应用数学和力学,第 26 卷 第 11 期(2005 年 11 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2005) 11_1261_10

离散扰动 NLS 方程组的 Smale 马蹄与混沌 (Ⅰ)——Poincar 映射*

高 平[1], 郭柏灵[2]

(1. 广州大学 应用数学系, 广州 510405;
2. 应用物理与计算数学研究所, 北京 100088)

(我刊编委郭柏灵来稿)

摘要: 利用 n 维 Conley_Moser 条件证明了一类离散扰动非线性 Schrödinger 方程(NLS) 的 Smale 马蹄的存在性• 由以上结果, 我们得到离散扰动 NLS 方程组存在不变集 Λ, 其动力系统与四符号变换拓扑共轭•

关 键 词: 同宿轨道; Poincar 映射; Smale 马蹄; Conley_Moser 条件
中图分类号: O175 文献标识码: A

引 言

有限维动力系统混沌行为的存在性这个问题多年来一直受到广泛关注, 用理论和实验来验证混沌的存在性的方法已经较为完善• 众所周知, 如果双曲周期轨道的稳定和不稳定流形横截相交, 则产生混沌现象• Melnikov 方法对于证明双曲周期轨道是否横截相交是非常有效的• Conley 和 Moser[1] 给出了另外一种证明二维系统混沌的方法• 满足 Conley_Moser 条件是二维可逆映射存在 Smale 马蹄形动力系统的充分条件, 即可逆映射存在不变 Cantor 集, 在这个集合上动力系统与 $n(n \geqslant 2)$ 符号动力系统拓扑共轭• Conley_Moser 条件中映射在整个定义区域的行为并不重要, 只要考虑映射在不相交"水平带"("horizontal strips") 集合上如何作用• Wiggins[2] 对 Conley_Moser 条件作了推广• 通过构造不相交"水平板"("horizontal slabs") 集, 他建立了 $n(n \geqslant 2)$ 维映射存在不变集使映射与符号系统拓扑共轭的的条件• Li 和 Wiggins[3] 将 n 维 Conley_Moser 条件应用到一类离散扰动非线性 Schrödinger 方程并构造了 Smale 马蹄• 本文将利用文献[2]和文献[3]中给出的方法研究具有不同扰动项的离散非线性 Schrödinger 方程 Smale 马蹄的存在性•

考虑如下 n 粒子(任意 $2 < n < \infty$) 有限差分动力系统:

$$
\begin{aligned}
i\dot{q}_n = {} & (1/h^2)[q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}] + |q_n|^2(q_{n+1} + q_{n-1}) - 2\omega^2 q_n + \\
& i\varepsilon[-\alpha q_n + (\beta/h^2)(q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}) - \Gamma -
\end{aligned}
$$

* 收稿日期: 2004_08_08; 修订日期: 2005_08_23
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10471046); 广东省自然科学基金资助项目(04300099)
作者简介: 高平(1962—), 女, 云南曲靖人, 教授, 博士(联系人. +86_20_86551803; E_mail: pinggaow@sohu.com)•

$$\xi | q_n |^2 q_n - \delta | q_n |^4 q_n], \tag{1}$$

其中

$$q_{n+N} = q_n,\ q_{N-n} = q_n,\ h = 1/N,$$

$$N\tan\frac{\pi}{N} < \omega < N\tan\frac{2\pi}{N}, \qquad \text{当} N > 3,$$

$$3\tan\frac{\pi}{3} < \omega < \infty, \qquad \text{当} N = 3,$$

$$\varepsilon \in [0, \varepsilon_0),\ \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \Gamma > 0,\ \xi > 0,\ \delta > 0 \text{ 为常数•}$$

显然, 这是 $2(M+1)$ 维系统, 当 $M = N/2$ 时偶, $M = (N-1)/2$ 时奇•

系统(1)是以下扰动NLS方程组的有限差分离散化:

$$\mathrm{i}q_t = q_{xx} + 2(qq - \omega^2)q + \mathrm{i}\varepsilon[-\alpha q + \beta q_{xx} - \Gamma - \xi | q |^2 q - \delta | q |^4 q], \tag{2}$$

其中 $q(x+1) = q(x)$, $q(-x) = q(x)$, $\pi < \omega < 2\pi$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\Gamma > 0$, $\xi > 0$, $\delta > 0$ 是常数•

Guo 和 Chen[4] 讨论了如下系统的同宿轨道的存在性

$$\mathrm{i}q_t = q_{xx} + 2(qq - \omega^2)q + \mathrm{i}\varepsilon(\hat{D}q - \Gamma - n | q |^2 q - m | q |^4 q), \tag{3}$$

其中 q 是 2π 周期的, 而且关于 x 是偶函数, $\hat{D}$ 是具有以下形式的有界耗散算子

$$\hat{D}q = -\alpha q + \beta\hat{B}q,$$

其中 $\alpha > 0$, $\beta > 0$; $\hat{B}$ 是 ∂xx 的 Fourier 截断,

$$\hat{B}\cos(kx) = \begin{cases} -k^2\cos(kx), & k > K, \\ 0, & k \geqslant K, \end{cases}$$

而且 $\omega \in (1/2, 1)$, $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$ 是小扰动参数• 他们利用几何奇异扰动理论, Melnikov 方法和可积理论证明了(3)对任意的小 $\varepsilon > 0$ 和适当的参数 存在一对对称的同宿轨道, 对方程组使用类似方法, 我们能得到与文献[5]相同的关于动力系统(1)的同宿轨道存在性的定理•

定理 1 对任意 $N(7 \leqslant N < \infty)$, 存在正数 ε, 使得 Σ_N 存在子流形 E_ε, 另外, 对关于 E_ε 的任意参数 $(\omega, \alpha, \beta, \Gamma, \xi, \delta)$ 存在一个同宿轨道逼近不动点 q_ε, 其中 $\Sigma_N(N \geqslant 7)$ 表示外向参数空间, 即

$$\Sigma_N = \left\{ (\omega, \alpha, \beta, \Gamma, \xi, \delta) \mid N\tan\frac{\pi}{N} < \omega < N\tan\frac{2\pi}{N}, \right.$$
$$\left. \alpha > 0, \beta > 0, \Gamma > 0, \xi > 0, \delta > 0 \right\}•$$

已知方程组(1)存在同宿轨道逼近某个鞍点, 我们在此前提下构造 Smale 马蹄• 构造过程分为以下几步:

1) 计算系统(1)的不动点并分析其稳定性•

我们首先定义不动平面 Π, 然后考虑在某些参数条件下方程组(1) 限制在平面 Π 上特殊的不动点: p_ε(槽)(sink) 和 q_ε(鞍(saddle), 逼近 q_ε 的同宿轨道) 利用调和扰动, 我们计算 q_ε 的特征值并得到其逼近形•

2) 在鞍点 q_ε 的小邻域上构造 Poincar 映射•

我们首先将系统(1)中 q_ε 变换到原点, 系统(1)的线性部分变换为 Jordan 主形式• 然后在所得新方程组原点小邻域中我们定义两个 Poincar 部分 Σ_0 和 Σ_1, 并构造 Poincar 映射 P:

$$P = P_1^0 \circ P_0^1,$$

其中 P_0^1: $U_0 \subset \Sigma_0 \mapsto \Sigma_1$, P_1^0: $U_1 \subset \Sigma_1 \mapsto \Sigma_0$,

P_0^1由原点邻域内的流确定, 轨道由 Σ_1 上原点出发到 Σ_1的“追逐时间”是无界的. P_1^0由原点邻域外的全局流确定, 该轨道从 Σ_1 出发到达 Σ_0的“追逐时间”是有界的. 我们还计算Poincaré 映射的不动点并在 Poincaré 映射 P 下构造 Σ_0 上的 Smale 马蹄.

3) 应用推广 Conley_Moser 条件验证 Poincaré 映射 P 的动力系统与四符号系统拓扑共轭.

我们首先在 Σ_0 上构造“板”(“slabs”)$S_l^{(i)}(i=1,2)$ 和 $\mathbb{S}_l$, 并引入相关定义. 然后利用文献[3] 中的一般结论得到 $\mathbb{S}_l$ 中四个稳定的“薄片”(“slices”):

$$V_l^{(+,i)},\quad V_l^{(-,i)},\qquad i=1,2,$$

以及四个不稳定“薄片”:

$$H_l^{(+,i)},\quad H_l^{(-,i)},\qquad i=1,2,$$

使得 $V_l^{(\pm,i)}$ 和$H_l^{(\pm,i)}$, $i=1,2$, 满足 n_维Conley_Moser条件. 可以证明存在紧的不变Cantor集 $\Lambda^{(1,2)}$, 其上 Poincaré 映射 P 与四符号动力系统拓扑共轭. 我们得到以下定理.

定理 存在紧不变 Cantor 集 $\Lambda^{(1,2)}\subset(S_l^1\cup S_l^2)\subset\mathbb{S}_l$ 使得P 在 $\Lambda^{(1,2)}$ 上的限制与四符号 $-2,-1,1,2$ 的动力系统 σ 拓扑共轭. 即, 存在同胚

$$\phi:\ \Sigma_4\to\Lambda^{(1,2)}$$

使得以下图表交换

$$\begin{array}{ccc}\Sigma_4 & \xrightarrow{\phi} & \Lambda^{(1,2)}\\ \sigma\downarrow & & \downarrow P\\ \Sigma_4 & \xrightarrow{\phi} & \Lambda^{(1,2)}\end{array}.$$

本文主要参考 Li 和 Wiggins[3] 与 Wiggins[2] 的工作, 给出许多与文献[3] 中类似的结果.

本文安排如下. 第 1 节我们分析不动点的存在性和惟一性. 第 2 节我们在逼近鞍点的同宿轨道的邻域内构造 Poincaré 映射, 并且计算该映射的不动点. 在下篇文章中, 我们应用 n_维 Conley_Moser 条件构造“板”和“薄片”并证明在同宿轨道附近可以构造 Smale 马蹄.

1 不动点的存在性和稳定性

本节我们讨论系统(1) 的不动点的存在性和稳定性.

令 D 表示离散 NLS 方程组(1) 的相空间, 具体定义如下:

$$D\equiv\left\{\boldsymbol{q}\equiv\begin{pmatrix}\boldsymbol{q}\\ -\bar{\boldsymbol{q}}\end{pmatrix}\middle|\,\boldsymbol{q}=(q_0,q_1,\cdots,q_{N-1})^{\mathrm{T}},\ q_{n+N}=q_n,\ q_{N-n}=q_n\right\},$$

在 D 上定义二维平面 Π,

$$\Pi\equiv\left\{\boldsymbol{q}\mid\boldsymbol{q}\in D,\ q_0=q_1=\cdots=q_{N-1}\right\}.$$

显然, Π是系统(1) 的不变流形. 系统(1) 限制在不变平面 Π上的方程组是如下 ODE:

$$\mathrm{i}q_t=2q(|q|^2-\omega^2)-\mathrm{i}\varepsilon[\alpha q+\Gamma+\xi|q|^2q+\delta|q|^4q].\tag{4}$$

令

$$q=\sqrt{I}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\quad|q|=\sqrt{I},$$

常微分方程组(4) 变形为

$$\begin{cases}I_t=-2\varepsilon[\alpha I+\xi I^2+\delta I^3+\Gamma I^{1/2}\cos\theta],\\ \theta_t=-2(I-\omega^2)+\varepsilon\Gamma\sin\theta I^{-1/2}.\end{cases}\tag{5}$$

对 $\varepsilon>0$, 方程组(5) 的不动点满足如下方程:

$$\begin{cases}\Gamma\cos\theta = -[\alpha I^{1/2} + \xi I^{3/2} + \delta I^{5/2}],\\ \varepsilon\Gamma\sin\theta = 2I^{1/2}(I-\omega^2)\cdot\end{cases}\tag{6}$$

通过计算, 我们得到方程组(5)的两个不动点: p_ε 和 q_ε, 即

$$p_\varepsilon:\begin{cases}I_p = \omega^2 + \dfrac{\sqrt{a}}{2\omega}\varepsilon + \mathscr{O}(\varepsilon^2),\\ \theta_p = -\arctan\dfrac{\sqrt{a}}{\omega(\alpha+\xi\omega^2+\delta\omega^4)} - \pi + \mathscr{O}(\varepsilon),\end{cases}$$

$$q_\varepsilon:\begin{cases}I_p = \omega^2 - \dfrac{\sqrt{a}}{2\omega}\varepsilon + \mathscr{O}(\varepsilon^2),\\ \theta_p = \arctan\dfrac{\sqrt{a}}{\omega(\alpha+\xi\omega^2+\delta\omega^4)} - \pi + \mathscr{O}(\varepsilon),\end{cases}$$

其中 $a \equiv \Gamma^2 - \omega^2(\alpha+\xi\omega^2+\delta\omega^4)^2 > 0\cdot$

方程组(5)在不动点 (I, θ) 的 Jacobi 矩阵是

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix}-2\varepsilon(\alpha+2\xi I+3\delta I^2+0.5\Gamma I^{-1/2}\cos\theta) & 2\varepsilon\Gamma I^{1/2}\sin\theta\\ -2-0.5\varepsilon\Gamma I^{-3/2}\sin\theta & \varepsilon\Gamma I^{-1/2}\cos\theta\end{bmatrix},$$

Jacobi 矩阵的特征方程是

$$\lambda^2 + b_1(I)\lambda + b_2(I) = 0,\tag{7}$$

其中

$$b_1(I) = 2\varepsilon(\alpha+2\xi I+3\delta I^2),$$
$$b_2(I) = \varepsilon^2(\alpha+3\xi I+5\delta I^2)(\alpha+\xi I+\delta I^2) + 8I(I-\omega^2) + 4(I-\omega^2)^2\cdot$$

由方程(7), 我们得到 p_ε 和 q_ε 的特征值:

$$\lambda_p = \pm 2\mathrm{i}\sqrt{\omega\varepsilon\sqrt{a}} - \varepsilon(\alpha+2\omega^2\xi+3\omega^4\delta) + \mathscr{O}(\varepsilon^{3/2}),$$

以及

$$\lambda_q = \pm 2\sqrt{\omega\varepsilon\sqrt{a}} - \varepsilon(\alpha+2\omega^2\xi+3\omega^4\delta) + \mathscr{O}(\varepsilon^{3/2}),$$

因此在平面 Π 上, p_ε 是槽, 而 q_ε 是鞍$\cdot$

下面我们分析 q_ε 在全相空间 D 上的线性稳定性$\cdot$

令 q_n 是 q_ε 的调和扰动, 其定义如下

$$q_n = q_\varepsilon + \eta g_n, \qquad 0 < \eta \ll 1,\tag{8}$$
$$g_n = (A_j e^{\lambda_j t} + B_j e^{\lambda_j t})\cos k_j n,$$

其中 $k_j = 2\pi j/N$, A_j 和 B_j 是复值常数$\cdot$

将(8)代入(1), 我们得到

$$\lambda_j \equiv \lambda_j^{\pm} = \varepsilon[-\alpha + 2(\cos k_j - 1)\beta a^{-2} - 2\xi|q_\varepsilon|^2 - 2\delta|q_\varepsilon|^4] \pm \sqrt{\Delta_j},$$
$$j = 0, 1, \dots, M,\tag{9}$$

其中

$$\Delta_j = |q_\varepsilon|^4(4+\varepsilon^2(\xi+2\delta|q_\varepsilon|^2)^2) -$$
$$4((h^{-2}+|q_\varepsilon|^2)(\cos k_j - 1) + 2|q_\varepsilon|^2 - \omega^2)^2\cdot$$

注意到 $|q_\varepsilon| = \omega - (\sqrt{a}/(4\omega^2))\varepsilon + \mathscr{O}(\varepsilon^2)$, 我们得到不动点的特征值 q_ε 的逼近形式:

1) $j = 0\cdot$ $\lambda_0^{\pm} = \pm 2a^{1/4}\varepsilon^{1/2}\omega^{1/2} + \mathscr{O}(\varepsilon)$;

2) $j = 1\cdot$ $\lambda_1^{\pm} = \pm 2\sqrt{(1-\cos^2 k_1)(\omega^2 - N^2\tan^2(\pi/N)(N^2+\omega^2))} + \mathscr{O}(\varepsilon)$, 其中 $k_1 = 2\pi/N$;

3) $j = 2, 3, \cdots, M$ ($M = N/2$, N(偶数); $M = (N-1)/2$, N(奇数))•

$$\lambda_j^{\pm} = -\varepsilon[\alpha + 2(1-\cos k_j)\beta a^{-2} + 2\xi\omega^2 + 2\delta\omega^4] \pm \mathrm{i}\sqrt{|\Delta_j|} + \mathscr{O}(\varepsilon^2)•$$

既然 $N \geqslant 7$(定理 1) 以及 $k_j \in [4\pi/7, \pi]$, $j = 2, 3, \cdots, M$, 我们有

$$0 > \cos k_j > \cos k_{j+1}, \qquad j = 2, 3, \cdots, M,$$

因此, 对充分小的 ε, q_ε 仍是全空间 D 上的鞍点, 其特征值满足如下关系式:

$$0 < \lambda_0^+ < \lambda_1^+,$$

$$0 < -R_e\{\lambda_2^+\} = -R_e\{\lambda_2^-\} < -R_e\{\lambda_3^+\} = -R_e\{\lambda_3^-\} < \cdots$$

$$< -R_e\{\lambda_M^+\} = -R_e\{\lambda_M^-\} < -\lambda_0^- < -\lambda_1^-,$$

其中 λ_0^+ 是最小扩张率(repelling rate), $-R_e\{\lambda_2^+\}$ 是最小收缩率(attracting rate)•

2 Poincaré 映射的构造

2.1 等价光滑变形

令

$$\alpha_j = -R_e\{\lambda_{j+1}^+\} = \varepsilon[\alpha + 2(1-\cos k_{j+1})\beta a^{-2} + 2\xi\omega^2 + 2\delta\omega^4],$$

$$\beta_j = \sqrt{|\Delta_{j+1}|}, \qquad j = 1, 2, \cdots, M-1,$$

$$\gamma_1 = \gamma_3 = 2a^{1/4}\varepsilon^{1/2}\omega^{1/2} + \mathscr{O}(\varepsilon),$$

$$\gamma_2 = \gamma_4 = 2\sqrt{(1-\cos^2 k_1)(\omega^2 - N^2\tan^2(\pi/N)(N^2+\omega^2)} + \mathscr{O}(\varepsilon)•$$

我们将系统(1)中的 q_ε 平移到原点• 由矩阵理论, 方程组(1)可写为如下形式

$$\begin{cases} \dot{x}_j = -\alpha_j x_j - \beta_j y_j + X_j(x, y, z), \\ \dot{y}_j = \beta_j x_j - \alpha_j y_j + Y_j(x, y, z), & j = 1, \cdots, M-1, \\ \dot{z}_k = \delta_k \gamma_k z_k + Z_k(x, y, z), & k = 1, \cdots, 4, \end{cases} \tag{10}$$

其中

$$\delta_k = \begin{cases} 1, & k = 1, 2; \\ -1, & k = 3, 4, \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x} \equiv (x_1, \cdots, x_{M-1})^{\mathrm{T}}, \ \boldsymbol{y} \equiv (y_1, \cdots, y_{M-1})^{\mathrm{T}}, \ \boldsymbol{z} \equiv (z_1, \cdots, z_4)^{\mathrm{T}},$$

$$X_j(0, 0, 0) = Y_j(0, 0, 0) = 0,$$

$$\mathrm{grad}X_j(0, 0, 0) = \mathrm{grad}Y_j(0, 0, 0) = 0, \qquad j = 1, \cdots, M-1,$$

$$Z_k(0, 0, 0) = \mathrm{grad}Z_k(0, 0, 0) = 0, \qquad k = 1, \cdots, 4,$$

而且 $\alpha_1 < \alpha_j$, $2 \leqslant j \leqslant M-1$, $\alpha_1 < \gamma_3 < \gamma_4$, $\gamma_1 < \gamma_2$•

令 λ_j, $j = 2(M+1)$, 表示(0, 0, 0)的 $2(M+1)$ 个不同特征值, 并适当选取参数(ε, ω, α, β, Γ, ξ, δ) 使得特征值 λ_j 满足

(Ⅰ)

$$\lambda_j \neq \sum_{k=1}^{2(M+1)} C_k \lambda_k, \ \mathrm{mod}[\mathrm{i}2\pi], \tag{11}$$

$j = 1, \cdots, 2(M+1)$; 其中 C_k, $k = 1, \cdots, 2(M+1)$ 是非负整数, 满足 $2 \leqslant \sum_{k=1}^{2(M+1)} C_k < \infty$•

因此方程组(10)变形为

$$\begin{cases} \dot{x}_j = -\alpha_j x_j - \beta_j y_j + X_j(x, y, z), \\ \dot{y}_j = \beta_j x_j - \alpha_j y_j + Y_j(x, y, z), & j = 1, \cdots, M-1, \\ \dot{z}_j = \delta_k \gamma_k z_k + Z_k(x, y, z), & k = 1, \cdots, 4, \end{cases} \tag{12}$$

其中

$$\boldsymbol{x} \equiv (x_1, \cdots, x_{M-1})^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{y} \equiv (y_1, \cdots, y_{M-1})^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{z} \equiv (z_1, \cdots, z_4)^{\mathrm{T}},$$

而且 X_j, Y_j, Z_j 在(0, 0, 0) 的某小邻域内恒为 0• 另外, 方程组(12) 与对称群 $G \equiv \{1, \sigma\}$ 等价, 其中 $\sigma \circ f(n, t) = f(n + N/2, t)$, f 是(1) 的解算子, 由(10),

$$\begin{cases} \sigma \circ \{x_j, y_j\} = \{(-1)^{j+1} x_j, (-1)^{j+1} y_j\}, & j = 1, \cdots, M-1, \\ \sigma \circ z_k = (-1)^{k+1} z_k, & k = 1, \cdots, 4, \end{cases}$$

即 σ 是半周期上的变换, $\sigma^{-1} = \sigma$, 1 表示单位元, 其他细节参看文献[3]•

令 h_1 表示(12) 中逼近(0, 0, 0) 的同宿轨道, 则 $h_2 = \sigma \circ h_1$ 也是逼近(0, 0, 0) 的同宿轨道• 为方便起见, 我们用 (x, y, z) 替换(12) 中的 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$•

下节我们利用以下事实构造方程组(12) 的 Poincaré 映射:

1) 方程组(12) 存在对称的逼近(0, 0, 0) 的同宿轨道对 h_1 和 h_2, $h_2 = \sigma \circ h_1$;

2) 最小收缩率 α_1 小于最小扩张率 γ_1•

2.2 Poincaré 映射的构造

令 $h_i^{\pm}(i = 1, 2)$ 表示同宿轨道对 $h_i(i = 1, 2)$, $h_2^{\pm} = \sigma \circ h_1^{\pm}$ 的向前和向后时间段•

假设:

(Ⅱ) h_i^{+} 在(0, 0, 0) 点与 (x_1, y_1) 平面相切, h_i^{-} 在(0, 0, 0) 与 Z_1 正半轴相切•

令 μ 和 μ_1 是满足 $\mu \exp\{-2\pi\alpha_1/\beta_1\} < \mu_1 < \mu$ 的小参数, 我们引入以下定义•

Poincaré 截面 Σ_0 按如下定义

$$\mu_1 < x_1 < \mu, \quad y_1 = 0, \quad 0 < z_1 < \mu,$$

$$x_j^2 + y_j^2 < \mu^2, \qquad j = 2, \cdots, M-1,$$

$$|z_k| < \mu, \qquad k = 2, 3, 4•$$

Poincaré 截面 Σ_1 按如下定义

$$z_1 = \mu, \quad |z_k| < \mu, \qquad k = 2, 3, 4,$$

$$x_j^2 + y_j^2 < \mu^2, \qquad j = 1, \cdots, M-1•$$

Σ_0 和 Σ_1 上的坐标分别为

$$(x_1^0, \{x_j^0, y_j^0\}, \quad j = 2, \cdots, M-1; \; Z_k^0, \quad k = 1, \cdots, 4),$$

$$(\{x_j^1, y_j^1\}, \quad j = 1, \cdots, M-1; \; Z_k^1, \quad k = 2, 3, 4),$$

令 t_0^1 表示由 Σ_0 上一点出发到达 Σ_1 的轨道的“飞行”时间, 我们有

$$t_0^1 = (1/\gamma_1) \ln(\mu/z_1^0)• \tag{13}$$

从 Σ_0 到 Σ_1 Poincaré 映射 P_0^1 定义为

$$P_0^1: U_0 \subset \Sigma_0 \mapsto \Sigma_1,$$

$$\forall q \in U_0, \quad P_0^1(q) = F^{t_0^1} \in \Sigma_1,$$

其中 $t_0^1 = t_0^1(q) > 0$ 是使得 $F^{t_0^1}(q) \in \Sigma_1$ 的最小时间,即,

$$\begin{cases} \begin{cases} x_1^1 = e^{-\alpha_1 t_0^1} x_1^0 \cos\beta_1 t_0^1, \\ y_1^1 = e^{-\alpha_1 t_0^1} x_1^0 \sin\beta_1 t_0^1, \end{cases} \\ \begin{cases} x_j^1 = e^{-\alpha_j t_0^1}(x_j^0 \cos\beta_j t_0^1 - y_j^0 \sin\beta_j t_0^1), \\ y_j^1 = e^{-\alpha_j t_0^1}(x_j^0 \sin\beta_j t_0^1 + y_j^0 \cos\beta_j t_0^1), \qquad 2 \leqslant j \leqslant M-1, \end{cases} \\ \begin{cases} z_k^1 = e^{\gamma_k t_0^1} z_k^0, & k = 1, 2, \\ z_k^1 = e^{-\gamma_k t_0^1} z_k^0, & k = 3, 4. \end{cases} \end{cases} \tag{14}$$

令 $q_i^+ (i = 1, 2)$ 表示 $h_i^+ (i = 1, 2)$ 与 $\Sigma_0(z_1 = 0)$ 的边界的交点,

$$q_i^+ \equiv h_i^+ \cap \partial\Sigma_0,$$

而且 q_i^+ 具有坐标系

$$x_1 = x_1^{(+,i)}, \quad y_1 = 0,$$
$$x_j = x_j^{(+,i)}, \quad y_j = y_j^{(+,i)}, \qquad 2 \leqslant j \leqslant M-1,$$
$$z_1 = z_2 = 0, \quad z_3 = z_3^{(+,i)}, \quad z_4 = z_4^{(+,i)}.$$

令 $q_i^- (i = 1, 2)$ 表示 $h_i^- (i = 1, 2)$ 与 Σ_1 的交点,

$$q_i^- \equiv h_i^- \cap \Sigma_1,$$

而且 q_i^- 具有坐标系

$$z_1 = \mu, \quad z_2 = z_2^{(-,i)}, \quad z_3 = z_4 = 0,$$
$$x_j = 0, \quad y_j = 0 \qquad (1 \leqslant j \leqslant M-1),$$

我们有

$$P_1^0(q_i^-) = q_i^+.$$

我们定义从 Σ_1 到 $\Sigma_0 (\equiv \Sigma_0 \cup \partial\Sigma_0)$ 的 Poincaré 映射 P_1^0 如下

$$P_0^1: U_1 \subset \Sigma_1 \mapsto \Sigma_0,$$
$$\forall q \in U_1, \quad P_0^1(q) = F^{T(q)}(q) \in \Sigma_0,$$

其中 F 是(12)的解算子, $T(q) > 0$ 是使 $F^{T(q)} \in \Sigma_0$ 的最小时刻.

为得到 Poincaré 映射 P_1^0 的表达式,我们分别取 q_i^+ 和 q_i^- 为原点在 Σ_0 和 Σ_1 上,引入新的坐标系,即

$$\begin{cases} \begin{cases} x_1^0 = x_1^{(+,i)} + x_1^0, \\ x_j^0 = x_j^{(+,i)} + x_j^0, \\ y_j^0 = y_j^{(+,i)} + y_j^0, \qquad 2 \leqslant j \leqslant M-1, \end{cases} \\ \begin{cases} z_k^0 = z_k^0, & k = 1, 2, \\ z_k^0 = z_k^{(+,i)} + z_k^0, & k = 3, 4, \end{cases} \end{cases}$$

以及

$$\begin{cases} \begin{cases} x_j^1 = x_j^1 \\ y_j^1 = y_j^1, \qquad 2 \leqslant j \leqslant M-1, \end{cases} \\ \begin{cases} z_k^1 = z_k^{(-,i)} + z_k^1, & k = 2, \\ z_k^1 = z_k^1, & k = 3, 4. \end{cases} \end{cases}$$

Poincaré 映射 P_1^0 定义如下

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}^0 \\ \boldsymbol{y}^0 \\ \boldsymbol{z}^0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}^1 \\ \boldsymbol{y}^1 \\ \boldsymbol{z}^1 \end{pmatrix} + \boldsymbol{B}, \tag{15}$$

其中

$$\boldsymbol{x}^0 \equiv (x_1^0, \cdots, x_{M-1}^0)^{\mathrm{T}}, \ \boldsymbol{y}^0 \equiv (y_1^0, \cdots, y_{M-1}^0)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{z}^0 \equiv (z_1^0, \cdots, z_4^0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{x}^1 \equiv (x_1^1, \cdots, x_{M-1}^1)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{y}^1 \equiv (y_1^1, \cdots, y_{M-1}^1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{z}^1 \equiv (z_2^1, z_3^1, z_4^1)^{\mathrm{T}},$$

而且 $\boldsymbol{A}$ 是如下形式的 $(2M+1)\times(2M+1)$ 常数矩阵:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_{jk}^{(x,x)} & A_{jk}^{(x,y)} & A_{jk}^{(x,z)} \\ A_{jk}^{(y,x)} & A_{jk}^{(y,y)} & A_{jk}^{(y,z)} \\ A_{jk}^{(z,x)} & A_{jk}^{(z,y)} & A_{jk}^{(z,z)} \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{A}$ 中指标 j 取遍第 1 个上标的维数, k 取遍第 2 个上标的维数, $\boldsymbol{B}$ 是 $\bar{q}_i$ 和 Δq_i, $i = 1, 2$ 的 $(2M+1)$ 维列向量函数• 这里 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 由下式给出

$$\tilde{P}_1^0(\bar{q}_i + \Delta q_i) = q^+ + \langle \operatorname{grad}\tilde{P}_1^0(\bar{q}_i), \Delta q_i\rangle + N(\bar{q}_i, \Delta q_i),$$

其中 $\tilde{P}_1^0: \tilde{U}_1 \subset \Sigma_1 \to \tilde{\Sigma}_0$ ($\tilde{\Sigma}_0$ 是 Σ_0, $-\mu < z_1 < \mu$ 的放大) 是 P_1^0 的延拓, $\|N(\bar{q}_i, \Delta q_i)\| \sim o(\|\Delta q_i\|)$, 当 $\|\Delta q_i\| \to 0$, $\langle \operatorname{grad}\tilde{P}_1^0(\bar{q}_i), \Delta q_i\rangle$ 和 $\|N(\bar{q}_i, \Delta q_i)\|$ 是通常的直角坐标内积和范数•

由上分析, 我们构造 Poincaré 映射 P 如下:

$$P: U \subset \Sigma_0 \mapsto \Sigma_0,$$
$$P \equiv P_0^1 \circ P_1^0•$$

2.3 Poincaré 映射 P 的不动点

这节中, 我们利用"Silnikov 变量"计算 Poincaré 映射 P 的关于 T 的共轭, 得到 Poincaré 映射 P 的不动点•

令 S 是 Σ_0 和 Σ_1 上的变量集, 即

$$\left(x_1^0, \left\{x_j^0, y_j^0\right\}, \quad 2 \leqslant j \leqslant M-1, \quad t_0^1, z_2^1, z_k^0, \quad k = 3, 4\right)•$$

变形 T 定义如下:

$$\begin{cases} T: \mathscr{S} \to \Sigma_0, \\ x_1^0 \to x_1^0, \\ \left\{x_j^0, y_j^0\right\} \to \left\{x_j^0, y_j^0\right\}, \qquad 2 \leqslant j \leqslant M-1, \\ z_2^1 \to z_2^0 = e^{-\gamma_2 t_0^1}(z_2^{(-,i)} + z_2^1), \\ t_0^1 \to z_1^0 = e^{-\gamma_1 t_0^1}\mu, \\ z_k^0 \to z_k^0, \qquad k = 3, 4, \end{cases} \tag{16}$$

以及

$$\begin{cases} T^{-1}: \Sigma_0 \to S, \\ x_1^0 \to x_1^0, \\ \left\{x_j^0, y_j^0\right\} \to \left\{x_j^0, y_j^0\right\}, \qquad 2 \leqslant j \leqslant M-1, \\ z_2^0 \to z_2^1 = e^{\gamma_2 t_0^1} z_2^0 - z_2^{(-,i)}, \\ z_2^0 \to t_0^1 = (1/\gamma_1)\lg(\mu/z_1^0), \\ z_k^0 \to z_k^0, \qquad k = 3, 4, \end{cases} \tag{17}$$

显然，$T^{-1} \circ P_1^0 \circ P_0^1 \circ T$ 的不动点对应 Poincaré 映射 P 的不动点．

由(14)、(15)、(16)和(17)，Poincaré 映射 P 的不动点必须满足：

$$0 = x_1^{(+,i)}\left(A_{k1}^{(z,x)}\cos\beta_1 t_0^1 + A_{k1}^{(z,y)}\sin\beta_1 t_0^1\right) + A_{k2}^{(z,z)}\hat{z}_2^1 + C_k^{(z)}, \qquad k = 1, 2, \tag{18}$$

和

$$\sigma_k^0 = x_1^{(+,i)}\left(A_{k1}^{(\sigma,x)}\cos\beta_1 t_0^1 + A_{k1}^{(\sigma,y)}\sin\beta_1 t_0^1\right) + A_{k2}^{(\sigma,z)}\hat{z}_2^1 + C_k^{(\sigma)}, \tag{19}$$

其中

$$\sigma = x, \qquad 1 \leqslant k \leqslant M-1,$$
$$\sigma = y, \qquad 2 \leqslant k \leqslant M-1,$$
$$\sigma = z, \qquad k = 3, 4.$$

式(18)的矩阵形式为：

$$\begin{pmatrix} A_{12}^{(z,z)} \\ A_{22}^{(z,z)} \end{pmatrix} \hat{z}_2^1 = -x_1^{(+,i)} \begin{pmatrix} A_{11}^{(z,x)}\cos\beta_1 t_0^1 + A_{11}^{(z,y)}\sin\beta_1 t_0^1 \\ A_{21}^{(z,x)}\cos\beta_1 t_0^1 + A_{21}^{(z,y)}\sin\beta_1 t_0^1 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

记 $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} A_{12}^{(z,z)} \\ A_{22}^{(z,z)} \end{pmatrix}$．

假设：

(Ⅲ) $\dim\left\{T_{q_i^+}W^s \cap T_{q_i^+}W^u = 1\right\}$，$i = 1, 2$，其中 W^s 和 W^u 表示(12)中(0, 0, 0)的稳定和不稳定流形．

由条件(Ⅲ)，我们有

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}_1) = 1. \tag{21}$$

不失一般性，我们假设 $A_{22}^{(z,z)} \neq 0$，则存在向量 $\boldsymbol{b}$ 使得

$$A_{12}^{(z,z)} = \boldsymbol{b}A_{22}^{(z,z)}. \tag{22}$$

由式(20)和式(22)，我们有

$$\Delta_1\cos\beta_1 t_0^1 + \Delta_2\sin\beta_1 t_0^1 = 0,$$

其中

$$\Delta_1 = A_{11}^{(z,x)} - \boldsymbol{b}A_{21}^{(z,x)}, \quad \Delta_2 = A_{11}^{(z,y)} - \boldsymbol{b}A_{21}^{(z,y)}.$$

假设：

(Ⅵ) Δ_1 和 Δ_2 不同时等于 0．

由假设(Ⅵ)，(22)有无穷多解

$$t_0^{1,l} = \frac{l}{\beta_1}(l\pi - \varphi), \qquad l \in \mathrm{Z}, \quad \varphi = \arctan\left\{\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\right\}.$$

因此，存在整数 l_0 使得 Poincaré 映射 P 在每个 q_i^+，$i = 1, 2$ 的邻域存在无穷多不动点

$$\left\{q_l^i, \quad l = l_0, \cdots, \infty\right\}, \qquad i = 1, 2;$$

我们得到与文献[3]中的相同的结论•

结论 1 存在整数 l_0, 使得在 q_i^+, $i = 1, 2$ 的每一邻域存在不动点序列

$$\left\{q_l^{(i)}, \quad l = l_0, \cdots, \infty\right\}, \qquad i = 1, 2;$$

其中

$$q_l^{(2)} = \sigma q_l^{(1)}, \qquad l = l_0, \cdots, \infty•$$

[参 考 文 献]

[1] Moser J. Stable and random motions in dynamical systems[A] In: Annals of Mathematics Studies [C]. Princeton: **77** Princeton University Press, NJ, 1973.

[2] Wiggins S. Global Bifurcations and Chaos, Analytic Methods[M]. New York: Springer_Verlag, 1988.

[3] Li Y, Wiggins S. Homoclinic orbits and chaos in discretized perturbed NLS systems: Part II, Symbolic dynamics[J]. J Nonlinear Sci, 1997, **7**(4): 315—370.

[4] GUO Bo_ling, CHEN Han_lin. Persistent homoclinic orbits for a perturbed cubic_quintic nonlinear Schrodinger equation[J]. J Partial Diff Eqs, 2002, **15**(2): 6—36.

[5] Li Y, Wiggins S. Homoclinic orbits and chaos in discretized perturbed NLS systems: Part I, Homoclinic orbits[J]. J Nonlinear Sci, 1997, **7**(3): 211—269.

Smale Horseshoes and Chaos in Discretized Perturbed NLS Systems(Ⅰ)—Poincaré Map

GAO Ping[1], GUO Bo_ling[2]

(1. Department of Applied Mathematics, Guangzhou University, Guangzhou 510405, P.R.China;

2. Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, P.O. Box 8009, Beijing 100088, P.R.China)

Abstract: The existence of Smale horseshoes for a certain discretized perturbed nonlinear Schroedinger(NLS) equations was established by using n_dimensional versions of the Conley_Moser conditions. As a result, the discretized perturbed NLS system is shown to possess an invariant set Lambda on which the dynamics is topologically conjugate to a shift on four symbols.

Key words: homoclinic orbit; Poincaré map; Smale horseshoes; Conley_Moser condition