应用数学和力学,第 26 卷 第 11 期(2005 年 11 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2005) 11_1365_08

二维非线性对流扩散方程特征有限元的两重网络算法*

秦新强[1,2], 马逸尘[1], 章 胤[2]

(1. 西安交通大学 理学院,西安 710049;
2. 西安理工大学 理学院, 西安 710048)

(李家春推荐)

摘要: 针对二维非线性对流扩散方程,构造了特征有限元两重网格算法• 该算法只需要在粗网格上进行非线性迭代运算,而在所需要求解的细网格上进行一次线性运算即可• 对于非线性对流占优扩散方程,不仅可以消除因对流占优项引起的数值振荡现象,还可以加快收敛速度、提高计算效率• 误差估计表明只要选取粗细网格步长满足一定的关系式,就可以使两重网格解与有限元解保持同样的计算精度• 算例显示:两重网格算法比特征有限元算法的收敛速度明显加快•

关 键 词: 对流扩散方程; 特征有限元; 两重网格算法; 收敛性
中图分类号: O241.82 文献标识码: A

引 言

对流扩散方程描述了水污染、地下水渗流、热传导等诸多现象• 本文讨论二维非线性对流扩散问题

$$c(\boldsymbol{x},t)\frac{\partial u}{\partial t}+\boldsymbol{b}\cdot\nabla u-\nabla\cdot(a(\boldsymbol{x},t)\nabla u)=f(u),\qquad(\boldsymbol{x},t)\in\Omega\times J,\tag{1a}$$

$$u(\boldsymbol{x},t)=0,\qquad(\boldsymbol{x},t)\in\partial\Omega\times J,\tag{1b}$$

$$u(\boldsymbol{x},0)=u_0(\boldsymbol{x}),\qquad\boldsymbol{x}\in\Omega,\tag{1c}$$

其中 Ω 是R^2 中的有界区域, $J=[0,T]$, $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)^{\mathrm T}$, $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x},t)=(b_1(\boldsymbol{x},t),b_2(\boldsymbol{x},t))^{\mathrm T}$, $f(u)=f(u,\boldsymbol{x},t)$• 对于$(\boldsymbol{x},t)\in\Omega\times J$, 假设系数 a、$\boldsymbol{b}$、c 及f 满足以下条件:

(a) $0<a_*\leqslant a(\boldsymbol{x},t)\leqslant a^*$, $0<c_*\leqslant c(\boldsymbol{x},t)\leqslant c^*$,

$|\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x},t)|=\sqrt{b_1^2+b_2^2}\leqslant b^*<\infty$;

(b) $\left|\dfrac{\boldsymbol{b}}{c}\right|+\left|\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\boldsymbol{b}}{c}\right)\right|\leqslant C_1,\qquad i=1,2;$

(c) $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right|+\left|\dfrac{\partial f}{\partial u}\right|+\left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}\right|\leqslant C_2,\qquad i=1,2;$

---

* 收稿日期: 2003_07_08; 修订日期: 2005_07_19
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(NSF10371069); 陕西省教育厅专项科研计划资助项目(02JK048)
作者简介: 秦新强(1962—), 男, 陕西人, 教授, 博士(联系人. Tel: + 86_29_82066354; Fax: + 86_29_82066351; E_mail: xqqin@xaut.edu.cn)•

其中 a_*、a^*、c_*、c^*、C_1、C_2 均为正常数• 假设问题(1)的解满足光滑性要求

(d) $u \in L^{\infty}(0,T;H^{r+1}) \cap H^1(0,T;H^{r+1}) \cap H^2(0,T;H^1)$;

(e) $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T;H^{r+1})$;

(f) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$;

这里 $r \geqslant 1$• $W^{m,p}(\Omega)$ 表示 Ω 上的 Sobolev 空间, 且有

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega),\quad \|v\|_{H^m(\Omega)} = \|v\|_m,\quad \|v\|_{L^2(\Omega)} = \|v\|\bullet$$

本文利用由 Douglas[1] 及 Russell[2] 提出的特征有限元方法求解 u, 为了提高非线性问题的计算效率, 采用了两重网格算法• 两重网格算法首先由 Xu[3,4] 提出, 类似于牛顿迭代法, 求出非线性问题在粗网格上的解以后, 再利用 Taylor 展式将粗网格上的解外推到细网格上去• 由于该方法在计算非线性问题上的高效性, 已有人将此方法用于非线性反应扩散方程[5,6] 和 N_S 方程[7] 的计算上, 使计算效率得到了明显的提高•

1 特征有限元的两重网格算法

1.1 特征有限元算法

对问题(1)进行特征有限元离散• 令

$$\psi(\boldsymbol{x},t) = [c(\boldsymbol{x},t)^2 + |\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x},t)|^2]^{1/2}, \tag{2}$$

记与算子 $cu_t + \boldsymbol{b}\bullet\nabla u$ 相伴的特征方向为 $\tau = \tau(\boldsymbol{x},t)$, 其中

$$\frac{\partial}{\partial\tau} = \frac{c(\boldsymbol{x},t)}{\psi(\boldsymbol{x},t)}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x},t)}{\psi(\boldsymbol{x},t)}\bullet\nabla, \tag{3}$$

则方程(1)可以转化为特征形式

$$\begin{cases} \psi(\boldsymbol{x},t)\dfrac{\partial u}{\partial\tau} - \nabla\bullet(a(\boldsymbol{x})\nabla u) = f(u), & (\boldsymbol{x},t)\in\Omega\times J, \\ u(\boldsymbol{x},t) = 0, & (\boldsymbol{x},t)\in\partial\Omega\times J, \\ u(\boldsymbol{x},0) = u_0(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x}\in\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

令 $V = H_0^1(\Omega)$, 并定义内积 $(u,v) = \int_\Omega u(\boldsymbol{x})v(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$, $v,w\in V$, 可以得到与(4)等价的变分形式:

$$\left(\psi\frac{\partial u}{\partial\tau}, v\right) + (a\nabla u,\nabla v) = (f(u),v), \qquad v\in V, \tag{5a}$$

$$(u(0),v) = (u_0,v), \qquad v\in V\bullet \tag{5b}$$

考虑(5)以 Δt 为时间步长, 在 $t^n = n\Delta t$ 处的近似解, $n = 0,1,\cdots,N$; $\Delta t = T/N$• 特征导数通过以下方式来离散: 令 $\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} - \{[\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x},t)]/[c(\boldsymbol{x},t)]\}\Delta t$, 在 $t = t^n$ 处

$$\left(\psi\frac{\partial u}{\partial\tau}\right)^n \approx \psi(\boldsymbol{x},t^n)\frac{u(\boldsymbol{x},t^n) - u(\overline{\boldsymbol{x}},t^{n-1})}{(|\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}}|^2 + (\Delta t^n)^2)^{1/2}} = c(\boldsymbol{x},t^n)\frac{u(\boldsymbol{x},t^n) - u(\overline{\boldsymbol{x}},t^{n-1})}{\Delta t}, \tag{6}$$

$\overline{\boldsymbol{x}}$ 是经过第 n 时间层 $\boldsymbol{x}$ 处的特征线与第 $n-1$ 时间层的交点•

对区域 Ω 进行拟一致三角形或矩形剖分, 记为 Δ_h, 并称其为细网格, 剖分单元的最大直径为 h, V_h 是定义在 Δ_h 上的有限元空间• 于是问题(1)的特征有限元解定义如下:

对于 $n = 0,1,\cdots,N$, 求解 $u_h^n \in V_h$ 使得

$$\left(c^n\frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\Delta t}, v\right) + (a^n\nabla u_h^n,\nabla v) = (f(u_h^n),v), \qquad v\in V_h, \tag{7a}$$

$$(u_h^0 - u_0, v) = 0, \qquad v \in V_h, \tag{7b}$$

其中

$$u_h^n = u_h(t^n),\ u_h^{n-1}(\boldsymbol{x}) = u_h(\overline{\boldsymbol{x}}, t^{n-1}) = u_h\left(\boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}, t^n)}{c(\boldsymbol{x}, t^n)}\Delta t, t^{n-1}\right), \tag{8}$$

初始条件的近似值 u_h^0 可以同通过 u_0 在 V_h 中的插值给出• 易知(7) 的解$\{u_h^n\}$由 u_0 唯一确定•

非线性系统(7) 一般采用 Newton 迭代法求解, 在每一个时间层上都需要进行若干次迭代运算• 下面介绍的两重网格算法, 只需要在粗网格上进行非线性运算, 而在需要求解的细网格上只进行线性运算•

1.2 特征有限元两重网格算法

首先, 只在粗网格 Δ_H 上进行非线性迭代, 求出有限元解 u_H^n, 其中 $\Delta_H \subset \Delta_h$, $H > h$, 相应的有限元空间为 V_H• 其次, 利用粗网格 Δ_H 上的收敛解u_H^n 及Taylor 展式在细网格 Δ_h 上将非线性问题线性化• 具体计算步骤如下:

第1 步: 在粗网格 Δ_H 上求下面非线性系统的解 $u_H^n \in V_H$:

$$\left(c^n \frac{u_H^n - u_H^{n-1}}{\Delta t}, v\right) + (a^n \nabla u_H^n, \nabla v) = (f(u_H^n), v), \qquad \forall v \in V_H, \tag{9a}$$

$$(u_H^0 - u_0, v) = 0, \qquad \forall v \in V_H• \tag{9b}$$

第2 步: 利用粗网格上的解 u_H^n, 在细网格 Δ_h 上求下面线性系统的解 $\hat{u}_h^n \in V_h$:

$$\left(c^n \frac{\hat{u}_h^n - \overline{\hat{u}}_h^{n-1}}{\Delta t}, v\right) + (a^n \nabla \hat{u}_h^n, \nabla v) =$$
$$(f(u_H^n) + f'(u_H^n)(\hat{u}_h^n - u_H^n), v), \qquad \forall v \in V_h, \tag{10a}$$

$$(\hat{u}_h^0 - u_0, v) = 0, \qquad \forall v \in V_h• \tag{10b}$$

通过以上第 1 步和第 2 步的计算, 可以求得特征有限元解 u_h^n 的近似解 $\hat{u}_h^n$•

2 收敛性分析

由有限元的逼近性质可知, 对于有限元空间 V_h 及$v \in H^s$ 有:

$$\inf_{v_h \in V_h}(\|v - v_h\| + h\|v - v_h\|_1 + h(\|v - v_h\|_\infty + h\|v - v_h\|_{1,\infty})) \leqslant$$
$$Ch^s\|v\|_s, \qquad 2 \leqslant s \leqslant r + 1, \tag{11}$$

$$\|v_h\|_\infty \leqslant Ch^{-1}\|v_h\|,\ \|v_h\|_{1,\infty} \leqslant Ch^{-1}\|v_h\|_1, \qquad v_h \in V_h, \tag{12}$$

作精确解的投影 $w_h: [0, T] \to V_h$, 满足

$$(a\nabla(u - w_h), \nabla v) = 0, \qquad \forall v \in V_h, \tag{13}$$

令 $\eta = u - w_h$, $\xi = u_h - w_h$, 则有 $u - u_h = \eta - \xi$• 这时由标准有限元的误差估计, 对于 $p = 2$、∞及 $2 \leqslant s \leqslant r + 1$ 成立[8]:

$$\|\eta\|_{L^p(0,T;L^2(\Omega))} + h\|\eta\|_{L^p(0,T;H^1(\Omega))} \leqslant Ch^s\|u\|_{L^p(0,T;H^s(\Omega))}, \tag{14}$$

$$\left\|\frac{\partial \eta}{\partial t}\right\|_{L^p(0,T;L^2(\Omega))} + h\left\|\frac{\partial \eta}{\partial t}\right\|_{L^p(0,T;H^1(\Omega))} \leqslant$$
$$Ch^s\left[\|u\|_{L^p(0,T;H^s)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L^p(0,T;H^s(\Omega))}\right]• \tag{15}$$

2.1 特征有限元的误差估计

在对特征有限元两重网格解进行误差估计之前, 需要先对特征有限元解进行误差估计, 其 H^1 模误差及 L^2 模误差分别由定理 2.1 和定理2.2 给出• 定理证明中不同处的 C 不完全相同•

定理 2.1 设 u 及 u_h 分别表示(5) 与(7) 的解, 如果条件($a-f$) 成立, 则对于充分小的 Δt 及 $r \geqslant 2$, 有

$$\max_{1\leqslant n\leqslant N}\|u^n-u_h^n\|_1 \leqslant C\left[\Delta t\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}+h^r\left(\|u\|_{L^\infty(0,T;H^{r+1}(\Omega))}+\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{H^1(0,T;H^{r+1}(\Omega))}\right)\right] \leqslant C(\Delta t+h^r)\cdot \tag{16}$$

证明 在(5a) 中, 令 $t=t^n$, 并与(7a) 相减得到

$$\left(c^n\frac{\xi^n-\xi^{n-1}}{\Delta t}, v\right)+(a^n\nabla\xi^n, \nabla v)=\left(\psi^n\frac{\partial u^n}{\partial \tau}-c^n\frac{u^n-u^{n-1}}{\Delta t}, v\right)+\left(c^n\frac{\eta^n-\eta^{n-1}}{\Delta t}, v\right)-\left(c^n\frac{\xi^{n-1}-\bar{\xi}^{n-1}}{\Delta t}, v\right)+(f(u^n)-f(u_h^n), v), \tag{17}$$

其中 $\eta^{n-1}=u^{n-1}-w_h^{n-1}$, $\xi^{n-1}=u_h^{n-1}-w_h^{n-1}$, 令 $\mathrm{d}_t\xi^n=(\xi^n-\xi^{n-1})/\Delta t$, 并取 $v=\xi^n-\xi^{n-1}=\mathrm{d}_t\xi^n\Delta t$, 得到:

$$\begin{aligned}(c^n\mathrm{d}_t\xi^n, \mathrm{d}_t\xi^n)\Delta t+(a^n\nabla\xi^n, \nabla\xi^n-\nabla\xi^{n-1}) = {} & \left(\psi^n\frac{\partial u^n}{\partial \tau}-c^n\frac{u^n-u^{n-1}}{\Delta t}, \mathrm{d}_t\xi^n\right)\Delta t+\left(c^n\frac{\eta^n-\eta^{n-1}}{\Delta t}, \mathrm{d}_t\xi^n\right)\Delta t+ \\ & \left(c^n\frac{\eta^{n-1}-\eta^{n-1}}{\Delta t}, \mathrm{d}_t\xi^n\right)\Delta t+\left(c^n\frac{\bar{\xi}^{n-1}-\xi^{n-1}}{\Delta t}, \mathrm{d}_t\xi^n\right)\Delta t+ \\ & (f(u^n)-f(u_h^n), \mathrm{d}_t\xi^n)\Delta t \equiv \\ & T_1+T_2+T_3+T_4+T_5,\end{aligned} \tag{18}$$

下面逐一估计 T_i, $i=1, 2, \cdots, 5$. 利用 Russell[2] 的结果可以估计出 T_1、T_2、T_3、T_4:

$$|T_1| \leqslant C\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}\right\|^2_{L^2(t^{n-1}, t^n; L^2)}(\Delta t)^2+\varepsilon\|\mathrm{d}_t\xi^n\|^2\Delta t, \tag{19}$$

$$|T_2| \leqslant C\left\|\frac{\partial \eta}{\partial t}\right\|^2_{L^2(t^{n-1}, t^n; L^2)}+\varepsilon\|\mathrm{d}_t\xi^n\|^2\Delta t, \tag{20}$$

$$|T_3| \leqslant C\|\nabla\eta^{n-1}\|^2\Delta t+\varepsilon\|\mathrm{d}_t\xi^n\|^2\Delta t, \tag{21}$$

$$|T_4| \leqslant C\|\nabla\xi^{n-1}\|^2\Delta t+\varepsilon\|\mathrm{d}_t\xi^n\|^2\Delta t, \tag{22}$$

下面估计 T_5. 对于任一点 $\boldsymbol{x}\in\Omega$, 由 Taylor 定理可知存在某个 $u^n(\boldsymbol{x})$ 使得

$$\begin{aligned}(f(u^n)-f(u_h^n), \mathrm{d}_t\xi^n)\Delta t &= (f'(u^n)(u^n-u_h^n), \mathrm{d}_t\xi^n)\Delta t = \\ & (f'(u^n)\eta^n, \mathrm{d}_t\xi^n)\Delta t-(f'(u^n)\xi^n, \mathrm{d}_t\xi^n)\Delta t,\end{aligned}$$

于是, 由条件(c) 可以得到:

$$|T_5| \leqslant C(\|\eta^n\|^2+\|\xi^n\|^2)\Delta t+\varepsilon\|\mathrm{d}_t\xi\|^2\Delta t, \tag{23}$$

将(19) ~ (23) 代入(18) 得到:

$$\begin{aligned}(c^n\mathrm{d}_t\xi^n, \mathrm{d}_t\xi^n)\Delta t+(a^n\nabla\xi^n, \nabla\xi^n-\nabla\xi^{n-1}) \leqslant {} & C\left[\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}\right\|^2_{L^2(t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega))}(\Delta t)^2+\left\|\frac{\partial \eta}{\partial t}\right\|_{L^2(t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega))}+(\|\eta^n\|^2+\right. \\ & \left.\|\nabla\eta^{n-1}\|^2)\Delta t+(\|\xi^n\|^2+\|\nabla\xi^{n-1}\|^2)\Delta t\right]+5\varepsilon\|\mathrm{d}_t\xi\|^2\Delta t,\end{aligned} \tag{24}$$

由 $a(a-b) \geqslant (a^2-b^2)/2$ 得到$(a^n\nabla\xi^n, \nabla\xi^n-\nabla\xi^{n-1}) \geqslant (a_*/2)[(\nabla\xi^n, \nabla\xi^n)-(\nabla\xi^{n-1}, \nabla\xi^{n-1})]$, 将(24) 由 $n=1$ 加到 $l(1\leqslant l\leqslant N)$, 注意到 $\xi^0=0$, 且由条件(a) 知$(c^n\mathrm{d}_t\xi^n, \mathrm{d}_t\xi^n) \geqslant c_*\|\mathrm{d}_t\xi^n\|^2$, 结合$(\nabla\xi^n, \nabla\xi^n) \geqslant \|\nabla\xi^n\|^2$ 得到

$$c_*\sum_{n=1}^{l}\|d_t\xi^n\|^2\Delta t+\frac{a_*}{2}\|\nabla\xi^l\|^2\leqslant C\Big[\sum_{n=1}^{l}\Big\|\frac{\partial^2u}{\partial\tau^2}\Big\|^2_{L^2(t^{n-1},t^n;L^2)}(\Delta t)^2+\sum_{n=1}^{l}\Big\|\frac{\partial\eta}{\partial t}\Big\|^2_{L^2(t^{n-1},t^n;L^2)}\Big]+\sum_{n=1}^{l}(\|\nabla\eta^{n-1}\|^2+\|\eta^n\|)\Delta t+$$
$$\sum_{n=1}^{l}(\|\nabla\xi^{n-1}\|^2+\|\xi^n\|^2)\Delta t+5\varepsilon\sum_{n=1}^{l}\|d_t\xi^n\|^2\Delta t\leqslant$$
$$C\Big[\Big\|\frac{\partial^2u}{\partial\tau^2}\Big\|^2_{L^2(0,T;L^2)}(\Delta t)^2+\Big\|\frac{\partial\eta}{\partial t}\Big\|^2_{L^2(0,T;L^2)}+\sum_{n=1}^{l}\|\eta^n\|_1^2\Delta t+\sum_{n=1}^{l}\|\xi^n\|_1^2\Delta t\Big]+5\varepsilon\sum_{n=1}^{l}\|d_t\xi^n\|^2\Delta t,$$

即

$$c_*\sum_{n=1}^{l}\|d_t\xi^n\|^2+\frac{a^*}{2}\|\nabla\xi^l\|^2\leqslant C\sum_{n=1}^{l}\|\xi^n\|_1^2\Delta t+C\Big[\|\eta\|^2_{L^\infty(0,T;H^1)}+\sum_{n=1}^{l}\Big\|\frac{\partial^2u}{\partial\tau^2}\Big\|^2_{L_2(t^{n-1},t^n,L^2)}(\Delta t)^2+\sum_{n=1}^{l}\Big\|\frac{\partial\eta}{\partial t}\Big\|^2_{L^2(t^{n-1},t^n;L^2)}\Big]+5\varepsilon\sum_{n=1}^{l}\|d_t\xi^n\|^2\Delta t,\qquad(25)$$

为了将(25)左端的 L^2 范数换成 H^1 范数,将下式

$$\|\xi^n\|^2-\|\xi^{n-1}\|^2=(\xi^n+\xi^{n-1},\xi^n-\xi^{n-1})=$$
$$(\xi^n-\xi^{n-1},\xi^n-\xi^{n-1})+2(\xi^{n-1},\xi^n-\xi^{n-1})=$$
$$\|d_t\xi^n\|^2(\Delta t)^2+2(\xi^{n-1},d_t\xi^n)\Delta t,$$

两边由 $n=1$ 加到 l, 并且由充分小的 Δt 得

$$\|\xi^l\|^2\leqslant\Delta t\sum_{n=1}^{l}\|d_t\xi^n\|^2\Delta t+C\sum_{n=1}^{l}\|\xi^{n-1}\|^2\Delta t+\varepsilon\sum_{n=1}^{l}\|d_t\xi^n\|^2\Delta t\leqslant$$
$$C\sum_{n=1}^{l}\|\xi^{n-1}\|_1^2\Delta t+\varepsilon\sum_{n=1}^{l}\|d_t\xi^n\|^2\Delta t,\qquad(26)$$

将(26)左右两端分别与(25)两端相加并选取适当的 ε, 得到

$$\|\xi^l\|_1^2\leqslant C\sum_{n=1}^{l}\|\xi^n\|_1^2\Delta t+C\Big[\|\eta\|^2_{L^\infty(0,T;H^1)}+\sum_{n=1}^{l}\Big\|\frac{\partial^2u}{\partial\tau^2}\Big\|^2_{L^2(n^{n-1},t^n;L^2)}(\Delta t)^2+\sum_{n=1}^{l}\Big\|\frac{\partial\eta}{\partial t}\Big\|^2_{L^2(t^{n-1},t^n;L^2)}\Big],\qquad(27)$$

由离散 Gronwall 不等式得到

$$\|\xi^l\|_1\leqslant C\Big[\Delta t\Big\|\frac{\partial^2u}{\partial\tau^2}\Big\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}+\Big\|\frac{\partial\eta}{\partial t}\Big\|_{L^2(0,T;L^2)}+\|\eta\|_{L^\infty(0,T;H^1)}\Big],\qquad(28)$$

再由 $u^n-u_h^n=\eta^n-\xi^n$ 及(11)、(14)、(15)得到(16)• 定理得证•

关于 $u-u_h$ 在 $L^2(\Omega)$ 中的最优估计可通过类似的方法给出:

定理 2.2 设 u 及 u_h 分别表示(5)与(7)的解,如果条件($a-f$)成立,则对于充分小的 Δt 及 $r\geqslant1$, 有

$$\max_{1\leqslant n\leqslant N}\|u^n-u_h^n\|\leqslant C(\Delta t+h^{r+1})•\qquad(29)$$

2.2 两重网格解的误差估计

定理 2.3 设 u、$\hat{u}_h$ 分别表示(5)与(10)的解,如果条件($a-f$)成立,则对于充分小的 Δt 及 $r\geqslant2$ 有

$$\max_{1\leqslant n\leqslant N}\|u^n-\hat{u}_h^n\|_1\leqslant C\Big(\Delta t+h^r+H^{2r-1}\Big)•\qquad(30)$$

证明 令 $\eta^n = u^n - w_h^n$, $\xi^n = \hat{u}_h^n - w_h^n$, 由(5a)减去(10a), 并取 $v = d_t\xi^n\Delta t$ 得到

$$
\begin{aligned}
&\left(c^n d_t\xi^n, d_t\xi^n\right) + \left(a^n\nabla\xi^n, \nabla\xi^n - \nabla\xi^{n-1}\right) = \\
&\quad\left(\psi^n\frac{\partial u^n}{\partial\tau} - c^n\frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t}, d_t\xi^n\right)\Delta t + \left(c^n\frac{\eta^n - \eta^{n-1}}{\Delta t}, d_t\xi^n\right)\Delta t + \\
&\quad\left(c^n\frac{\eta^{n-1} - \bar{\eta}^{n-1}}{\Delta t}, d_t\xi^n\right)\Delta t - \left(c^n\frac{\xi^{n-1} - \bar{\xi}^{n-1}}{\Delta t}, d_t\xi^n\right)\Delta t + \\
&\quad\left(f(u^n) - f(u_H^n) + f'(u_H^n)(\hat{u}_h^n - u_H^n)), d_t\xi^n\right)\Delta t \equiv \\
&\quad T_1 + T_2 + T_3 + T_4' + T_5',
\end{aligned}
$$

关于 T_5' 的估计, 先求 f 在 u_H^n 处的Taylor 展式, 存在某个 u, 使得

$$
f(u^n) = f(u_H^n) + f'(u_H^n)(\hat{u}_h^n - u_H^n) + (1/2)f''(u)(\hat{u}_h^n - u_H^n)^2,
$$

则

$$
\begin{aligned}
&f(u^n) - [f(u_H^n) + f'(u_H^n)(\hat{u}_h^n - u_H^n)] = f(u_H^n) + f'(u_H^n)(u^n - u_H^n) + \\
&\quad(1/2)f''(u)(u^n - u_H^n)^2 - [f(u_H^n) + f'(u_H^n)(\hat{u}_h^n - u_H^n)] = \\
&\quad f'(u_H^n)(u^n - \hat{u}_h^n) + (1/2)f''(u)(u^n - u_H^n)^2 = \\
&\quad f'(u_H^n)\eta^n - f'(u_H^n)\xi^n + (1/2)f''(u)(u^n - u_H^n)^2,
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
&(f(u^n) - [(f(u_H^n) + f'(u_H^n)(\hat{u}_h^n - u_H^n)], d_t\xi) = \\
&\quad(f'(u_H^n)\eta^n, d_t\xi^n) - (f'(u_H^n)\xi^n, d_t\xi^n) + (1/2)(f''(u)(u^n - u_H^n)^2, d_t\xi^n), \qquad (31)
\end{aligned}
$$

由条件(c)有

$$
\begin{aligned}
&|T_5'| \leqslant C_2\|\eta^n\|^2\Delta t + C_2\|\xi^n\|^2\Delta t + \\
&\quad(C_2/2)\|(u^n - u_H^n)^2\|^2\Delta t + \varepsilon\|d_t\xi^n\|^2\Delta t,
\end{aligned}
$$

关于 T_1、T_2、T_3、T_4' 的估计同定理2.1, 结合 T_5' 的估计可以得到

$$
\begin{aligned}
&c_*\sum_{n=1}^{l}\|d_t\xi^n\|^2\Delta t + \frac{a_*}{2}\|\nabla\xi^l\|^2 \leqslant C\left[\sum_{n=1}^{l}\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}\right\|^2_{L^2(t^{n-1}, t^n; L^2)}(\Delta t)^2 + \right. \\
&\quad\left.\sum_{n=1}^{l}\left\|\frac{\partial\eta}{\partial t}\right\|^2_{L^2(t^{n-1}, t^n; L^2)}\right] + \sum_{n=1}^{l}(\|\nabla\eta^{n-1}\|^2 + \|\eta^n\|^2)\Delta t + \\
&\quad\sum_{n=1}^{l}[\|\nabla\xi^{n-1}\|^2 + \|\xi^n\|^2]\Delta t + \sum_{n=1}^{l}\|(u^n - u_H^n)^2\|^2\Delta t + 5\varepsilon\sum_{n=1}^{l}\|d_t\xi^n\|^2\Delta t,
\end{aligned}
\qquad (32)
$$

类似于(24)~(27)的推理得到

$$
\begin{aligned}
&\|\xi^l\|_1 \leqslant C\left[\Delta t\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}\right\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} + \left\|\frac{\partial\eta}{\partial t}\right\|_{L^2(0, T; L^2)} + \right. \\
&\quad\left.\|\eta\|_{L^\infty(0, T; H^1)} + \|(u^n - u_H^n)^2\|_1\right],
\end{aligned}
\qquad (33)
$$

在(16)中取 $h = H$, 给出粗网格上解的误差估计, 再由 $u^n - \hat{u}_h^n = \eta^n - \xi^n$ 及(11)、(12)、(14)、(15), 容易得到细网格上的误差估计(30)• 定理完毕•

关于 $u^n - \hat{u}_h^n$ 在 L^2 中的最优估计可以同样给出:

定理2.4 设 u、$\hat{u}_h$ 分别表示(5)与(7)的解, 如果条件$(a - f)$成立, 则对于充分小的 Δt 及 $r \geqslant 1$, 有

$$
\max_{1\leqslant n\leqslant N}\|u^n - \hat{u}_h^n\| \leqslant C(\Delta t + h^{r+1} + H^{2r+1})• \qquad (34)
$$

定理2.1与定理2.3指出, 当我们用特征有限元求解细网格 Δ_h 上的数值解时, 采用两重

网格算法, 首先在粗网格 Δ_H 上进行非线性迭代运算, 然后在细网格上进行一次线性运算, 当粗细网格的步长满足关系式 $h^r = O(H^{2r-1})$ 时, 得到的两重网格近似解 $\hat{u}_h$ 与细网格上非线性迭代解 u_h 的精度一致• 定理 2.2 与定理 2.4 指出, 当 $h^{r+1} = O(H^{2r+1})$ 时, 具有同样的结论•

3 数值试验

为了说明两重网格算法的有效性和加速收敛性, 给出如下对流占优的非线性扩散问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla u - \nabla \cdot (a(\boldsymbol{x}) \nabla u) = g(\boldsymbol{x}, t), \\ \qquad \boldsymbol{x} \in \Omega = [0, 1]^2, \qquad t \in (0, T], \\ u(\boldsymbol{x}, t) = 0, \qquad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega, t \in (0, T] \\ u(\boldsymbol{x}, 0) = 0, \qquad \boldsymbol{x} \in \Omega, \end{cases} \tag{35}$$

其中 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$, $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) = (1, 1)$, $a(\boldsymbol{x}) = 0.001$, $g(\boldsymbol{x}, t) = -u^2 + G(\boldsymbol{x}, t)$, $G(\boldsymbol{x}, t)$ 由方程的精确解 $u(\boldsymbol{x}, t) = t x_1 x_2 (1 - x_1)(1 - x_2) e^{x_1 + x_2}$ 确定•

对于区间 Ω 做边长为 $h = 2^{-3}$ 的矩形剖分, 时间步长取 $\Delta t = 1.25 \times 10^{-4}$, 并从 $t = 0$ 计算到时刻 $t = 0.25$• 采用本文构造的两重网格算法, 选取 $r = 1$, 则由 $H = h^{2/3} = 2^{-2}$ 得到粗网格 Δ_H (图 1), 利用非线性迭代格式(9) 求出其上的特征有限元解 u_H 后, 再将粗网格划分为以 $h = 2^{-3}$ 为步长的细网格 Δ_h (图 2), 并利用(10) 进行一次线性运算求出 Δ_h 上的两重网格解 $\hat{u}_h$•

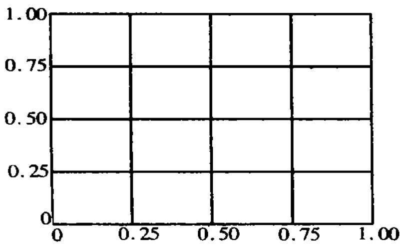

图 1 以 $H = 2^{-2}$ 为步长的粗网格 Δ_H

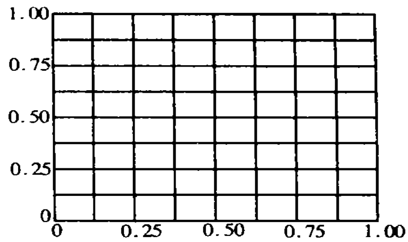

图 2 将粗网格细化为以 $h = 2^{-3}$ 为步长的细网格 Δ_h

为比较两重网格算法的计算精度, 再在细网格 Δ_h 上直接采用特征有限元非线性迭代法求出 u_h• 表 1 给出两重格解 $\hat{u}_h$ 的 L^2 误差及 CPU 时间, 这里的空间网格剖分步长 h 满足 $H = h^{2/3}$• 表 2 给出只在细网格 Δ_h 上进行非线性近代运算解 u_h 的 L^2 误差及 CPU 时间•

表 1 两重网格解 $\hat{u}_h$ 的 L^2 误差与计算时间

h	H	$\dfrac{\\|\hat{u}_h - u\\|}{\\|u\\|}$	CUP 时间
2^{-3}	2^{-2}	3.1640×10^{-4}	30″

表 2 非线性迭代解 u_h 的 L^2 误差与计算时间

h	$\dfrac{\\|u_h - u\\|}{\\|u\\|}$	CUP 时间
2^{-3}	3.1085×10^{-4}	129″

从表 1 及表 2 的 CPU 时间可以看出, 两重网格算法使得计算时间缩短数倍, 计算效率提高显著•

对于对流占优扩散方程, 特征有限元算法可以有效的消除数值震荡现象, 但对非线性问题, 需要采用比较耗时的非线性迭代运算, 两重网格算法的引入, 则只需要在粗网格上进行非线性迭代, 在所需要求解的细网格上进行的只是线性运算, 这样就可以节约大量的计算时间, 使计算效率得到明显的提高•

[参考文献]

[1] Douglas J Jr, Russell T F. Numerical method for convection_dominated diffusion problem based on combining the method of characteristics with finite element or finite difference procedures[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1982, **19**(5): 871—885.

[2] Russell T F. Time stepping along characteristcs with incomplete iteration for a Galerkin approximation of miscible displacement in porous media[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1985, **22**(5): 970—1013.

[3] XU Jin_chao. A novel two_grid method for semilinear elliptic equations[J]. SIAM Journal on scientific Computing, 1994, **15**(1): 231—237.

[4] XU Jin_chao. Two grid finite element discretization techniques for linear and nonlinear PDEs[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1996, **33**(5): 1759—1777.

[5] Dawson C N, Wheeler M F. Two_grid methods for mixed finite element approximations of nonlinear parabolic equations[J]. Contemporary Mathematics, 1994, **180**: 191—203.

[6] LI Wu, Myron B Allen III. Two_grid methods for mixed finite_element solutions of reaction_diffusion equations[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 1999, **15**(5): 589—604.

[7] Layton W, Tobiska L. A two_level method with backtracking for the Navier_Stokes equations[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1998, **35**(5): 2035—2051.

[8] Mheeleer M F. A prori L^2 error estimates for Galerkin approximations to parabolic partial differential equations[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1973, **10**(4): 723—759.

Two_Grid Method for Characteristics Finite_Element Solution of 2D Nonlinear Convection_Dominated Diffusion Problem

QIN Xin_qiang[1,2], MA Yi_chen[1], ZHANG Yin[2]

(1. School of Sciences, Xi' an Jiaotong University, Xi' an 710049, P. R. China

2. School of Sciences, Xi' an University of Technology, Xi' an 710048, P. R. China)

Abstract: For two dimension nonlinear convection diffusion equation, a two_grid method of characteristics finite_element solution was constructed. In this method the nonlinear iterations is only to execute on the coarse grid and the fine_grid solution can be obtained in a single linear step. For the nonlinear convection_dominated diffusion equation, this method can not only stabilize the numerical oscillation but also accelerate the convergence and improve the computational efficiency. The error analysis demonstrates if the mesh sizes between coarse_grid and fine_grid satisfy the certain relationship the two_grid solution and the characteristics finite_element solution have the same order of accuracy. The numerical example confirms that the two_grid method is more efficient than that of characteristics finite_element method.

Key words: convection_diffusion equation; characteristics finite_element; two_grid method; convergence