^k - U(z, \bar z)$ 则

$$5 = Q_{t_1}^{t_2}[h_{jk}\dot z^j \overset{\#}{z}{}^k - U(z, \bar z)]\,\mathrm{d}t,$$

$$D5 = Q_{t_1}^{t_2}\left[\left(\frac{1}{2}\frac{5h_{jk}}{5z^s}\dot z^j\overset{\#}{z}{}^k - \frac{5U}{5z^j}\right)Dz^s + \left(\frac{1}{2}\frac{5h_{jk}}{5\bar z^s}\dot z^j\overset{\#}{z}{}^k\right)D\bar z^s + \frac{h_{sk}}{2}\dot z^s\overset{\#}{z}{}^k + \frac{h_{js}}{2}\dot z^j\overset{\#}{z}{}^s\right]\mathrm{d}t =$$

$$Q_{t_1}^{t_2}\frac{1}{2}\left[\left(\frac{5h_{jk}}{5z^s}\dot z^j\overset{\#}{z}{}^k - 2\frac{5U}{5z^j} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(h_{sk}\overset{\#}{z}{}^k)\right)Dz^s +\right.$$

$$\left.\left(\frac{5h_{jk}}{5\bar z^s}\dot z^j\overset{\#}{z}{}^k - 2\frac{5U}{5\bar z^s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(h_{js}\dot z^j)\right)D\bar z^s\right]\mathrm{d}t + \frac{1}{2}(h_{sk}\overset{\#}{z}{}^k Dz^s + h_{js}\dot z^j D\bar z^s)\Bigg|_{t_1}^{t_2}, \qquad (17$$

上述等式的第 2 项在 $D(5)$ 上为零# 因此, $D5 = 0$ Z

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(h_{sk}\overset{\#}{z}{}^k) - \frac{5h_{jk}}{5z^s}\dot z^j\overset{\#}{z}{}^k\right] = -\frac{5U}{5z^s},\quad \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(h_{js}\dot z^j) - \frac{5h_{jk}}{5\bar z^s}\dot z^j\overset{\#}{z}{}^k\right] = -\frac{5U}{5\bar z^s}\#$$

分解后就是式(13 和式(15 # 类此, 当 $U = 0$, $L = T$, $D5 = 0$ 时等价于式(9 和式(11 #

C 若 $L\ I\ C^m(TM, C)$, 在局部坐标系$(U; z^j)$ 中

$$L(z^j, \bar z^j, \dot z^j, \overset{\#}{z}{}^j) = \frac{\mathrm{i}}{2}\bar z^j\dot z^j - H(z^k, \bar z^k), \qquad (18$$

则 $$\frac{5L}{5z^j} = -\frac{5H}{5z^j},\ \frac{5L}{5\bar z^j} = \frac{\mathrm{i}}{2}\overset{\#}{z}{}^j,\ \frac{5L}{5\dot z} = \frac{\mathrm{i}}{2}\bar z^j - \frac{5H}{5\bar z^j},\ \frac{5L}{5\overset{\#}{z}{}^j} = 0,$$

则

$$\begin{cases} \mathrm{D}_{z^j} L = 0\ ]\ \dfrac{\mathrm{i}}{2}\overset{\#}{z}{}^j = -\dfrac{5H}{5z^j}\ ]\ \overset{\#}{z}{}^j = 2\mathrm{i}\dfrac{5H}{5z^j}, \\ \mathrm{D}_{\bar z^j} L = 0\ ]\ 0 = \dfrac{\mathrm{i}}{2}\dot z^j - \dfrac{5H}{5\bar z^j}\ ]\ \dot z^j = -2\mathrm{i}\dfrac{5H}{5\bar z^j}, \end{cases} \qquad (19$$

或者　$L(z^j, z^j, z^j, \overset{\#}{z}^j) = \frac{i}{4}(z^j z^j - z^j \overset{\#}{z}^j) - H(z^k, z^k)$,　(20

则　$\frac{5L}{5z^j} = -\frac{i}{4}\overset{\#}{z}^j - \frac{5H}{5z^j},\ \frac{5L}{5z^j} = \frac{i}{4}z^j,\ \frac{5L}{5z^j} = \frac{i}{4}z^j - \frac{5H}{5z^j},\ \frac{5L}{5\overset{\#}{z}^j} = -\frac{i}{4}z^j$,

因此

$$\begin{cases} D_{z^j}L = 0\ ]\ \frac{i}{4}\overset{\#}{z}^j = -\frac{i}{4}\overset{\#}{z}^j - \frac{5H}{5z^j}\ ]\ \overset{\#}{z}^j = 2i\frac{5H}{5z^j}, \\ D_{z^j}L = 0\ ]\ -\frac{i}{4}z^j = \frac{i}{4}z^j - \frac{5H}{5z^j}\ ]\ z^j = -2i\frac{5H}{5z^{j\#}} \end{cases} \tag{21}$$

更一般地, 若 $L\ I\ C^m(TM, C)$, 在 $U < M^n$

$$L(z^j, z^j, z^j, \overset{\#}{z}^j) = X(V) - H(z^k, z^k, p_k, p_k), \tag{22}$$

其中, $H\ I\ C^m(T^* M, C)$, $V\ I\ \mathscr{X}(M)$, $V = z^j 5_j + \overset{\#}{z}^j 5_j$ 在$(U; z^j)$, 且 X I $\mathscr{F}^1(M)$, $X = p_j dz^j + p_j dz^j_\#$ 那末, 式(22 变成

$$L(z^j, z^j, p_j, p_j) = p_j z^j + p_j \overset{\#}{z}^j - H(z^j, z^j, p_j, p_j)\# \tag{23}$$

若 L 给出, 则满足方程(22) 或(23) 的 1_形式 X 不是任意的, 它必须是 $p_j = 5L/5z^j$, $p_j = 5L/5\overset{\#}{z}^j{}_\#$ 若我们预先设定 $p_j = (i/2)\ z^j$, $p_j = 0$, 则 X = $(i/2)\ z^j dz^j_\#$ 若 $p_j = iz^j/4$, $p_j = -iz^j/4$, 则 $H = H(z^j, z^j, iz^j/2, 0)$, 或者 $H = H(z^j, z^j, iz^j/4, -iz^j/4)\#$ 那么它们定义在 M^n 上, 不在 $T^* M^n$ 上, 而且 L 不是任意的# 它由式(22 和式(23 或者式(18 和式(20 给出# 这是在式(18 和式(20 的情况# 那末, 由式(23

$$\begin{cases} D_{z^j}L = 0\ ]\ p_j = -\frac{5H}{5z^j},\ D_{p_j}L = 0\ ]\ z_j = \frac{5H}{5p_j}, \\ D_{z^j}L = 0\ ]\ p_j = -\frac{5H}{5z^j},\ D_{p_j}L = 0\ ]\ \overset{\#}{z}^j = \frac{5H}{5p_j{}^\#} \end{cases}$$

定理 2.4　若 $L\ I\ C^m(TM, C)$, 且 $L(z^j, z^j, z^j, \overset{\#}{z}^j) = iz^j z^j/2 - H(z^j, z^j)$ 或者 $L(z^j, z^j, z^j, \overset{\#}{z}^j) = i(z^j z^j - z^j \overset{\#}{z}^j)/4 - H(z^j, z^j)$, 则 Lagrange 方程 $D_{z^j}L = 0$, $D_{z^j}L = 0$ 是

$$\hat{z}^j = -2i\frac{5H}{5z^j},\ \overset{\#}{z}^j = 2i\frac{5H}{5z^{j\#}} \tag{24}$$

这是 Hamilton 方程# 若 $L(z^j, z^j, z^j, \overset{\#}{z}^j) = p_j z^j + p_j \overset{\#}{z}^j - H(z^j, z^j, p_j, p_j)$, 则 Lagrange 方程 $D_{z^j}L = 0$, $D_{z^j}L = 0$, $D_{p_j}L = 0$, $D_{p_j}L = 0$ 是 Hamilton 方程

$$\hat{p}_j = -\frac{5H}{5z^j},\ p_j = -\frac{5H}{5z^j},\ z^j = \frac{5H}{5p_j},\ \overset{\#}{z}^j = \frac{5H}{5p_j}, \tag{25}$$

其中, Hamilton 函数 $H(z^j, z^j)$ 及 $H(z^j, z^j, p_j, p_j)$ 分别定义在 M^n 及 $T^* M$ 上# 若 $L\ I\ C^m(TM, C)$ 给定, 且 $p_j = 5L/5z^j$, $p_j = 5L/5\overset{\#}{z}^j$, 则可以得到 Hamilton 函数 $H = p_j z^j + p_j \overset{\#}{z}^j - L(z^j, z^j, z^j, \overset{\#}{z}^j) = H_1(z^j, z^j)\#$ 若我们预先给定 p_j 和 p_j, 而且知道 L, 则我们可以一般地由式(22 得到 H 和 Hamilton 方程(25 #

对 $L = (p_j z^j + p_j \overset{\#}{z}^j) - H(z^j, z^j, p_j, p_j)$, 作用泛函

$$\begin{cases} 5 = Q_{t_1}^{t_2}[p_j z^j + p_j \overset{\#}{z}^j - H(z^j, z^j, p_j, p_j)]\,dt, \\ D\ = Q_{t_1}^{t_2}\Big[\left(z^j - \frac{5H}{5p_j}\right)Dp_j + \left(\overset{\#}{z}^j - \frac{5H}{5p_j}\right)Dp_j - \left(p^j + \frac{5H}{5z^j}\right)Dz^j - \\ \qquad \left(p_j + \frac{5H}{5z^j}\right)Dz^j\Big]\,dt + (p_j Dz^j + p_j Dz^j)\,|_{t_1}^{t_2}, \end{cases} \tag{26}$$

上述, 最后一项在 $D(5)$ 中为零# 因此, $D5 = 0$ Z 式(25)# 那么我们有

定理 2. 5(我们称它为第二 Hamilton 原理 由式(18 或式(20 给出的作用量 5 在由 Hamilton 方程(24 决定的轨线 C I $C^k(I, M)$ 上得到极值(平稳值)# 而由式(26) 决定的 5 在由 Hamilton 方程(25 决定的轨线 C I $C^k(I, M)$ 上得到极值(平稳值)# 或者说, 轨线 C I $C^k(I, M)$ 是 Hamilton 系统的运动, 若它是作用泛函 5 的临界点#

命题 2. 6 曲线 C I $C^k(I, M)$ 是作用泛函 $5: D(5) < C^k(I, M)\ y\ C$ 的临界点, 若且仅若它是 Hamilton 方程的解#

同样地, 若 $L = (1/2) h_{jk} z^j \overset{\#}{z}{}^k - U(z^l, z^l)$ 则我们有

定理 2. 7(我们称它为第三 Hamilton 原理 作用量 $5: D(5) < C^k(I, M)\ y\ C$,

$$5 = Q_{t_1}^{t_2}\left[\frac{1}{2} h_{jk} z^j \overset{\#}{z}{}^k - U(z^l, z^l)\right] \mathrm{d}t\# \qquad (27$$

在由 Newton 方程 $\mathrm{D}V / \mathrm{d}t = - \mathrm{d}U$, 即

$$\frac{1}{2} h_{jk} \frac{\mathrm{D}v^j}{\mathrm{d}t} = - \frac{5U}{5z^k}, \quad \frac{1}{2} h_{kj} \frac{\mathrm{D}v^j}{\mathrm{d}t} = - \frac{5U}{5z^k} \qquad (28$$

决定的轨线 C I $C^k(I, M)$ 上达到极值(平稳值)# 或者说, $C\ I\ C^k(I, M)$ 是 Newton 方程(28 的解, 若且仅若它是式(27 的临界点#

命题 2. 8 CI $C^k(I, M)$ 是泛函 5 (式(27 , 的临界点若且仅若它是 Newton 方程(28 的解#

式(28 分解后是上述的式(12 和式(14 # 当

$$L = \frac{1}{2} h_{jk} z^j \overset{\#}{z}{}^k - U(z^j, z^j) = T - U, \quad p_k = \frac{5L}{5z^k} = \frac{1}{2} h_{kj} \overset{\#}{z}{}^j, \quad p_k = \frac{5L}{5\overset{\#}{z}{}^k} = \frac{1}{2} h_{jk} z^j,$$

$$X = \frac{5L}{5z^k}\mathrm{d}z^k + \frac{5L}{5\overset{\#}{z}{}^k}\mathrm{d}z^k = \frac{1}{2} h_{jk} z^j \mathrm{d}z^k + \frac{1}{2} h_{kj} \overset{\#}{z}{}^k \mathrm{d}z^k = V$$

时, 其中, $V = z^j 5_j + \overset{\#}{z}{}^j 5_j$, 则

$$X(V) = 3V, \ V4 = \frac{1}{2} h_{jk} z^j \overset{\#}{z}{}^k + \frac{1}{2} h_{kj} z^k \overset{\#}{z}{}^j = \frac{1}{2}(h_{jk} + h_{kj}) z^j \overset{\#}{z}{}^k = h_{jk} z^j \overset{\#}{z}{}^k = 2T\#$$

因此,

$$E = X(V) - L = 2T - T + U = T + U\# \qquad (29$$

通常, E 称为能量, 那么我们有

定理 2. 9(我们称为能量守恒定律 能量 E 沿作用泛函 $5: D(5) < C^k(I, M)\ y\ C$ 的临界点))) 泛函 5 达到极值(5 的平稳值 的轨线是常量#

事实上, $E = X(V) - L = \frac{5L}{5z^j} z^j + \frac{5L}{5\overset{\#}{z}{}^j} \overset{\#}{z}{}^j - L$, 由定理 2. 2 和命题 2. 3

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{5L}{5z^j} z^j + \frac{5L}{5z^j} \text{\&}^j + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{5L}{5\overset{\#}{z}{}^j}\overset{\#}{z}{}^j + \frac{5L}{5\overset{\#}{z}{}^j}\overset{\&}{z}{}^j - \frac{5L}{5z^j} z^j - \frac{5L}{5z^j} \text{\&}^j - \frac{5L}{5z^j}\overset{\#}{z}{}^j - \frac{5L}{5\overset{\#}{z}{}^j}\overset{\&}{z}{}^j =$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{5L}{5z^j} - \frac{5L}{5z^j}\right) z^j + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{5L}{5\overset{\#}{z}{}^j} - \frac{5L}{5z^j}\right)\overset{\#}{z}{}^j = 0$$

即, 当 K hler 流形上的质点在势场中运动时, 动能与势能之和是常数# 这时, 质点的运动方程是 Newton 方程 $\mathrm{D}V / \mathrm{d}t = - \mathrm{d}U$ (式(12 、(14 # 这也是从 K hler 流形上的 Newton 力学(见文献 [7] 中的动能定律导出的能量守恒定律#

若 $L = (1/2) h_{jk} z^j \overset{\#}{z}{}^k (U = 0)$, 则

$$E = X(V) - L = 2T - T = T = (1/2) h_{jk} z^{j} \overset{\#}{z}{}^{k}\#$$

从能量守恒定律, 我们知道在泛函 $5 = \int_Q L\,\mathrm{d}t$ 达到极值的轨线 C I $C^{k}(I, M)$ 上 $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t = 0\#$ 由定理 2.7, 运动方程是 Newton 方程 $\mathrm{D}V/\mathrm{d}t = 0\#$ 即是方程(9)、(11)# 这表明当外力 $F = 0$ 或者 $\mathrm{d}U = 0$ 时质点沿测地线运动, 而且动能保持不变#

在坐标系 $(U; z^{j})$ 中, 若对一些指标 $5L/5z^{s} = 0$ 或 $5L/5\overset{\#}{z}{}^{s} = 0$, 即 L I $C^{m}(TM, C)$ 不明显地包含 z^{s} 或 $\overset{\#}{z}{}^{s}$# 这样的坐标 z^{s}、$\overset{\#}{z}{}^{s}$ 称为循环坐标# 那么, 沿泛函 $5 = \int_Q L\,\mathrm{d}t$ 的极值 C I $D(5) < C^{k}(I, M)$ 我们有

$$\hat{p}_{s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{5L}{5z^{s}} = 0, \text{ 或 } \hat{p}_{s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{5L}{5\overset{\#}{z}{}^{s}} = 0, \quad p_{s} = \text{const 或 } p_{s} = \text{const}\#$$

定理 2.10(动量守恒定律 根据由泛函 $5 = \int_Q L\,\mathrm{d}t$ 决定的运动, 对应于循环坐标的/广义动量0 是守恒的, 其中, $D(5) < C^{k}(I, M)$, L I $C^{m}(TM, C)\#$

下一步, 我们要讨论坐标变换及运动方程相应的变化#

设 M^{n} 是 K hler 流形, P$: TM$ y M, (p, v) |y p, $P^{*}: T^{*}M$ y M, (p, X) |y p, 都是规范的丛投影, $P^{-1}(p) = T_{p}M$ 是切丛 TM 在点 p I M^{n} 的纤维, 切空间# $P^{*-1}(p) = T_{p}^{*}M$ 是余切丛 $T^{*}M$ 在点 p I M^{n} 的纤维, 余切空间# 包含点 p 的 $U < M^{n}$ 是开集# 如前, $(U; z^{j})$ 是 M^{n} 的局部坐标系# 那末, $P^{-1}(U) < TM$ 及 $P^{*-1}(U) < T^{*}M$ 都是 TM 和 $T^{*}M$ 的分别包含点 (p, v) 和 (p, X) 的开集# 而且 $(P^{-1}(U); z^{j}, z^{j}, z^{j}, \overset{\#}{z}{}^{j})$ 和 $(P^{*-1}(U); z^{j}, z^{j}, p_{j}, p_{j})$ 分别是 TM 和 $T^{*}M$ 的局部坐标系# 现在, 若 $(Uc; zc^{k})$ 是 M^{n} 的另一个坐标系, 则相应地 $(P^{-1}(Uc); zc^{k}, zc^{k}, zc^{k}, \overset{\#}{z}c^{k})$ 和 $(P^{*-1}(Uc); zc^{k}, zc^{k}, p_{k}^{c}, p_{k}^{c})$ 分别是 TM 和 $T^{*}M$ 的另一个坐标系#

TM 和 $T^{*}M$ 在 U 的标架场是 $\left\{5_{j}, 5_{j}\right\}_{j=1}^{n}$ 和 $\left\{\mathrm{d}z^{j}, \mathrm{d}z^{j}\right\}_{j=1}^{n}$, 在 Uc 上的标架场是 $\left\{5_{kc}, 5_{kc}\right\}_{k=1}^{n}$ 和 $\left\{\mathrm{d}zc^{k}, \mathrm{d}zc^{k}\right\}_{k=1}^{n}\#$ 向量场 V I $\mathscr{X}(M)$ 分别表示为

$$V = v^{j}5_{j} + v^{j}5_{j}, \quad \text{在 } U \text{ 上, 和 } Vc = vc^{k}5_{kc} + vc^{k}5_{kc}, \quad \text{在 } Uc \text{ 上}\#$$

1_形式场 X I $\mathscr{F}^{1}(M) = \mathscr{X}^{*}(M)$ 分别表示为

$$X = p_{j}\mathrm{d}z^{j} + p_{j}\mathrm{d}z^{j}, \quad \text{在 } U \text{ 上;} \quad Xc = p_{j}^{c}\mathrm{d}zc^{j} + p_{j}^{c}\mathrm{d}zc^{j}, \quad \text{在 } Uc \text{ 上}$$

同样地, Lagrange 函数 $L: TM$ y C 在 $P^{-1}(U)$ 上是 $L(z^{j}, z^{j}, z^{j}, \overset{\#}{z}{}^{j})$, 而在 $P^{-1}(Uc)$ 上是 $Lc(zc^{k}, zc^{k}, zc^{k}, \overset{\#}{z}c^{k})\#$ Hamilton 函数 $H: T^{*}M$ y C 在 $P^{*-1}(U)$ 上是 $H(z^{j}, z^{j}, p_{j}, p_{j})$, 在 $P^{*-1}(Uc)$ 上是 $Hc(zc^{k}, zc^{k}, p_{k}^{c}, p_{k}^{c})\#$

若 U H Uc X , 全纯坐标变换 U$: U$ y Uc, z^{j} |y zc^{k}, $U^{-1}: Uc$ y U, zc^{k} |y z^{j}, 诱导出一些映射 U$_{*}: TU$ y TUc, $U^{*}: T^{*}Uc$ y $T^{*}U$, 而且 U$_{*} = (U^{-1})^{*}$, $U^{*} = U_{*}^{-1}$; 切映射:

$$\left\{\begin{array}{l} 5 = (U, U_{*}): \\ \quad P^{-1}(U) \text{ y } P^{-1}(Uc), \ (z^{j}, z^{j}, z^{j}, \overset{\#}{z}{}^{j}) \text{ |y } (zc^{k}, zc^{k}, zc^{k}, \overset{\#}{z}c^{k}), \\ 5^{-1} = (U^{-1}, U_{*}^{-1}): \\ \quad P^{-1}(Uc) \text{ y } P^{-1}(U), \ (zc^{k}, zc^{k}, zc^{k}, \overset{\#}{z}c^{k}) \text{ |y } (z^{j}, z^{j}, z^{j}, \overset{\#}{z}{}^{j}); \end{array}\right. \quad (30$$

余切映射:

$$\begin{cases} \quad = (U, U_*) = (U, (U^{-1})^*): \\ \quad P^{*-1}(U) \; y \; P^{*-1}(Uc), \; (z^j, z^j, p_j, p_j) \mid y \; (zc^k, zc^k, p\overset{c}{_k}, p\overset{c}{_k}), \\ 5^{-1} = (U^1, U_*^1) = (U^1, U^*): \\ \quad P^{*-1}(Uc) \; y \; P^{*-1}(U), \; (zc^k, zc^k, p\overset{c}{_k}, p\overset{c}{_k}) \mid y \; (z^j, z^j, p_j, p_j)\# \end{cases} \quad (31$$

它们都是切丛和余切丛上的坐标变换# 我们有

定理 2. 11 如上 U$: z^j \mid y \; zc^k$ 是全纯变换, 向量场 $V \; I \; \mathscr{X}(M)$ 在$(U; z^j)$ 上, $V = z^j 5_j + \overset{\#}{z}{}^j 5_j$ 则

$$\mathrm{U}_* V = z^j a_j^{kc} 5_{kc} + \overset{\#}{z}{}^j a_j^{kc} 5_{kc} = zc^k 5_{kc} + \overset{\#}{z} c^k 5_{kc}\# \quad (32$$

纤维坐标变换是

$$\hat{z}c^k = a_j^{kc} z^j, \; \overset{\#}{z} c^k = a_j^{kc} \overset{\#}{z}{}^j, \quad (33$$

其中,

$$5_{kc} = \frac{5}{5zc^k}, \; , \; , \; a_j^{kc} = \frac{5zc^k}{5z^j}, \; a_j^{kc} = \frac{5zc^k}{5z^j}$$

等等# 而且

$$L(z^j, z^j, z^j, \overset{\#}{z}{}^j) = L.\; 5^{-1}(zc^k, zc^k, zc^k, \overset{\#}{z} c^k) = Lc(zc^k, zc^k, zc^k, \overset{\#}{z} c^k) =$$
$$Lc.\; 5(z^j, z^j, z^j, \overset{\#}{z}{}^j)\#$$

因此, 我们得到

$$Lc = L.\; 5^{-1} = (5^{-1})^* L = 5_* L, \; L = Lc.\; 5 = 5^* Lc\# \quad (34$$

Lagrange 算子的变换是

$$\begin{cases} \mathrm{D}_{z^j} L = \mathrm{D}_{z^j} Lc.\; 5 = a_j^{kc} \mathrm{D}_{zc^k} Lc, \\ \mathrm{D}_{z^j} L = \mathrm{D}_{z^j} Lc.\; 5 = a_j^{kc} \mathrm{D}_{zc^k} Lc\# \end{cases} \quad (35$$

Lagrange 方程

$$\mathrm{D}_{z^j} L = 0, \; \mathrm{D}_{z^j} L = 0, \qquad j = 1, 2, \; , \; , n \quad (36$$

变成

$$\mathrm{D}_{zc^k} Lc = 0, \; \mathrm{D}_{zc^k} Lc = 0, \qquad k = 1, 2, \; , \; , n, \quad (37$$

其中 $\mathrm{D}_{zc^k} Lc = \mathrm{D}_{zc^k} L.\; 5^{-1} = a_{kc}^j \mathrm{D}_{z^j} L, \; \mathrm{D}_{zc^k} Lc = \mathrm{D}_{zc^k} L.\; 5^{-1} = a_{kc}^j \mathrm{D}_{z^j} L\#$

因此,

$$\mathrm{D}_{zc^k} = a_{kc}^j \mathrm{D}_{z^j}, \; \mathrm{D}_{zc^k} = a_{kc}^j \mathrm{D}_{z^j}, \qquad \text{对 } Lc = 5_* L\#$$

定理 2. 12 若 C I $C^k(I, M)$ 是式(36) 的解, 则 Cc = $U.\, C \; I \; C^k(I, M)$ 是式(37 的解#

证明 显然, 若 C$: (z^j(t), z^j(t)) < U$ 是式(36) 的解, 则 $\hat{C} = z^j 5_j + \overset{\#}{z}{}^j 5_j < TU$ 是这个 C 的切向量# 而且 C 在 TN 的提升 C$: (z^j(t), z^j(t), z^j(t), \overset{\#}{z}{}^j(t)) < P^{-1}(U)$ 满足 Lagrange 方程

$$\mathrm{D}_{z^j} L(z^j(t), z^j(t), z^j(t), \overset{\#}{z}{}^j(t)) = 0, \; \mathrm{D}_{z^j} L(z^j(t), z^j(t), z^j(t), \overset{\#}{z}{}^j(t)) = 0$$

且 $(zc^k(t), zc^k(t), zc^k(t), \overset{\#}{z} c^k(t)) = 5(z^j(t), z^j(t), z^j(t), \overset{\#}{z}{}^j(t))$, 即 Cc = $5(C)$ 也满足 Lagrange 方程

$$\mathrm{D}_{zc^k} Lc = a_{kc}^j \mathrm{D}_{z^j} L = 0, \; \mathrm{D}_{zc^k} Lc = a_{kc}^j \mathrm{D}_{z^j} L = 0\#$$

因此, Cc = $U(C)$, 即 Cc = $5(C) < P^{-1}(Uc)$ 是式(37 的解# 而且, 它的切向量

$$Vc = \frac{\mathrm{d}\,Cc}{\mathrm{d}t} = zc^k 5_{kc} + \overset{\#}{z} c^k 5_{kc} = a_j^{kc} z^j 5_{kc} + a_j^{kc} \overset{\#}{z}{}^j 5_{kc} = U_* V = U_* \frac{\mathrm{d}\,C}{\mathrm{d}t}\#$$

注意，标架 $5_j = 5_{z^j} = 5/5z^j$ 和 $5_j = 5_{z^j} = 5/5z^j$ 被看作为偏微分算子，那末，它在坐标变换下的变化规律和 Lagrange 算子 D_{z^j} 和 D_{z^j} 的变化规律一样#

定理 2.13　如上，$U: z^j \mid y\ zc^k$ 是全纯变换，形式场 $X \ I\ \mathscr{F}^1(M)$，

$$X = p_j \mathrm{d}z^j + p_j \mathrm{d}z^j, \qquad 在 (U; z^j) 上,$$

则

$$U_* x = (U^1)^* x = X.U^1 = p_j a^j_{kc} \mathrm{d}zc^k + p_j a^j_{kc} \mathrm{d}zc^k = p^c_k \mathrm{d}zc^k + p^c_k \mathrm{d}zc^k = Xc\#$$

纤维坐标的变换是

$$p^c_k = a^j_{kc} p_j, \quad p^c_k = a^j_{kc} p^c_j, \tag{38}$$

其中　$$a^j_{kc} = \frac{5z^j}{5zc^k}, \quad a^j_{kc} = \frac{5zc^j}{5zc^k}\#$$

$$H(z^j, z^j, p_j, p_j) = H.5^{-1}(zc^k, zc^k, p^c_k, p^c_k) = Hc(zc^k, zc^k, p^c_k, p^c_k) =$$
$$Hc.5(z^j, z^j, p_j, p_j),$$
$$H = Hc.5 = 5^* Hc, \quad Hc = H.5^{-1} = (5^{-1})^* H = 5_* H\# \tag{39}$$

但是，$L = X(V) - H$，则 $5_* L = 5_*(X(V)) - 5_* H$，即

$$L(z^j, z^j, z^j, \overset{\#}{z}{}^j) = p_j z^j + p_j \overset{\#}{z}{}^j - H(z^j, z^j, p_j, p_j), \tag{40}$$

那末，

$$Lc(zc^k, zc^k, zc^k, \overset{\#}{z}c^k) = p^c_k zc^k + p^c_k \overset{\#}{z}c^k - Hc(zc^k, zc^k, p^c_k, p^c_k), \tag{41}$$

且

$$p^c_k = \frac{5Lc}{5zc^k} = a^j_{kc} \frac{5L}{5z^j} = a^j_{kc} p_j, \quad p^c_k = \frac{5Lc}{5\overset{\#}{z}c^k} = a^j_{kc} \frac{5L}{5\overset{\#}{z}{}^j} = a^j_{kc} p_j\# \tag{42}$$

由 Hamilton 函数 $H(z^j, z^j, p_j, p_j)$ 决定的 Hamilton 向量场是

$$X = \frac{5H}{5p_j} 5_{z^j} + \frac{5H}{5p_j} 5_{z^j} - \frac{5H}{5z^j} 5_{p_j} + \frac{5H}{5z^j} 5_{p_j} \ I\ \mathscr{X}(T^* M), \tag{43}$$

它是在 $P^{*-1}(U) < T^* M$ 上的切丛 $T(T^* M)$ 的截面 X 的坐标表示#

同样，由 $Hc(zc^k, zc^k, p^c_k, p^c_k)$ 决定的 Hamilton 向量场是

$$Xc = a^{kc}_j \frac{5H}{5p_j} 5_{zc^k} + a^{kc}_j \frac{5H}{5p_j} 5_{zc^k} - a^j_{kc} \frac{5H}{5z^j} 5_{p^c_k} - a^j_{kc} \frac{5H}{5z^j} 5_{p^c_k} \ I\ \mathscr{X}(T^* M), \tag{44}$$

它是在 $P^{*-1}(Uc) < T^* M$ 上的切丛 $T(T^* M)$ 的截面 Xc 的坐标表示#

在坐标变换下利用式(40 和式(41 由 H 和 Hc 决定的 Hamilton 方程是

$$\begin{cases} \hat{z}^j = \dfrac{5H}{5p_j}, & \overset{\#}{z}{}^j = \dfrac{5H}{5p_j}, \quad p_j = -\dfrac{5H}{5z^j}, \quad p_j = -\dfrac{5H}{5z^j}, \\ zc^k = \dfrac{5Hc}{5p^c_k}, & \overset{\#}{z}c^k = \dfrac{5Hc}{5p^c_k}, \quad p^c_k = -\dfrac{5Hc}{5zc^k}, \quad p^c_k = -\dfrac{5Hc}{5zc^k}\# \end{cases} \tag{45}$$

其中　$$\frac{5Hc}{5p^c_k} = a^{kc}_j \frac{5H}{5p_j}, \quad \frac{5Hc}{5p^c_k} = a^{kc}_j \frac{5H}{5p_j}; \quad \frac{5Hc}{5zc^k} = a^j_{kc} \frac{5H}{5z^j}, \quad \frac{5Hc}{5zc^k} = a^j_{kc} \frac{5H}{5z^j}\#$$

由式(40 和式(41 看出，Lagrange 方程是 Hamilton 方程#　它们的变换关系是

$$\begin{cases} \hat{z}^j - \dfrac{5H}{5p_j} = a^j_{kc}\left(zc^k - \dfrac{5Hc}{5p^c_k}\right), & p_j + \dfrac{5H}{5z^j} = a^{kc}_j\left(p^c_k + \dfrac{5Hc}{5zc^k}\right), \\ \overset{\#}{z}{}^j - \dfrac{5H}{5p_j} = a^j_{kc}\left(\overset{\#}{z}c^k - \dfrac{5Hc}{5p^c_k}\right), & p_j + \dfrac{5H}{5z^j} = a^{kc}_j\left(p^c_k + \dfrac{5Hc}{5zc^k}\right)\# \end{cases} \tag{46}$$

定理 2.14　若 $C(t): (z^j(t), z^j(t), p_j(t), p_j(t)) < P^{*-1}(U)$ 是 (45a) 的解，$Cc(t)$:

$(zc^k(t), zc^k(t), p^c_k(t), p^c_k(t)) = 5(z^j(t), z^j(t), p_j(t), p_j(t))$ 是(45b 的解#

证明 显然# 我们容易得到曲线 $C(t):(z^j(t), z^j(t), p_j(t), p_j(t))$ 是式(45a) 的解则 $Cc = 5.C:(zc^k(t), zc^k(t), p^c_k(t), p^c_k(t))$ 是(45b) 的解, 而且 X(见式(43)) 是 C 的切向量, 因此 Xc(见式(44)) 是 Cc 的切向量, 而且 $Xc = 5{*}X$#

[参 考 文 献]

[1] 甘特马赫尔 .分析力学[M].钟奉俄,薛问西 译.北京:人民教育出版社,1963,1 163.

[2] Arnold V I. Mathematical Methods of Classical Mechanics[M]. New York: Springer_Verlag, 1978, 1 300.

[3] Arnold V I. Mathematical Aspect of Classical and Celestial Mechanics. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol 3. Dynamical Systems 3[M]. New York: Springer_Verlag, 1985, 1 48.

[4] Curtis W D, Miller F R. Differential Manifolds and Theoretical Physics[M]. Orlando, Florida: Academic Press Inc, 1985, 1 191.

[5] Dubrorin B A, Fomenko A T, Novikov S P. Modern Geometry Methods and Application. Parts , [M]. New York: Springer_Verlag, New York Inc, 1984, 1 374, 1 357.

[6] von Westenholz C. Differential Forms in Mathematical Physics[M]. Amsterdam, New York, Oxford: North_Holland Publishing Company, 1978, 335 439.

[7] 张荣业.关于K¾hler流形上的牛顿力学[J].应用数学和力学,1996,17(8 :709 720.

Lagrangian Mechanics on K hler Manifolds

ZHANG Rong_ye

(Institute of Mathematics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, P.R.China

Abstract: Lagrangian mechanics on K hler manifolds were discussed, and the complex mathematical aspects of Lagrangian operator, Lagrange. s equation, the action functional, Hamilton. s principle and Hamilton. s equation, and so on were given.

Key words: K hler manifold; absolute differential; Lagrangian operator; Hamilton. s principle