

文章编号: 1000-0887(2005) 11-1380-07

# 涡流检测中识别缺陷形状的一种新方法<sup>\*</sup>

庄弘炜<sup>1</sup>, 马逸尘<sup>1</sup>, 张志斌<sup>1</sup>, 王应玺<sup>1</sup>, 曹剑锋<sup>2</sup>

(1. 西安交通大学 理学院, 西安 710049;  
2. 国电热工研究院, 西安 710032)

(王彪推荐)

**摘要:** 涡流检测反演技术是一种非常重要的反演缺陷形状尺寸的无损检测方法。运用 Dirichlet 边界条件下涡流检测反演的远场区域导数, 构造了反演缺陷形状的一种新算法, 并且给出了二维及三维的算例, 数值反演的结果与实际缺陷吻合得较好。从而说明了: 对较小的波数, 即使用较少的入射和观测方向的远场测量信息, 亦可得到未知缺陷形状的一个合理的重构, 算法是可行的、正确的。

**关键词:** 涡流检测; 区域导数; Nystrom 方法  
**中图分类号:** O175      **文献标识码:** A

## 引 言

涡流检测是导电材料无损检测的一种非常重要的方法<sup>[1]</sup>。当载有低频交流电的检测线圈靠近导电试件表面时, 可以检测到由于缺陷或裂纹的出现而导致的试件导电性能的改变。

关于涡流场的数值反演已发展为一门综合的学科, 它涉及电磁场理论、数值分析、优化方法、计算机软件等多个方面, 所求解的问题深入到工业生产的各个领域。计算涡流场的方法主要有: 有限元法(FEM)、边界元法(BEM)、随机化的总体优化方法等等<sup>[2~4]</sup>。本文运用区域导数方法, 构造了一个用远场散射波重构涡流检测缺陷形状的新算法。该法在水声学中已有应用<sup>[5]</sup>, 但在涡流场中的应用未见文献记载, 且涡流场与声场相比, 电磁场的传播速度快, 频率高, 一般的文献中计算的波数以  $k = 1$  居多, 本文不仅计算了  $k = 1$ , 而且把波数提高到了  $k = 2.5$ 。更进一步, 本文反演了三维椭球形缺陷的形状, 结果较好。

## 1 电 磁 波

用电场强度矢量  $E$ 、磁场强度矢量  $H$ 、电位移矢量  $D$ 、磁感应矢量  $B$  来描述导体中的电磁波, 它满足 Maxwell 方程<sup>[6]</sup>:

\* 收稿日期: 2003\_07\_15; 修订日期: 2005\_07\_19  
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10371096)  
作者简介: 庄弘炜(1969—), 女, 福建人, 副教授, 博士(Tel: + 86\_29\_88015106; E\_mail: zhuanghw01@163.com);  
马逸尘(联系人, Tel: + 86\_29\_82660051; Fax: + 86\_29\_82668559; E\_mail: ycma@mail.xjtu.edu.cn)。

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \times H = \frac{\partial D}{\partial t} + \mathcal{O}E, \\ \operatorname{div} \cdot B = 0, \\ \operatorname{div} \cdot D = 0, \end{cases} \quad (1)$$

且  $D = \mathcal{O}E$ ,  $B = \mu H$ , 其中  $\mu$  为磁导率,  $\varepsilon$  为介电常数、 $\sigma$  为电导率. 因为磁场  $B$  是无散场, 故引入一个矢量  $A$ , 则  $B = \operatorname{rot} \times A$ , 将其代入电场  $E$  的旋度方程, 我们得到:

$$\operatorname{rot} \times \left( E + \frac{\partial A}{\partial t} \right) = 0,$$

由场论可知, 存在一个标量  $u$ , 它满足

$$E = -\operatorname{rot} \times u - \frac{\partial A}{\partial t}, \quad (2)$$

从而有:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \times \operatorname{rot} \times A + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \mu\varepsilon \operatorname{rot} \times \frac{\partial u}{\partial t} = \mu\mathcal{O}E, \\ \operatorname{div} \cdot u + \operatorname{rot} \cdot \frac{\partial A}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

根据  $A$  的定义,  $A$  和  $u$  满足罗仑兹规范化条件:

$$\operatorname{div} \cdot A + \mu\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (4)$$

对于时谐场, 当频率  $\omega > 0$  时, 方程进一步简化为 Helmholtz 方程:

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad (5)$$

其中波数  $k = \omega \sqrt{\mu(\varepsilon + i\sigma/\varepsilon)}$  是一常数.

## 2 区域导数

我们的任务是: 用散射波的远场模式重构缺陷的几何形状. 假设入射波是时谐的电磁平面波  $u^i(\hat{x}, t) = \operatorname{Re} e^{i(k \cdot \hat{d}) - i\omega t}$ , 其中  $\hat{d} \in R^N$  ( $N = 2$  或  $3$ ), 且  $|\hat{d}| = 1$ , 已知入射波的方向,  $u^s$  表示电磁场的散射波, 缺陷区域为  $\Omega$  且  $X \subset \left\{ \Gamma \in C^2: \exists \Omega \subset R^N \text{ 是开的、有界的和连通的, 使得 } \Gamma = \partial \Omega \right\}$  是容许边界集合. 对  $\Gamma \in X$  设  $\Omega^e = R^N \setminus \Omega$ . 则缺陷散射问题应描述为: 求  $u \in C^2(\Omega^e) \cap C(\Omega^e)$  使得

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0, & \text{在 } \Omega^e \text{ 内,} \\ u = 0, & \text{在 } \Gamma \text{ 上,} \\ u^s(\hat{x}) := u(\hat{x}) - \exp(ik\hat{d} \cdot \hat{x}), \end{cases} \quad (6)$$

$n(x)$  表示在  $\hat{x}$  方向上的外法线单位矢量, 且散射波  $u^s$  满足 Silver\_M iller 辐射条件<sup>[7]</sup>.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{(N-1)/2} \left( \frac{\partial u^s(\hat{x})}{\partial r} - iku^s(\hat{x}) \right) = 0,$$

其中  $r = |\hat{x}|$ , 在所有方向  $\hat{x} / |\hat{x}| \in S^1$  上一致成立.  $u_\infty$  是由  $u^s$  唯一确定的远场模式:

$$u_\infty(\hat{x}) = \int_{\partial k_R} \left( u^s(y) \frac{\partial}{\partial n(y)} e^{-ik\hat{x} \cdot y} - e^{-ik\hat{x} \cdot y} \frac{\partial u^s(y)}{\partial n(y)} \right) ds(y), \quad \hat{x} \in S^{N-1}, \quad (7)$$

其中  $R > 0$ ,  $\Omega \subset k_R := \{y \in R^N: |y| < R\}$ ,

引入远场算子  $F: X \rightarrow C(S^{N-1})$ ,  $F$  在  $\Gamma \in X$  上的导数可定义如下: 对于任意实向量  $\alpha \in$

$C^2(\Gamma; R^N)$ , 定义集合  $\Gamma_\alpha = \{x + \alpha(x) : x \in \Gamma\}$ , 称  $\Gamma_\alpha$  是区域  $\Omega_\alpha$  的  $C^2$  边界. 那么, 当  $\|\alpha\|_\infty = \max_x |\alpha(x)|$  足够小, 我们定义算子  $F$  在边界  $\Gamma$  上“沿  $\alpha$  方向”的区域导数为:

$$F'(\Gamma; \alpha) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [F(\Gamma_{\varepsilon\alpha}) - F(\Gamma)],$$

那么  $F'(\Gamma; \alpha): C^2(\Gamma; R^N) \rightarrow C(S^{N-1})$  就被称为  $F$  在  $\Gamma$  上“沿  $\alpha$  方向”的区域导数<sup>[5]</sup>.

**定理 2.**<sup>[5]</sup> 设  $\Gamma \in C^2$ ,  $\alpha \in C^2(\Gamma; R^N)$ ,  $u^0 \in H_{loc}^2(\mathcal{Q})$  是散射问题(6)的解. 则区域导数  $F'(\Gamma; \alpha)$  存在, 且由  $u'$  的远场模式  $u'_\infty$  给出, 即  $F'(\Gamma; \alpha) = u'_\infty(\hat{x})$ . 其中  $u' \in C^2(\mathcal{Q}) \cap C(\mathcal{Q})$  是外边界值问题(6)的解:

$$\begin{cases} \Delta u' + k^2 u' = 0, & \text{在 } \mathcal{Q} \text{ 内,} \\ u' = -\alpha n \frac{\partial u^0}{\partial n}, & \text{在 } \Gamma \text{ 上,} \\ \lim_r r^{(N-1)/2} \left[ \frac{\partial u'(x)}{\partial r} - iku'(x) \right] = 0. \end{cases} \quad (8)$$

### 3 数值算法与算例

为简化讨论起见, 我们假设已知远场模式  $u_\infty \in L^2(S^1)$ 、入射波方向  $u^i$  及波数  $k > 0$ , 由此来反演未知区域  $\Omega$  的形状. 给出区域  $\Omega$  的边界  $\Gamma$  在极坐标下参数化形式:

$$x_a(t) = r_a(t) \begin{Bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{Bmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

式中

$$r_a(t) = a_0 + \sum_{j=1}^M \{a_j \cos jt + a_{j+M} \sin jt\}, \quad \mathbf{a} = (a_0, \dots, a_{2M})^T \in R^{2M+1}, M \in N.$$

设  $\Phi_M := \{\mathbf{a} \in R^{2M+1} : 0 < \rho_1 \leq r_a(t) \leq \rho_2, t \in [0, 2\pi]\}$ .

**定理 3.**<sup>[5]</sup> 对于  $\mathbf{a} \in \Phi_M$ , 映射  $F$  是可微的,  $\partial F_i(\mathbf{a}) / \partial a_j = u'_{j,\infty}(\hat{x}_i)$ ,  $i = 1, \dots, P, j = 0, \dots, 2M$ . 其中,  $u'_{j,\infty}$  是  $u'_j \in C^2(\mathcal{Q}) \cap C(\mathcal{Q})$  的远场模式, 即外边界问题(9)的解:

$$\begin{cases} \Delta u'_j + k^2 u'_j = 0, & \text{在 } \mathcal{Q} \text{ 内,} \\ \lim_r r^{1/2} \left[ \frac{\partial u'_j(x)}{\partial r} - iku'_j(x) \right] = 0, & \text{当 } r \rightarrow \infty \text{ 时,} \\ u'_j(x_a(t)) = - \frac{r_a(t)}{\sqrt{r_a(t)^2 + r_a(t)^2}} \times \\ \quad \frac{\partial}{\partial n} u^0(x_a(t)) \begin{cases} \cos jt, & j = 0, \dots, M, \\ \sin(j-M)t, & j = M+1, \dots, 2M, \end{cases} & t \in [0, 2\pi], \end{cases} \quad (9)$$

因为方程  $F'(\Gamma; \alpha) = u'_\infty(\hat{x})$  是病态的、非线性的, 我们用 Tikhonov 正则化方法求解. 就是求极小化问题  $\sum_{i=1}^P |F_i(\mathbf{a}) - u_{\infty i}|^2 + \gamma \|\mathbf{a}\|^2$ , 其中  $\gamma > 0$  称为正则化参数. 我们利用积分方程方法求解  $u^0$ , 参看文献[8], 并且用 Nystu<sup>L</sup>-m 方法求解这个边界积分方程. 现给出算法如下:

1) 给出远场测量值  $f_i, i = 1, \dots, P$  以及初始曲线  $\Gamma^0$ :

$$x_a^0(t) = r_a^0(t) \begin{Bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{Bmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

其中

$$r_a^0(t) = a_0^0 + \sum_{j=1}^M \{ a_j^0 \cos jt + a_{j+}^0 M \sin jt \}, \quad \mathbf{a}^0 = (a_0^0, \dots, a_{2M}^0)^T. \quad \text{令 } m = 0;$$

2) 假设  $\Gamma^m$  已知, 用 Nyström 方法求解与方程(6) 相对应的积分方程的值:

$$\begin{aligned} & - 2 \int_{\Gamma^m} \frac{\partial u^s}{\partial \mathbf{n}}(y) \Phi(x, y) ds(y) = \\ & - u^i(x) + 2 \int_{\Gamma^m} u^i(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \mathbf{n}(y)} ds(y), \quad x \in \Gamma_n, \end{aligned}$$

其中  $\Phi(x, y) = \frac{i}{4} H_0^1(k |x - y|)$ ,  $x \neq y$ ,  $H_0^1$  为第一类 Hankel 函数.

3) 进一步, 根据远场模式的定义:

$$u_\infty(\hat{x}) = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}} \int_{\Gamma^m} \left\{ u^s(y) \frac{\partial e^{-ik\hat{x} \cdot y}}{\partial \mathbf{n}(y)} - \frac{\partial u^s}{\partial \mathbf{n}}(y) e^{-ik\hat{x} \cdot y} \right\} ds(y), \quad \hat{x} \in S^1,$$

求得相应的远场模式:  $F_i(\mathbf{a}^m) := u_\infty(\hat{x}_i)$ ,  $i = 1, \dots, P$ ;

4) 用 Nyström 方法求与方程(9) 相对应的区域导数, 进一步, 计算远场模式  $u_j^i, \infty(\hat{x}_i)$ , ( $i = 1, \dots, P, j = 0, \dots, 2M$ ) 根据定理 3.1, 得到映射  $F$  的雅可比矩阵:

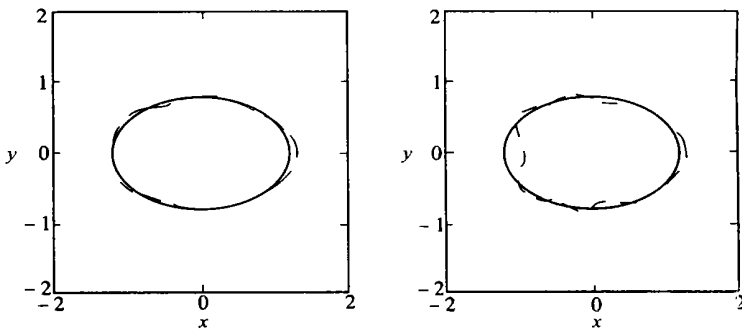
$$\mathbf{J}(\mathbf{a}^m) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(\mathbf{a}^m)}{\partial a_0^m} & \frac{\partial F_1(\mathbf{a}^m)}{\partial a_1^m} & \cdots & \frac{\partial F_1(\mathbf{a}^m)}{\partial a_{2M}^m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_P(\mathbf{a}^m)}{\partial a_0^m} & \frac{\partial F_P(\mathbf{a}^m)}{\partial a_1^m} & \cdots & \frac{\partial F_P(\mathbf{a}^m)}{\partial a_{2M}^m} \end{pmatrix};$$

5) 计算  $\mathbf{a}^{m+1} = \mathbf{a}^m - (\mathbf{J}(\mathbf{a}^m)^T \mathbf{J}(\mathbf{a}^m) + \mu^m \mathbf{I})^{-1} \mathbf{J}(\mathbf{a}^m)^T \mathbf{r}(\mathbf{a}^m)$ ,

其中  $\mathbf{r}(\mathbf{a}^m) = (F_1(\mathbf{a}^m) - f_1, \dots, F_P(\mathbf{a}^m) - f_P)^T$ . 若  $\sum_{i=1}^P |F_i(\mathbf{a}^{m+1}) - f_i|^2 + \gamma \|\mathbf{a}^{m+1}\|^2 < \epsilon$ ,

则  $\Gamma^{m+1}$  即为所求, 否则转至 2)。

现在, 我们利用上述算法给出一些算例. 在下列诸图中, 实线表示原物形, 虚线表示相应的重构, 正则化参数均为  $\gamma = 10^{-2}$ .

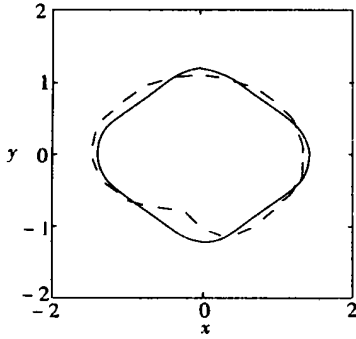


(a) 波数  $k = 1$ , 迭代步数: 4,  
运行时间 104 s

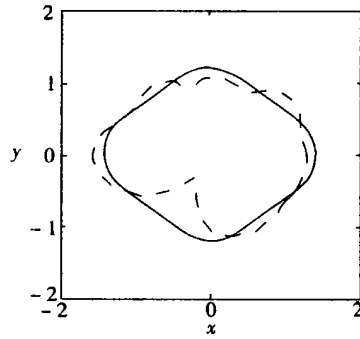
(b) 波数  $k = 2$ , 迭代步数: 6,  
运行时间 156 s

图 1 椭圆形的重构 ( $a = 1.2, b = 0.8$ )

图 1(a)、图 2(a) 以及图 3(a) 说明当波数  $k = 1$  时, 结果是非常好的. 它证明了该算法是可行的、正确的. 但随着波数  $k$  的增大, 结果不理想, 算法仍须进一步改进, 这正是我们下一步的工作. 算例 1 至算例 3, 所有的结果均是用单入射波在全观测范围时的情况下的反演.

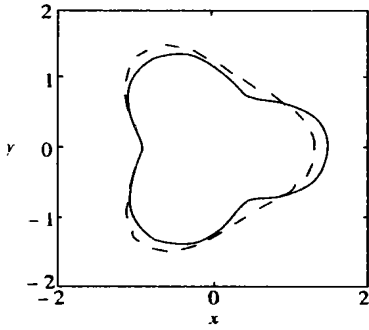


(a) 波数  $k = 1$ , 迭代步数: 4,  
运行时间 104 s

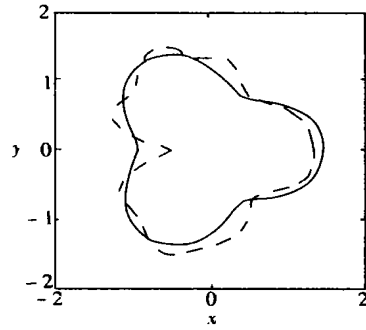


(b) 波数  $k = 2$ , 迭代步数: 7,  
运行时间 178 s

图 2 腊肠形的重构(方程  $r = 1.2 + 0.2\cos 4\theta + 0.1\cos 4\theta$ )



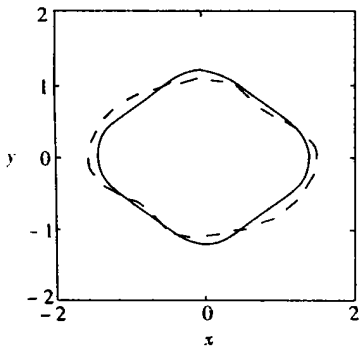
(a) 波数  $k = 1$ , 迭代步数: 5,  
运行时间 126 s



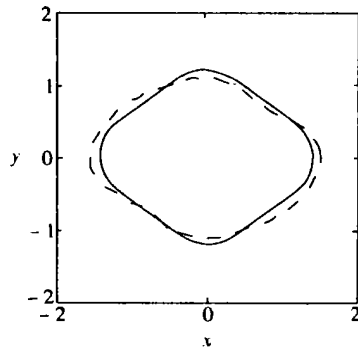
(b) 波数  $k = 2$ , 迭代步数: 7,  
运行时间 180 s

图 3 橡实形的重构(方程  $r = (3/5) \sqrt{17/4 + 2\cos 3\theta}$ )

下面, 我们考察双入射及双观测方向时的图形反演。



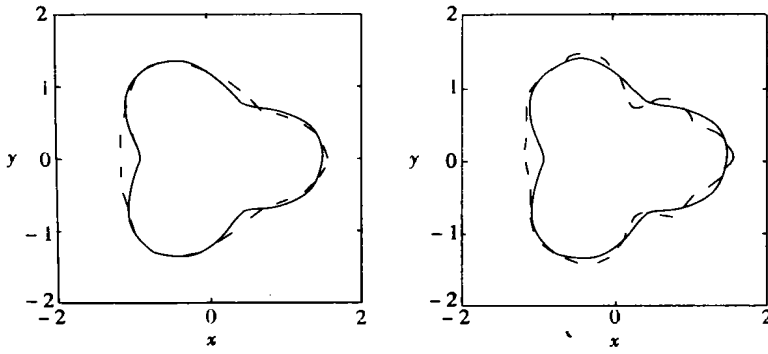
(a) 波数  $k = 2$ , 迭代步数: 10,  
运行时间 379 s



(b) 波数  $k = 2.5$ , 迭代步数: 10,  
运行时间 388 s

图 4 腊肠形的重构(方程  $r = 1.2 + 0.2\cos 2\theta + 0.1\cos 4\theta$ )

算例 4 和算例 5 给出了双入射及双观测方向时的图形反演的结果, 我们清楚地看到, 结果较前者好得多。显然, 观测的方向越多, 所获得的信息亦越多。数值反演的结果与实际缺陷吻



(a) 波数  $k = 2$ , 迭代步数: 12,  
运行时间 468 s

(b) 波数  $k = 2.5$ , 迭代步数: 8,  
运行时间 394 s

图 5 橡实形的重构(方程  $r = (3/5) \sqrt{17/4 + 2\cos 3\theta}$ )

合得就较好。从而说明了: 对较小的波数, 即使用较少的入射和观测方向的远场测量信息, 亦可得到未知缺陷形状的一个合理的重构, 算法是可行的、正确的。

上述两维反演为三维反演提供了一种方法, 下面是三维物体的反演结果。

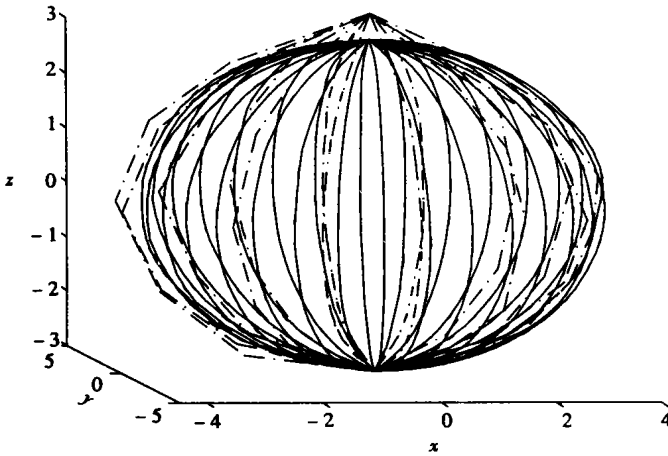


图 6 椭球的重构(方程为  $x^2/16 + y^2/25 + z^2/9 = 0$ ,  $k = 1.5$ )

三维反演是在二维反演的基础上进行的, 我们先反演与  $xy$  平面平行的 5 个椭球截面(即  $z = (3/2)\sqrt{3}$ ,  $z = (3/2)$ ,  $z = 0$ ,  $z = -(3/2)$ ,  $z = -(3/2)\sqrt{3}$ ) 的形状, 然后, 反演当  $y = 0$  时的椭球截面的形状。最后, 将各截面用曲线拟和起来, 得到最终结果, 如图 6 所示, 结果较好。

### [参 考 文 献]

- [1] 王仲生. 无损检测诊断现场实用技术[M]. 北京: 机械工业出版社, 2002, 200—226.
- [2] Margaret G Wisner, Reinhold Ludwig. A hybrid finite element/method of moment formulation for single frequency eddy current inversion[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1992, 9(3): 1843—1849.
- [3] Ratnajeevan S, Hoole H. Inverse problem methodology and finite elements in the identification of cracks, sources, materials, and the geometry in inaccessible locations[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1994, 10(2): 3433—3443.
- [4] LIU YiJun. Eddy Current Analysis for 3-D Problems Using the Boundary Element Method, Review

- of Progress in Quantitative NDT [M]. New York: Plenum Press, 1993, 235—242.
- [5] ZHUANG Hong\_wei, MA Yi\_chen, ZHANG Zhi\_bing, et al. Reconstruction of the shape of unknown obstacles in fresh water[J]. Chinese Journal of Computational Physics, 2004, 21(1): 54—60.
- [6] 全泽松. 电磁场与电磁波[M]. 成都: 四川科学技术出版社, 1992, 307—323.
- [7] David Colton, Rainer Kress. Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory [M]. Berlin: Springer\_Verlag, 1998, 212—220.
- [8] Kress R. Linear Integral Equations [M]. Berlin: Springer\_Verlag, 1989, 101—106.

## New Algorithm of Identifying the Shape of Flaws or Cracks in Eddy Current Testing

ZHUANG Hong\_wei<sup>1</sup>, MA Yi\_chen<sup>1</sup>, ZHANG Zhi\_bin<sup>1</sup>,  
WANG Ying\_xi<sup>1</sup>, CAO Jian\_feng<sup>2</sup>

(1. College of Science, Xi'an Jiaotong University,  
Xi'an 710049, P. R. China;

2. Xi'an Thermal Power Research Institute, Xi'an 710032, P. R. China)

**Abstract:** Eddy\_current inverse technique is a very important method to reconstruct the shape of flaws or cracks. Using the domain derivative of the far\_field pattern for eddy\_current inverse problem with Dirichlet boundary condition, a new algorithm to recover the shape of cracks was constructed and some numerical examples were given. The algorithm demonstrates that the algorithm is feasible and correct for obtaining a reasonable reconstruction of a shape of flaws or cracks from the far\_field measurements even though using less data of directions of incidence and observations for fewer wave numbers are given.

**Key words:** eddy current; domain derivative; Nyström method