

文章编号: 1000-0887(2005) 11-1301-06

# 椭圆轨道真近点角的级数计算方法<sup>\*</sup>

顾晓勤, 谭朝阳

(电子科技大学 中山学院, 广东 中山 528403)

(马兴瑞推荐)

摘要: 用级数展开方法得到真近点角超越方程, 由迭代法求真近点角与时间的关系, 讨论迭代收敛的充分条件. 对于不满足迭代收敛充分条件情形, 列写偏近点角超越方程, 用迭代法求偏近点角变化规律, 用数值积分方法求出真近点角与时间的关系, 指出所有椭圆轨道都满足偏近点角迭代收敛的充分条件. 讨论小偏心率椭圆轨道真近点角近似超越方程, 由迭代法求真近点角与时间的关系. 数值模拟结果表明该方法的有效性.

关键词: 航天器轨道; 真近点角; 偏近点角; 迭代法

中图分类号: V412.41; O311.3 文献标识码: A

## 引 言

在航天器 Kepler 轨道运动中, 一般情况下时间积分不能导出解析形式的原函数. 为求椭圆轨道运动周期, 引入偏近点角, 由变量替代得到以时间为自变量的偏近点角函数超越方程. 在确定航天器任意时刻位置时, 往往借助于计算机数值模拟计算. 文献[1]至文献[3]讨论了航天器小偏心率椭圆轨道运动. 本文用级数展开方法直接得到真近点角超越方程, 由迭代法求真近点角与时间的关系, 讨论迭代收敛的充分条件. 对小偏心率椭圆轨道列写真近点角近似方程并求解. 对于不满足迭代收敛充分条件情形, 本文列写偏近点角超越方程, 用迭代法求出偏近点角, 由数值积分方法求出真近点角与时间的关系, 指出所有椭圆轨道都满足偏近点角迭代收敛的充分条件. 数值模拟结果表明本文提出方法的有效性.

## 1 真近点角级数方程

航天器  $m$  沿椭圆轨道绕地球质心  $O$  运动, 如图 1 所示. 椭圆右端点  $\pi$  为近地点, 以  $O$  为极点、沿  $O\pi$  的射线为极轴建立极坐标系, 航天器位置由极径  $r$  和真近点角  $\theta (= \angle\pi Om)$  确定. 记  $Om$  矢径为  $r$ , 对此二体系统有动量矩积分:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = h, \quad (1)$$

以及航天器  $m$  在轨道平面内的轨道方程<sup>[4]</sup>:

\* 收稿日期: 2003\_09\_15; 修订日期: 2005\_07\_05

作者简介: 顾晓勤(1963—), 男, 江苏人, 教授, 博士(联系人. Tel/Fax: + 86\_760\_8719165; E\_mail: guxiaoqinguyan@tom.com).

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}, \quad (2)$$

半轴参数  $p = h^2/\mu$ ,  $\mu = 3.986 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$ . 整理(1)、(2)式得到:

$$\frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2} = \omega dt, \quad (3)$$

其中  $\omega = h/p^2 = \sqrt{\mu/p^3}$ . 将  $(1 + e \cos \theta)^{-2}$  展成级数后对方程(3)

二端积分, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) e^n \int_0^{\theta} \cos^n \theta d\theta = \omega(t - \tau), \quad (4)$$

$\theta(\tau) = 0$ ,  $\tau$  为过近地点  $\pi$  时刻. 递推公式:

$$\int_0^{\theta} \cos^n \theta d\theta = \frac{\cos^{n-1} \theta \sin \theta}{n} + \frac{n-1}{n} \int_0^{\theta} \cos^{n-2} \theta d\theta. \quad (5)$$

## 2 迭代求解

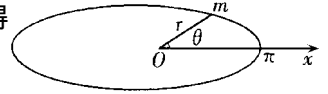


图1 椭圆轨道和极坐标

为求真近点角  $\theta$  与时间  $t$  的关系, 采用迭代法求解方程, 将(4)式改写成等价的迭代形式:

$$\theta_{k+1} = f(\theta_k), \quad (6)$$

$$f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (n+1) e^n \int_0^{\theta} \cos^n \theta d\theta + \omega(t - \tau),$$

取迭代初始值  $\theta_0 = \omega(t - \tau)$ , 当  $|\theta_{k+1} - \theta_k| < \varepsilon$  时停止迭代计算,  $\varepsilon$  按照精度要求确定. 采用 Lipschitz 条件验证  $f(\theta_k)$  是否收敛比较困难, 本文用充分条件<sup>[5]</sup>

$$|f'(\theta_k)| < 1 \quad (7)$$

来导出迭代收敛对椭圆轨道偏心率  $e$  的要求. 讨论:

1) 当  $\theta_k = \pi/2$ ,  $\theta_k = 3\pi/2$  时,  $f'(\theta_k) = 0$ , 满足(7)式.

2) 当  $0 \leq \theta_k < \pi/2$  或  $3\pi/2 < \theta_k \leq 2\pi$  时,  $\cos \theta_k > 0$ ,  $f'(\theta_k)$  为交错级数, 求得收敛条件为:

$$\begin{cases} e \cos \theta_k \leq (n+1)/(n+2), & n = 1, 2, 3, \dots \\ e \cos \theta_k < 1, \end{cases} \quad (8)$$

$f'(\theta_k)$  满足:

$$-1 < 2e \cos \theta_k - 3e^2 \cos^2 \theta_k \leq f'(\theta_k) \leq 2e \cos \theta_k < 1, \quad (9)$$

结合(8)、(9)式, 考虑  $0 < \cos \theta_k \leq 1$ , 得到级数收敛的充分条件为:

$$e < 0.5 \quad (10)$$

3) 当  $\pi/2 < \theta_k < 3\pi/2$  时,  $\cos \theta_k < 0$ ,  $-f'(\theta_k)$  为正项级数, 用广义积分方法判断收敛性. 得到  $-f'(\theta_k)$  收敛的充分条件为:

$$\begin{cases} \frac{-e \cos \theta_k}{\ln(-e \cos \theta_k)} \left[ \frac{1}{\ln(-e \cos \theta_k)} - 2 \right] > -1, \\ \frac{-e \cos \theta_k}{\ln(-e \cos \theta_k)} \left[ \frac{1}{\ln(-e \cos \theta_k)} - 2 \right] - 2e \cos \theta_k < 1, \end{cases} \quad (11)$$

对此超越不等式采用数值计算方法求解, 记  $g^k(n) = (n+1)(-e \cos \theta_k)^n$ ,  $I_k = \int_1^{\infty} g^k(x) dx$ , 以

-  $e \cos \theta_k$  为横坐标,  $I_k, I_k + g_k(1)$  为纵坐标, 得到图 2 所示曲线。由图可以看出, 区间内  $I_k$  均大于 -1, 满足收敛的充分条件; 而只有当时  $-e \cos \theta_k < 0.2516, I_k + g_k(1) < 1$ , 满足收敛的充分条件。由于  $0 < -\cos \theta_k \leq 1$ , 联合考虑(11)式, 得到  $\theta_{k+1} = f(\theta_k)$  迭代收敛的充分条件:

$$e < 0.2516 \quad (12)$$

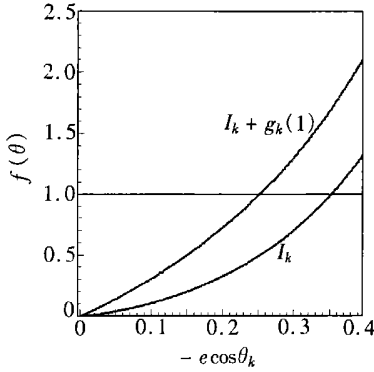


图 2 广义积分值曲线

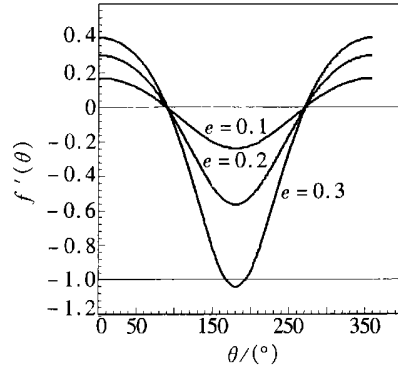


图 3  $f'(\theta)$  与真近点角的关系

本文近似取级数  $f'(\theta_k) = \sum_{n=1}^{10000} (-1)^{n+1} (n+1) e^n \cos^n \theta_k$ , 画出偏心率  $e = 0.1, e = 0.2, e = 0.3$  时对应的曲线, 如图 3 所示。可见对于  $e = 0.3$  时,  $\theta$  在  $180^\circ$  附近,  $|f'(\theta_k)| > 1$ , 迭代不收敛, 与前面整个分析相吻合。

### 3 小偏心率情形

当  $e \ll 1$  时, 将(4)式保留至 5 阶小量, 取迭代式

$$\theta_{k+1} = f(\theta_k),$$

$$f(\theta) = \omega(t - \tau) + 2\sin\theta e - 0.75(2\theta + \sin 2\theta)e^2 + 4(\sin\theta - (1/3)\sin^3\theta)e^3 - (1.8750 + 1.25\sin 2\theta + 0.15625\sin 4\theta)e^4 + (1.2\cos^6\theta + 1.6\cos^2\theta + 3.2)\sin\theta e^5,$$

由  $e \ll 1$  于, 自动满足(7)式, 故小偏心率情形迭代严格收敛。

算例 1 地球赤道半径  $R_e = 6.378 \times 10^6$  m, 设航天器近地点高度  $h = 222$  km, 过近地点时刻  $\tau = 0$ 。对于不同的偏心率, 得到表 1 所示的参数。由迭代法得到在整个椭圆运动周期内真近点角随时间变化曲线, 如图 4 所示; 航天器与地球质心距离  $r$  随时间变化规律如图 5 所示。

表 1 曲线参数

	偏心率 $e$	半轴参数 $p$ / m	运动周期 $T_0$ / s	平均角速度 $\omega_0$ / (rad/s)
曲线 1	0.01	$6.666 \times 10^6$	5417.193	$1.15986 \times 10^{-3}$
曲线 2	0.05	$6.930 \times 10^6$	5762.909	$1.09028 \times 10^{-3}$

### 4 不满足迭代充分条件情形

当椭圆偏心率  $e > 0.2516$  时, 不能保证真近点角迭代式(6)收敛, 对此情形, 引入偏近点角  $E = \angle \pi O m'$ ,  $\pi$  为近地点,  $m'$  为辅助圆  $\Gamma$  上与航天器  $m$  横坐标相同的对应点, 如图 6 所示。航天器  $m$  在极坐标中  $r = a(1 - e \cos E)$ ,  $a$  为长半轴。真近点角  $\theta$  与偏近点角  $E$  存在微

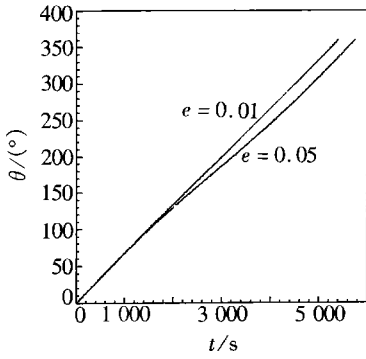


图 4 真近点角随时间变化曲线

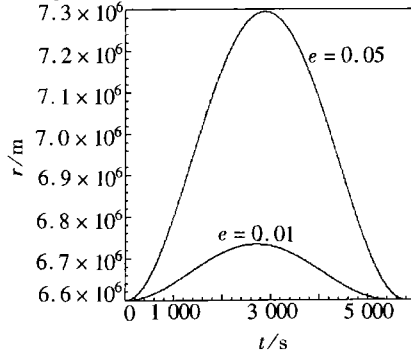


图 5 距离 r 随时间变化规律

分关系(  $\sqrt{1 - e^2} / (1 - e \cos E)$  )dE = dθ, 有积分结果<sup>[4]</sup>:

$$E - e \sin E = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t - \tau), \tag{13}$$

τ 为过近地点 π 时刻。

为求偏近点角 E 与时间 t 的关系, 采用迭代法求解方程, 将(13)式改写成等价的迭代形式:

$$E_{k+1} = f(E_k), \tag{14}$$

其中  $f(E) = \sqrt{\mu/a^3}(t - \tau) + e \sin E$ 。取迭代初始值  $E_0 = \sqrt{\mu/a^3}(t - \tau)$ , 当  $|E_{k+1} - E_k| < \varepsilon$  时停止迭代计算, ε 按照精度要求确定。f(E<sub>k</sub>) 收敛的充分条件

$$|f'(E_k)| < 1, \tag{15}$$

$|f'(E_k)| = |e \cos E| \leq e$ , 由于椭圆轨道偏心率  $e < 1$ , 所以(15)式严格满足。即对于任意偏心率的椭圆, 迭代均严格收敛。

算例 2 已知地球赤道半径  $R_e = 6.378 \times 10^6$  m。设近地点高度  $h = 322$  km, 过近地点时刻  $\tau = 0$ 。对于不同的偏心率, 得到表 2 所示的参数。由迭代法得到在整个椭圆运动周期内偏近点角随时间变化曲线, 如图 7 所示。进而得到图 8 所示真近点角变化规律。在椭圆轨道上, 航天器与地球质心距离 r 随时间变化规律如图 9 所示。为了

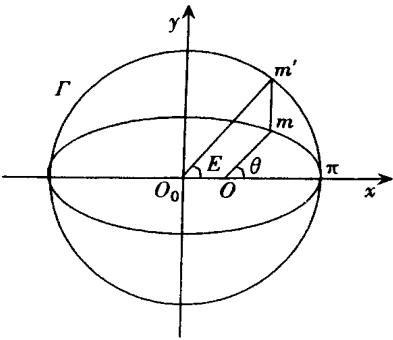


图 6 椭圆轨道

比较真近点角与偏近点角在同一时刻之差值, 计算得出如图 10 所示曲线。

表 2

曲线参数

	偏心率 e	长半轴 a / m	半轴参数 p / m	运动周期 T <sub>0</sub> / s	平均角速度 ω <sub>0</sub> / (rad/s)
曲线 1	0.6	16.75 × 10 <sup>6</sup>	10.72 × 10 <sup>6</sup>	21 574.14	2.912 369 × 10 <sup>-4</sup>
曲线 2	0.7	22.333 × 10 <sup>6</sup>	11.39 × 10 <sup>6</sup>	33 215.55	1.891 639 × 10 <sup>-4</sup>
曲线 3	0.8	33.5 × 10 <sup>6</sup>	12.06 × 10 <sup>6</sup>	61 020.0	1.029 678 × 10 <sup>-4</sup>

## 5 结 论

本文对真近点角超越方程, 用级数展开方法直接得到迭代算法, 求出真近点角与时间的关

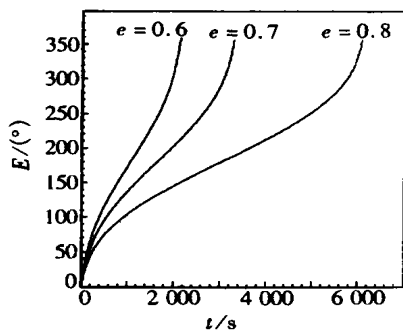


图7 偏近点角随时间变化规律

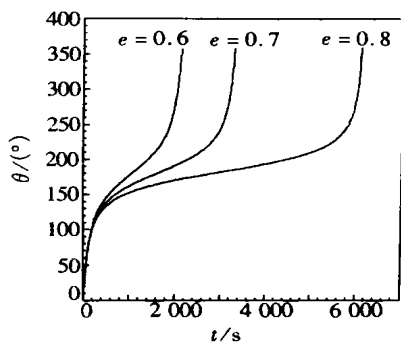


图8 真近点角随时间变化规律

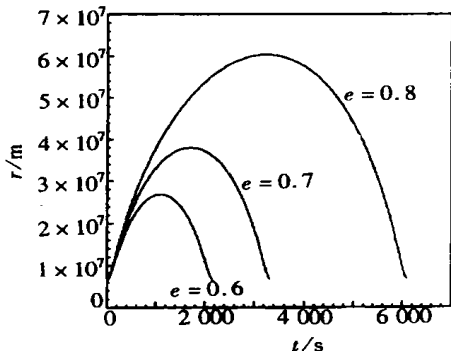


图9 距离 r 随时间变化规律

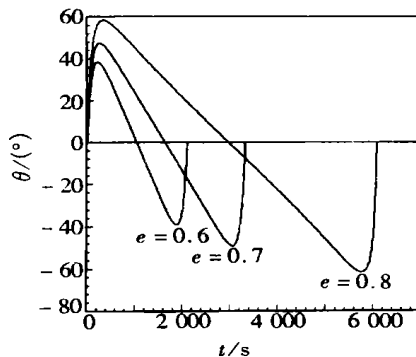


图10 真近点角与偏近点角之差变化曲线

系,讨论了迭代收敛的充分条件。对于不满足迭代收敛充分条件情形,用迭代法求偏近点角超越方程,借助数值积分方法求出真近点角与时间的关系,指出所有椭圆轨道都满足偏近点角迭代收敛的充分条件。本文列写小偏心率椭圆轨道真近点角5阶超越方程,由迭代法求真近点角与时间的关系。数值模拟结果表明本文提出方法的有效性。上述工作对于航天器椭圆轨道位置计算具有借鉴价值,作者下一步工作是采用多精度计算方法,进一步提高准确性。

### [参 考 文 献]

- [1] Yoshikazu Hashida, Philip L Palmer. Epicyclic motion of satellites about an oblate planet[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2001, 24(3): 586—596.
- [2] Rudolf X Meyer. Generalization of d'alembert's method for applications to dynamics[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2001, 24(4): 853—854.
- [3] 顾晓勤. 椭圆轨道上航天器位置的一种计算方法[J]. 电子科技大学学报, 2003, 32(6): 635—637.
- [4] 刘延柱. 航天器姿态动力学[M]. 北京: 国防工业出版社, 1995, 13—27.
- [5] 徐萃薇. 计算方法引论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1985, 185—202.

## Calculating Method of Series for the True Anomaly of a Spacecraft Elliptic Orbit

GU Xiao\_qin, TAN Zhao\_yang

(Zhongshan College, University of Electronic Science and Technology of China,  
Zhongshan, Guangdong 528403, P. R. China)

**Abstract:** The transcendental equation of a true anomaly was written in a power series instead of a differential form. When the sufficient condition of the iterative convergence is satisfied, the relationship between the true anomaly and the time was gotten by the iterative method. And for the others, the transcendental equation of an eccentric anomaly was solved by the iterative method. After the eccentric anomaly had been calculated, the relationship between the true anomaly and the time was gotten with the numerical integral method. The approximate equation, which included the first five terms in general expansion, was written for the spacecraft quasi\_circular orbit. And the true anomaly as the function of the time was also gotten by the iterative method. The numerical simulation results show that these methods are efficient.

**Key words:** spacecraft orbit; true anomaly; eccentric anomaly; iterative method